

Enade vi stå, söndrade vi falla

Den här språkspalten handlar om enhet, om enighet och om helhet. I skolmatematiken tänker vi oftast på enhet i relation till mätning. En enhet kan till exempel vara meter, kilogram eller sekunder. Det som prefixet *en* i ordet enhet talar om för oss är att vi relaterar storleken på det vi mäter till *en* av den sort som enheten anger. Till exempel avser vi med fem meter en längd som är fem gånger så stor som en meter. I *Matematiktermer för skolan* anges betydelsen av enhet vara just måttenhet. Men det är egentligen en mycket begränsad betydelse av ordet enhet.

Enhet och enighet har att göra med talet ett. Ettan har en särskild roll i matematiken, den fungerar som utgångspunkt i ordningstal och uppräknings. Den är en referenspunkt, ett så kallat *benchmark number*, för rationella tal. Och den är neutralt element i multiplikation.

Både svenska och engelska har sina språkliga rötter i latinet. På latin finns ordet *unus*, som betyder en enda, ensam, en. Det är en ordstam som vi återfinner i ord som unik, universum, universitet, unison och uniform. När *uni* används som prefix indikerar det enighet, enhällighet, samstämmighet och helhet.

Det engelska ordet för enhet är unit. Men det som engelskspråkiga elever tänker på när de hör ordet unit är nog inte första hand en måttenhet. De tänker snarare på ental. I en engelsk matematikordbok för lågstadiet hittar jag följande beskrivning: *Units are recorded in the ones column*. En översättning till svenska lyder: Entalen bokförs i entalskolumnen. Notera att vi inte skulle säga att enheterna bokförs i entalskolumnen. På svenska försvinner den starka kopplingen mellan enhet och ental.

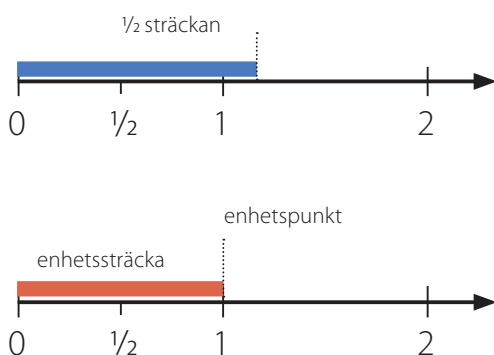
När ett ental delas i mindre men lika stora bitar får vi bråkdelar. En sådan bråkdel heter på engelska a *unit fraction*, ett enhetsbråk. Ett enhetsbråk är ett bråk med 1 i täljaren och ett annat heltal i nämnaren. Den hela enheten har delats, brutits sönder. Till exempel avser $\frac{1}{2}$ att ettan, helheten, har delats i fyra delar och $\frac{1}{38}$ att ettan har delats i 38 delar. Bråken relateras alltid till ettan – the unit. Förstår man detta är det ganska lätt att inse att $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$, eftersom ettan i det första fallet har brutits sönder i fyra delar och i det andra fallet i åtta delar. På svenska kallas dessa bråk oftast för *stambråk* och därmed har vi tappat kopplingen till ettan.

en enhet	1	ett enhetsbråk	$\frac{1}{2}$
----------	---	----------------	---------------

Enheten på tallinjen

När svenska elever ombeds sätta ut talet $\frac{1}{2}$ på en tallinje där till exempel talen 1 och 2 redan finns utplacerade är det inte ovanligt att de ser den ritade tallinjen som en sträcka och placerar $\frac{1}{2}$ på mitten av sträckan, istället för att placera $\frac{1}{2}$ mitt emellan 0 och 1. De tänker då på $\frac{1}{2}$ som en del av en helhet, men inser inte att denna helhet måste vara talet 1 snarare än den ritade sträckan. På engelska är det enkelt, $\frac{1}{2}$ är ett enhetsbråk som relateras till enheten, det vill säga till ettan. På tallinjen måste vi alltid ange ettan som referenspunkt vid storleksordning av bråk. Det går inte att veta var på tallinjen $\frac{1}{2}$ eller $\frac{7}{5}$ är om vi inte vet var 1 är. Vad som utgör helheten är viktigt i all räkning med rationella tal och i procentberäkningar. Helheten är enheten, det som utgör 100 % och som motsvarar talet 1.

I vissa läromedel förekommer begreppen *enhetspunkt* och *enhetssträcka* i relation till tallinjen. Enhetspunkten är punkten vid talet 1 på tallinjen. Enhetssträckan är avståndet mellan origo och enhetspunkten.



