

Minus av minus

Numera är vi så vana vid minustecknet att många inte tänker på att det har olika men närliggande betydelser i matematiken. Minustecknet används på tre olika sätt: som en symbol för subtraktion, för att indikera en additiv invers och för att beteckna ett negativt tal. Den här artikeln går närmare in på varför minustecknet används i dessa olika betydelser.

Matematiker antar att talen är så beskaffade att det till varje tal finns en unik additiv invers. Det betyder att det till varje tal b finns ett och endast ett tal som uppfyller $b + _ = 0$. Talet som uppfyller denna ekvation betecknar matematiker med $-b$, men av pedagogiska skäl ska vi till en början istället använda beteckningen $\tilde{b}$.

Till varje tal b finns det alltså ett unikt tal $\tilde{b}$ för vilken det gäller att $b + \tilde{b} = 0$. Eftersom addition är kommutativt gäller därmed också att $\tilde{b} + b = 0$, dvs den additiva inversen till $\tilde{b}$ är b . Då den additiva inversen till $\tilde{b}$ betecknas $\tilde{\tilde{b}}$ gäller det således att:

$$\tilde{\tilde{b}} = b$$

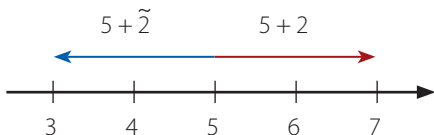
Låt $-1, -2, -3, -4, \dots$ vara de additiva inverserna till de naturliga talen $1, 2, 3, 4, \dots$. Det innebär till exempel att $2 + (-2) = 0$, samt att $\tilde{2} = -2$ och $-\tilde{2} = 2$. Talen $1, 2, 3, 4, \dots$ kallas de positiva talen och $-1, -2, -3, -4, \dots$ kallas de negativa talen. Varför de kallas för positiva och negativa kommer vi tillbaka till. Notera att $\tilde{0} = 0$, och att 0 är varken ett positivt eller negativt tal.

Eftersom vi har att $\tilde{2} = -2$ är det onödigt att använda två olika beteckningar. För tillfället väljer vi att använda beteckningen $\tilde{}$ i båda fallen. Symbolen $\tilde{}$ får därmed två olika roller. Den indikerar alltid en additiv invers till ett tal, men om den additiva inversen är invers till ett positivt tal, betecknar den samtidigt ett negativt tal.

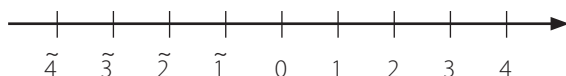
Vi kan visualisera addition som rörelser längs en tallinje. Additionen $5 + 2$ innebär att vi från talet 5 flyttar 2 steg till höger på tallinjen. Eftersom

$$5 + \tilde{2} = 3 + 2 + \tilde{2} = 3 + 0 = 3$$

innebär additionen $5 + \tilde{2}$ att vi flyttar från 5 till 3 , dvs 2 steg till vänster på tallinjen. Att addera ett positivt tal innebär alltså rörelse till höger på tallinjen och addition av ett negativt tal innebär rörelse till vänster på tallinjen.



Var på tallinjen återfinns $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \dots$? Då exempelvis $\tilde{4} = 0 + \tilde{4}$ får vi $\tilde{4}$ genom att från 0 flytta 4 steg till vänster på tallinjen. De negativa talen är därför placerade på tallinjen som i figuren nedan, dvs de positiva och negativa talen är varandras spegelbilder i talet 0.



Jämför vi additionen $5 + \tilde{2} = 3$ med subtraktionen $5 - 2 = 3$, ser vi att *addera med $\tilde{2}$* ger samma resultat som att *subtrahera med 2*. Matematiker väljer också att definiera subtraktion med ett tal b som addition med talets additiva invers $\tilde{b}$.

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + \tilde{b} \quad (*)$$

Genom att definiera subtraktion på det viset blir det samtidigt möjligt att begreppet subtraktion utvidgas till fallet då b är större än a , och till fallet då a eller b är ett negativt tal. Ett exempel på det första fallet är:

$$2 - 3 = 2 + \tilde{3} = \tilde{1}$$

Subtraktion med talet 3 motsvarar alltså att flytta 3 steg till vänster på tallinjen. Ett exempel på det andra fallet är:

$$2 - \tilde{3} = 2 + \tilde{\tilde{3}} = 2 + 3 = 5$$

Subtraktion med det negativa talet $\tilde{3}$ motsvarar alltså att flytta 3 steg till *höger* på tallinjen.



