

Från, med och mellan

– små ord med stor betydelse

Har du tänkt på att 8 subtraherat *med* 5 och 8 subtraherat *från* 5 innebär olika saker? Har du tänkt på att differensen *mellan* 8 och 5 och differensen *mellan* 5 och 8 innebär olika saker? Att subtraktion är icke-kommutativt är egentligen inte svårt att förstå. Minsta barn kan lätt inse att om du har åtta och tar bort fem så är det inte detsamma som om du har fem och ska ta bort åtta. Ändå är beräkningsfel ganska vanliga hos elever långt upp i åldrarna. Här är två exempel på vanliga fel:

$$72 - 48 = 36$$

Talsorterna räknas var för sig och entalen som $8 - 2 = 6$ (exemplet är hämtat från Strövtåget i detta nummer). Att räkna $2 - 8 = -6$ är vad som skulle behövas i det här fallet. Men när elever får möta negativa tal har de redan lång erfarenhet av subtraktioner där det större talet alltid står först.

$$8x + 4 = 3x + 24 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 8x + 4 = 3x + 24 - 3x$$

Ekvationen löses genom att termen $3x$ subtraheras från båda sidorna, men om eleven skriver termen där den får plats blir resultat ganska ofta att det i vänsterledet kommer att stå $3x - 8x + 4$. Antingen räknar eleven ändå $8x - 3x$, eller så får den felaktiga notationen konsekvensen att eleven förenklar vänsterledet till $-5x + 4$ för att i nästa steg addera $5x$ till båda sidorna.

Min fundering handlar om att de olika sätt vi talar om subtraktion kan göra det svårt för elever att få klarhet i subtraktionens riktning. Jämför följande olika sätt att beskriva subtraktionen $23 - 9$:

23 minus 9
ta bort 9 från 23
dra av 9 från 23
ta 9 av 23
subtrahera 23 med 9
minska 23 med 9

Jag har också hört elever uttrycka sig så här:

minusa 9
minusa 23 med 9
minusa 9 och 23

Eller som i fallet med ekvationen ovan:

minusa $3x$ på båda sidor

Vi svenskar lär vara extremt bra på att skapa nya verb av substantiv, till exempel är 'att googla' ett svenskt verb bildat av ordet Google. Att eleverna gör om substantivet minus till verbet minusa är kanske inte så konstigt, men riktningen blir otydlig och betydelskillnaden mellan att minusa 23 med 9 och minusa 9 med 23 är diffus.

Pålästa matematikdidaktiker kanske invänder att subtraktion inte enbart bör ses som att *ta bort* utan också som *skillnad*. Vi benämmer resultatet av en subtraktion med termen differens, som betyder just skillnad. Men den vardagliga betydelsen av ordet skillnad innehåller inte någon riktning. Åldersskillnaden mellan Pia som är 23 år och Erik som är 9 år är densamma oavsett om vi jämför Pia med Erik eller Erik med Pia. Skillnaden mellan 23 och 9 är 14, men skillnaden mellan 9 och 23 är också 14.

I inledande matematikundervisning är det inte ovanligt att eleven får veta att skillnaden mellan två tal kan erhållas antingen genom nedräkning eller uppräkning. Skillnaden har alltså ingen riktning och illustreras som ett avstånd på tallinjen. Tomas, som jag intervjuade när han gick i årskurs 9, definerade begreppet skillnad väldigt explicit när han sa:

Om du har en skillnad måste du ha ett större och ett mindre tal. Om du ska räkna ut skillnaden måste du alltid ta det större talet minus det mindre talet.

Tomas var väl medveten om existensen av negativa tal och kunde räkna ut $20 - 35 = -15$, men han hävdade ändå bestämt att *skillnaden* måste vara ett positivt tal.

Något mindre måste tas bort från något större, annars är det ju ingen skillnad.

I alla vardagssammanhang är Tomas definition den mest rimliga. Skillnaden är det vi räknar ut genom att ta bort det mindre talet från det större. Det är bara när vi plockar bort vardagskontexten som vi kan tala om olika skillnader, där $23 - 9$ är något annat än $9 - 23$.

Kontexten visar riktningen

Till vardags framgår subtraktionens riktning av situationen. Här är tre frågor från olika kontexter som alla besvaras med hjälp av subtraktionen $28 - 5$.

Det finns 28 saker på bordet och vi plockar bort 5 av dem.
Hur många finns kvar?

Här skulle vi säga: ta bort 5 från 28 eller subtrahera 5 från 28.

Temperaturen igår var 28 grader, men idag är den 5 grader lägre.
Vad är dagens temperatur?

Här skulle vi säga: 28 minskas med 5 eller 28 sjunker med 5, eller att vi subtraherar 28 med 5.

Pia har 28 poäng och Pelle har 5 poäng.
Hur stor är poängskillnaden?

Här skulle vi säga: skillnaden mellan 28 och 5.

Så länge kontexten finns på plats är språkbruket naturligt, men när kontexten försvinner och endast verbet subtrahera (eller det lite slarviga minusa) används är det inte helt enkelt att förstå vilka uttryck som är lika och vilka som är olika.