Enhetskuber

Ett vanligt laborativt material i matematikundervisningen är små kuber som exempelvis kan sättas ihop till geometriska kroppar för att undersöka areor och volymer. De kan heta Unifix eller Multilink (som är kuber med sidolängden 2 cm) eller centikuber (som har sidolängden 1 cm). På engelska heter de *unit cubes*, dvs *enhetskuber*. Namnet är fuffigt genom att det kopplar direkt till idén att det är en kub vars sida är 1. Alla kuber av en viss sort kan då heta samma sak, oavsett den verkliga sidolängden. Oftast är det oviktigt i en matematikaktivitet om det handlar om 1 cm, 2 cm, 1 dm eller någon annan måttenhet. Det viktiga är att inse att det är en etta, en enhet, och att alla beräkningar vi gör med enheten som utgångspunkt kommer att vara desamma oavsett vilken verklig måttenhet vi senare kommer att använda, och oavsett den verkliga längden på kuben vi använder eller bilden vi ritat.



Att skapa enheter

En en förutsättning för att tänka i multiplikativa strukturer är idén om att skapa nya enheter. I didaktisk litteratur kallas detta för *unitizing*. I brist på ett motsvarande svensk ord har jag översatt unitizing till *enhetsgruppering*. Ordet beskriver vår förmåga att gruppera ental för att bilda nya enheter. Istället för att fortsätta räkna ental när det blir alltför många börjar vi istället räkna grupper. Ett exempel är när vi gör avprickningstabeller vid poängräkning och bokför varje poäng som ett streck, men vart femte som ett snedstreck tvärs över. När vi sedan summerar kan vi räkna antal femmor, eller till och med gruppera om dessa så att vi räknar två femgrupper som en tia.



Enhetsgruppering är en central matematisk idé eftersom den ligger till grund för positionssystemet. Ett litet barn kan ha svårt att förstå att en tiokrona är mer värt än fem enkronor eftersom det lilla barnet räknar antal och inte ser tian som en ny enhet bestående av tio av den tidigare enheten. Forskning har dock visat att förmågan att gruppera ental för att skapa nya enheter som sedan kan räknas som om de vore ental är något som utvecklas spontant hos människor. Vi räknar individer, men vi kan också räkna familjer, som i sin tur består av individer. Idén ligger också till grund för mätning där vi väljer att byta enhet när tal blir alltför stora eller alltför små. Hemma fungerar det bra att mäta i meter, men ska vi ange avståndet till en annan stad skapar vi en ny enhet och låter 1 km vara samma som 1000 meter.

Ettan i multiplikation

I multiplikativa strukturer har ettan en särställning eftersom $a \cdot 1 = a$ och $a / 1 = a$. Vi kan multiplicera eller dividera med talet 1 utan att någon förändring sker: $1 \cdot 6 = 6$ och $3,7 / 1 = 3,7$.

Ettan som enhet kan också användas för att definiera multiplikation, vilket du kan läsa mer om i bloggen *Dubbla vinkeln* på NCM:s webbplats. I *Lärobok för räknekonsten* från 1878 står följande beskrivning av multiplikation:

Att multiplicera ett tal med ett annat är att söka det tal i vilket det första betraktat som en enhet ingår till lika antal som 1 ingår i det andra.

Både multiplikation med 1 och division med 1 är användbara operationer vid omskrivningar och beräkningar. Till exempel löses en division med ett tal i bråkform genom att både täljare och nämnare multipliceras med det inverterade bråket för att 1 ska erhållas i nämnaren.

$$\frac{32}{\frac{4}{5}} = \frac{32 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4}} = \frac{40}{1} = 40$$

$$\frac{3ab}{\frac{a}{4}} = \frac{3ab \cdot \frac{4}{a}}{\frac{a \cdot 4}{4 \cdot a}} = \frac{12b}{1} = 12b$$

I detta sammanhang pratar vi om ettan som ett neutralt element för multiplikation, eller en identitet, men sällan som en enhet. I högre matematik används ordet enhet i betydelsen enhetselement eller identitetselement, men i skolmatematiken saknas denna språkliga koppling. Inom linjär algebra till exempel är en enhetsmatris av storleken n den kvadratiske $n \cdot n$ -matris som har ettor längs huvuddiagonalen (från övre vänstra till nedre högra hörnet) och nollor överallt annars. En matris A som multipliceras med enhetsmatrisen E har produkten A , vi skriver $A \cdot E = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