Användning av additiva inverser

Finns det situationer i verkligheten som kan modelleras med additiva inverser? Ja, till exempel ekonomiska transaktioner, temperatur, elektrisk laddning och position. Vi ska se på exemplet med ekonomiska transaktioner, där vi representerar inkomster med talen $1, 2, 3, \dots$ och utgifter med deras additiva inverser $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \dots$. Talet 0 är sin egen additiva invers och den representerar både en inkomst och en utgift (på ingenting). Nedan ges exempel på ekonomiska transaktioner och deras matematiska representation.

I ekonomiska termer är två transaktioner likvärdiga om de har samma effekt på totalsumman. Det är inte alltid självklart för elever eftersom "att ta bort en utgift" kan förefalla som att ingen utbetalning äger rum och ingen förändring av kassan sker, medan "att addera en inkomst" intuitivt innebär att man får mer pengar. Inkomster och utgifter i det här sammanhanget behöver alltså ses som delar i en mer omfattande budget, alltså snarare som planerade inkomster och utgifter.

1. En utgift på 2 kr och en inkomst på 3 kr är likvärdigt med en inkomst på 1 kr.

$$\tilde{2} + 3 = 1$$

2. Att ta bort en inkomst på 3 kr är likvärdigt med att addera en utgift på 3 kr.

$$a - 3 = a + \tilde{3}$$

3. Att ta bort en utgift på 3 kr är likvärdigt med att addera en inkomst på 3 kr.

$$a - \tilde{3} = a + 3$$

4. Till en utgift på 3 kr behöver vi addera en inkomst på 3 kr för att det ska vara likvärdigt med en inkomst på 0 kr.

$$\tilde{3} + 3 = 0$$

Notera att fall nummer 4 också skulle kunna skrivas som att $\tilde{3} + \tilde{\tilde{3}} = 0$, vilket innebär att det är ett exempel på $\tilde{\tilde{3}} = 3$, eller mer generellt $\tilde{\tilde{b}} = b$. Om b är en inkomst är $\tilde{b}$ en lika stor utgift, och om b är en utgift är $\tilde{b}$ en lika stor inkomst. Exempelvis gäller att:

$$b = 2 \rightarrow \tilde{b} = \tilde{2}$$

$$b = \tilde{2} \rightarrow \tilde{\tilde{b}} = \tilde{\tilde{2}} = 2$$

Vi har därmed sett att additiva inverser kan användas för att modellera till exempel ekonomiska transaktioner. Det är en förklaring till varför additiva inverser är intressanta.

Den underförstådda nollan

Men varför använder matematiker ett minustecken för att beteckna en additiv invers? Varför används samma tecken som man använder för att beteckna en subtraktion? För att ge en motivering till varför de gör det, sätter vi $a = 0$ i definitionen (*), som därmed blir:

$$0 - b = 0 + \tilde{b} = \tilde{b}$$

det vill säga:

$$\tilde{b} = 0 - b$$

Det är kanske frestande att plocka bort nollan här, men det är inte tillåtet eftersom minustecknet betyder subtraktion och när vi subtraherar måste vi alltid subtrahera från något. Subtraktion är en operation som kräver två tal, nämligen ett tal att subtrahera från och ett tal att subtrahera med. Additiv invers är en operation som endast kräver ett tal, nämligen det tal vi vill bestämma den additiva inversen till.

Vad vi däremot kan göra är att underförstå nollan i $0 - b$ och därmed uttrycka det kortare som $-b$. Då behöver vi vara medvetna om att $-b$ egentligen betyder $0 - b$. Att $\tilde{b} = 0 - b$, eller att $\tilde{b} = -b$ om man underförstår nollan, antyder att en naturlig beteckning för en additiv invers vore $-b$ eller $-b$. Från och med nu kommer vi därför att använda beteckningen $-b$ istället för $\tilde{b}$. Talen $\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \dots$ blir därmed $-1, -2, -3, -4, \dots$, vilket förklarar varför vi valde att kalla dem negativa tal. Därmed har vi motiverat varför vi använder minustecken som beteckning för såväl subtraktion som för en additiv invers och för negativa tal.