Samma betydelse:

28 subtraherat *med* 5 (28 – 5)

5 subtraherat *från* 28 (28 – 5)

Olika betydelse:

28 subtraherat *med* 5 (28 – 5)

28 subtraherat *från* 5 (5 – 28)

Olika betydelser:

differensen *mellan* 28 och 5 (28 – 5)

differensen *mellan* 5 och 28 (5 – 28)

Subtraktion betyder undandragande. Av latinets *subtractio* som betyder undandraga, där latinets *trahera* betyder mer bokstavligt "att draga".

Subtrahera betyder dra ifrån, minska.

Differens betyder skillnad, av latinets *differentia* som betyder olikhet, skillnad.

Subtrahend är det tal som ska dragas ifrån ett annat.

Minuend är det tal som ska minskas, av latinets *minuendus* som betyder "som bör minskas".

Minus betyder på latin "mindre".

Ur *Våra ord, kortfattad etymologisk ordbok*

Vad rekommenderas?

Under åren 1938–1991 fanns en statlig granskning av läromedel, men därefter blev det fritt fram för läroboksförfattare att själva bestämma vilken terminologi de vill använda. År 1966 gav den dåvarande Skolöverstyrelsen ut boken "Matematikterminologi i skolan", som återkom i reviderad version 1979. I förordet till 1979 års upplaga står det att Skolöverstyrelsen förväntar sig att läromedelsförfattarna anpassar sin framställning av matematiken till rekommendationerna i boken. I den upplagan föreskrivs att $6 - 2 = 4$ betyder att *differensen av 6 och 2 är 4* och ska utläsas *sex subtraherat med två är lika med fyra*, alternativt *6 minus 2 är lika med 4* eller *6 minus 2 är 4*. Vidare kan vi läsa följande:

Då man i vardagligt språk talar om skillnaden mellan två tal avser man vanligen differensen av det större och det mindre talet. Differensen av 6 och 2 är lika med 4, medan differensen av 2 och 6 tecknas 2 – 6 och är lika med -4.

Uttrycksättet 'ta bort ett tal från ett annat tal' leder lätt till att talen skrivs i fel ordning då subtraktionen tecknas och bör därför undvikas.

En snabb titta i några lite nyare källor visar en annan bild. En av de mest sålda läromedlen idag lär vara "Favorit matematik" från Studentlitteratur. I läroboken för årskurs 7 läser jag på sidan 44:

Differensen betyder skillnaden och är resultatet i en subtraktion.

När man subtraherar ett tal från ett annat...

Det är tydligt att läromedlet inte följer Skolöverstyrelsens råd från 1979 eller problematiserar de svårigheter som varit kända i över 50 år.

I "Matematiktermer för skolan" står det att uttrycket $6-2=4$ utläses *6 minus 2 är (lika med) 4*. Begreppen minuend och subtrahend tas också upp, men inga alternativa sätt att utläsa subtraktionen står nämnda.

Jag tittar också i *Intensivträning i matematik åk 1–3. Talkamrater för talen 1–10.Handledning*. Det är ett material utgivet av Natur och Kultur som stöd för intensivträning i matematik. Det är tänkt som underlag för en-till-en-undervisning med elever som har missat grundläggande begrepp. I lärarhandledningen står det mycket om att eleverna ska lära sig skriva på mattespråket. Eleven förväntas översätta från konkreta material eller vardagsproblem som handlar om att ta bort, minska eller jämföra, till mattespråket, vilket innebär uttryck skrivna med matematiska symboler. Ingenstans finns beskrivet hur mattespråket ska låta muntligt. Det är lovvärt att det stringenta matematiska symbolspråket får en central plats i undervisningen, men kanske är det oroande att läraren inte ges några rekommendationer om hur symboluttrycken ska utläsas eller beskrivas på ett generellt sätt. Det finns ett muntligt mellanled mellan *att ha åtta pennor och ta bort fem av dem* till det symboliska $8-5$.

Min hypotes är att olika och ibland diffusa eller slarviga sätt att benämna subtraktioner bidrar till elevers osäkerhet och feltolkningar. Kanske kan en ökad medvetenhet om riktningprepositioner underlätta förståelsen. Kanske kan också användningen av ordet *differens* istället för *skillnad* markera att matematiken skiljer sig från den intuitivt upplevda vardagen. Speciellt vill jag rikta en uppmaning till lärare som undervisar elever med annat modersmål än svenska: uppmärksamma prepositionerna – de är små ord med stor betydelse.

LITTERATUR

- Heinonen, M. mfl (2018). *Favorit matematik 7*. Lund: Studentlitteratur.
- Mowitz, L. & Kiselman, C. (2008). *Matematiktermer i skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
- Olsson, I. (2014). *Intensivträning i matematik åk 1–3. Talkamrater för talen 1–10. Handledning*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Wessén, E. (1997). *Våra ord, kortfattad etymologisk ordbok*. Stockholm: Norstedts.