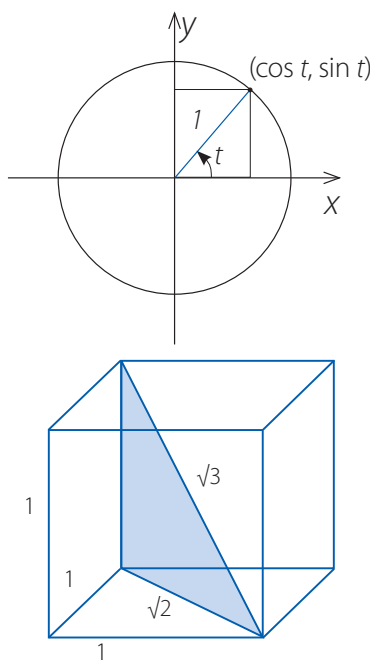
enhetsmatris

En *unit rate* är när ett proportionellt förhållande uttrycks med talet 1 i nämnaren. En svensk översättning skulle kanske kunna vara *enhetsförhållande*. I mätning används enhetsförhållandet i beräkningar med sammansatta enheter såsom km/h eller kr/kg. En unit rate anger hur många av en kvantitet det går på 1 av en annan kvantitet. 5 km/h innebär fem km på 1 timme. Att använda sig av enhetsförhållandet vid beräkningar av till exempel procent kallas i svenska läroböcker ibland att ta vägen över ett, eller i äldre böcker för förhållandemetoden.

Enhetscirkel och enhetskvadrat

Ett annat ställe där enheten dyker upp är i enhetscirkeln som elever möter på gymnasiet. Enhetscirkeln är ett sätt att åskådliggöra de trigonometriska funktionernas värden för olika vinkelvärden. Enhetscirkeln är centrerad i origo och har radien 1. För varje punkt på cirkelns periferi anger x - och y -koordinaterna cosinus respektive sinus för vinkeln t mätt som rotation motsols från x -axeln. Hela idén med enhetscirkeln är att radien hela tiden är 1. Punkten (x, y) på cirkelns periferi kommer därför att motsvara en rätvinklig triangel med hypotenusan 1 och kateterna x respektive y , där både x och y alltid är mindre eller lika med 1.

En enhetskvadrat är en kvadrat med sidan 1 och en enhetskub är en kub vars sida har längden 1. I många beräkningar är det användbart att ha dessa figurer som utgångspunkt, och med hjälp av Pythagoras sats får vi fram längden på diagonalerna.



Det finns en lång rad ord där skolmatematiken på engelska har behållit kopplingen till enheten, men där svenska språket har tappat den. Vi kan fundera på vad det får för konsekvenser för lärandet när den matematiska innebörden av ettan, enheten och helheten inte blir synlig där den dyker upp och skulle kunna skapa sammanhang mellan begrepp. Kanske kan vi bli bättre på att lyfta fram enheten där den finns. Kanske skulle våra elever vinna på att inte ensidigt låta ordet enhet betyda måttenhet i de tidiga skolorna? Enhetspunkten och enhetssträckan, eller 'ettan' på tallinjen, skulle kunna bli mer centrala i undervisningen. Jag avslutar den här språkliga funderingen med en lista över ord där den matematiska idén om enhet är en framträdande egenskap.

<i>engelska</i>	<i>svenska</i>
unit	ental
unit	enhetssträcka, sträckan mellan 0 och 1 på tallinjen
unit	helhet eller grupp som enhet
unitizing	enhetsgruppering, att skapa nya enheter
unit point	enhetspunkt, talet 1 som punkt på tallinjen
unit fraction	stambråk, bråk med täljaren 1, enhetsbråk
unit of measure	måttenhet
unit square	enhetskvadrat, kvadrat med sidan 1
unit element	neutralt element, identitetselement, enhetselement
unit matrix	enhetsmatris
unit rate	förhållandet till 1 av en bestämd enhet, enhetsförhållande
unit vektor	enhetsvektor

LITTERATUR

Ahl, L. M. & Helenius, O. *Dubbla vinkeln*. Blogg dubblavinkeln.ncm.gu.se.
Mouwitz, L. & Kiselman, C. (2008). *Matematiktermer i skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Tycker du att den här språkspalten var intressant att läsa och har egna funderingar kring ord och språkliga uttryck relaterade till matematik? I så fall får du gärna höra av dig till oss på Nämnarens redaktion. Vi tar tacksamt emot både färdiga artiklar i ämnet och förslag på sådant ni läsare skulle vilja läsa om. Kanske är du osäker på betydelsen av något ord, kanske har dina elever svårt att förstå vissa uttryck, kanske brottas du med språkliga dilemman på dina lektioner. Hör då av dig!