Vi kan nu svara på frågan varför "minus av minus blir plus", dvs varför $-(-b)=b$. Det följer direkt av att vi byter beteckning för additiv invers från $\tilde{b}$ till $-b$, för då blir $\tilde{b}=b$ till $-(-b)=b$. Det skulle kunna skrivas $--b=b$, men det är standard att sätta ut en parentes här för att tydliggöra att det första minustecknet verkar på $-b$. Matematiskt sett innebär regeln $-(-b)=b$ att den additiva inversen till en additiv invers av ett tal är samma som det ursprungliga talet. Om tal representerar inkomster och utgifter, gör ett minustecken framför ett tal att en inkomst blir till en lika stor utgift och att en utgift blir till en lika stor inkomst. I ekonomiska termer innebär därför regeln $-(-b)=b$ att två sådana förändringar är samma sak som att ingen förändring alls sker. Till exempel är

$$-(-10 \text{ kr}) = 10 \text{ kr} \text{ och } -(-(-10 \text{ kr})) = -10 \text{ kr}.$$

Svårigheter med regeln "två minus blir plus"

Att beteckna subtraktion och negativa tal med samma tecken gör matematiken enklare och enhetligare. Men man döljer samtidigt principiella skillnader mellan minustecknen i betydelserna subtraktion, additiv invers och negativt tal, vilket kan leda till förvirring och missuppfattningar. Exempelvis är påståendet "två minus blir plus" tvetydigt. Jämför till exempel betydelsen av de två minustecknen i följande tre fall:

$$-(-5)=5$$

$$10 - (-5) = 10 + 5$$

$$(-2) \cdot (-3) = 6.$$

I de tre fallen "blir två minus till plus", men av olika anledningar:

1. I det första fallet är $-(-5)$ det tal som uppfyller $(-5) + _ = 0$ enligt definitionen på additiv invers. Talet 5 uppfyller denna ekvation, vilket innebär att $-(-5)=5$.
2. I subtraktionen $10 - (-5)$ gäller per definition att $10 - (-5) = 10 + (-(-5))$, eftersom subtraktion definieras som addition av den additiva inversen. Skillnaden mellan detta fall och det föregående fallet är att det föregående bara inbegriper operationen additiv invers, medan detta fall inbegriper både operationen subtraktion och operationen additiv invers.
3. Det tredje fallet, $(-2) \cdot (-3) = 6$, är av en annan typ än de två första fallen, för där är det frågan om multiplikation av två negativa tal. Anledningen till att $- \cdot - = +$ finns förklarat i en tidigare artikel i föregående nummer av Nämnaren. Låt oss här bara kort säga att den är en helt annan än anledningarna till de två andra ovan nämnda fallen.

Ett annat exempel på en missuppfattning är att en möjlig tolkning av regeln $-(-b)=b$ är "att subtrahera en utgift är samma som att addera en inkomst". Det är inte helt korrekt, för regeln $-(-b)=b$ är samma som regeln $\tilde{b}=b$ och i denna regel ingår inte subtraktion, utan bara operationen additiv invers. Regeln "att subtrahera en utgift är samma som att addera en inkomst" är istället en möjlig tolkning av likheten $a-\tilde{b}=a+b$. Denna likhet är densamma som definitionen av subtraktion (*) men uttryckt på en alternativ form som vi får genom att sätta in $\tilde{b}$ på b 's plats. Använder man minustecken både som beteckning för subtraktion och för additiv invers, blir denna likhet $a-(-b)=a+b$. Här står alltså det första minustecknet för subtraktion och det andra minustecknet för additiv invers. I denna likhet motsvaras $-(-b)$ symboliskt sett av $+b$, vilket inte är detsamma som regeln $-(-b)=b$.

Det hjälper inte heller att sätta $a=0$ i likheten $a-(-b)=a+b$, som då blir:

$$0-(-b)=0+b=b, \text{ det vill säga: } 0-(-b)=b.$$

Eftersom det första minustecknet i likheten står för subtraktion går det inte att ta bort nollan, så inte heller denna likhet är identisk med regeln $-(-b)=b$.

Missuppfattningen att en möjlig tolkning av regeln $-(-b)=b$ är "att subtrahera en utgift är samma som en addera en inkomst" är dock mindre allvarlig eftersom de två olika betydelserna av ett minustecken är närbesläktade och den principiella skillnaden mellan dem är subtil. Ibland kan man därför tillåta sig själv att vara något inexact när man motiverar räkneregler, då korrekthet inte är det enda relevanta kriteriet på en bra motivering för elever. Ofta är det viktigare att få fram en poäng och ge eleverna en intuitiv förståelse. Däremot är det bra om läraren själv har en djupare förståelse för hur det faktiskt ligger till.

LITTERATUR

- Enare, B. (2015). *Om negativa tal*. Nämnaren 2015:3.
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Doktorsavhandling, Göteborgs universitet.
- Månsson, A. (2019). *Multiplikation med negativa tal*. Nämnaren 2019:3.
- Person, I. O. (2007). *Om negativa tal*. Nämnaren 2007:2.
- Persson, I. O. (2007). *Two tänkbara modeller för undervisning om negativa tal*. Nämnaren 2007:3.
- Petersson, J. (2016). *Aritmetik med negativa tal – teckenregler eller teckenresonemang?* Nämnaren 2016:1.