Kontinuitet

Begreppet kontinuitet är svårt. Det yttrar sig bland annat genom felaktiga påståenden kring begreppet i etablerade läromedel för gymnasiet. Vi hittar där utsagor som:

- rationella funktioner är i regel inte kontinuerliga (Origo, kurs 3c)
- diskreta funktioner är aldrig kontinuerliga (Matematik 5000, kurs 3c).

I själva verket är alla såväl diskreta som rationella funktioner kontinuerliga.

I den kommande kursplanerevideringen för gymnasiet har man löst "svårigheterna" kring kontinuitet genom att helt enkelt ta bort begreppet explicit. Detta är, i mina ögon, mycket olyckligt. Vi riskerar att få elever som börjar matematikintensiva utbildningar och aldrig har hört talas om kontinuitet. För en matematiker är kontinuitet ett mer centralt begrepp än exempelvis derivata, då det förra är en hörnsten inom i princip alla områden i matematiken. Det är i sig en märklig ordning att introducera derivata utan att ta vägen om kontinuitet.

Jag vill belysa, och reda ut, några missuppfattningar angående kontinuitet. Jag kommer också att peka på några centrala tillämpningar av begreppet och därigenom visa på dess vikt.

Varför går det galet?

En anledning till att resonemangen kring kontinuitet många gånger blir felaktiga är att man inte utgår från definitionen, utan istället tar man fasta på följande *globala* tolkning:

> *En kontinuerlig funktion är en funktion vars graf man kan rita utan att lyfta pennan.*

Problemet med denna vaga förklaring är, för det första, att den är global, medan kontinuitet i själva verket är ett lokalt begrepp – man utgår från kontinuitet i en punkt. För det andra "stämmer" beskrivningen bara då definitionsmängden är sammanhängande, det vill säga ett intervall. Beskrivningen fungerar därför exempelvis inte för rationella funktioner $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ där polynomet q i nämnaren har nollställen, såsom $f(x) = \frac{1}{x}$. På samma sätt kan den informella definitionen ovan av kontinuitet inte tillämpas på diskreta funktioner, då deras definitionsmängd inte ens innehåller intervall.

Definitionen av kontinuitet

Kontinuitet kan definieras på lite olika sätt. Begreppet är inte begränsat till funktioner mellan reella tal, utan är väldefinierat för funktioner $f\colon A \to B$ mellan godtyckliga mängder A och B försedda med så kallade topologier (man talar om topologiska rum). För funktioner mellan metriska rum, vilket är topologiska rum vars topologi är definierat utifrån en metrik, kan kontinuitet definieras på följande sätt:

> *Definition:* Låt a vara en punkt i definitionsmängden för f. Då sägs f vara kontinuerlig i $x=a$ då $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ gäller för varje talföljd (x_n) i D_f sådan att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

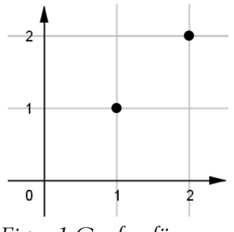
Denna definition är giltig för de funktioner vi möter i gymnasiematematiken, det vill säga för funktioner $f\colon A\to\mathbb{R}$ där A är antingen hela $\mathbb{R}$ eller en delmängd av de reella talen $\mathbb{R}$. Notera hur definitionen är lokalt betingad, vi har nu:

> *Definition:* En funktion f är kontinuerlig då den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

Låt oss nu visa på hur rationella och diskreta funktioner är kontinuerliga.

Diskreta funktioner är kontinuerliga

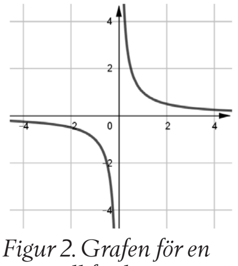
Betrakta exempelvis funktionen $f:\{1,2\}\to\mathbb{R}$, vars definitionsmängd alltså består av punkterna $x=1$ och $x=2$, och där $f(1)=1$ samt $f(2)=2$. Detta är en diskret funktion, grafen består av två punkter, se figur 1. Vi kan naturligtvis inte rita grafen utan att lyfta pennan, men funktionen är som vi ska se kontinuerlig. Låt (x_n) vara en följd i D_f sådan att $x_n\to 1$ (då $n\to\infty$). Eftersom definitionsmängden är diskret, innebär detta att $x_n=1$ för alla tillräckligt stora n. Följaktligen är $f(x_n)=f(1)$ för alla tillräckligt stora n, varpå det trivialt gäller att $f(x_n)\to f(1)$ då $n\to\infty$. Enligt definitionen av kontinuitet är f kontinuerlig i $x=1$, och på samma sätt är f kontinuerlig i $x=2$, så f är kontinuerlig. Med samma resonemang följer det att *alla* diskreta funktioner är kontinuerliga. (En funktion f sägs vara diskret då varje punkt $x=a$ i D_f kan omges av ett intervall så att $x=a$ är enda punkten i intervallet som tillhör D_f.)



Figur 1. Grafen för en diskret funktion.

Rationella funktioner är kontinuerliga

Betrakta nu den rationella funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$, vars definitionsmängd består av alla reella tal utom $x=0$. Funktionens graf är illustrerad i figur 2. Vi kan inte rita grafen över $x=0$ utan att lyfta pennan, men funktionen är trots detta kontinuerlig. Den kritiska punkten, beträffande kontinuitet, (kan man tycka) är $x=0$. Men denna punkt ingår inte i definitionsmängden, varför det (per definition) är inte har någon mening att tala om kontinuitet i punkten i fråga. Med andra ord är f kontinuerlig i alla sina punkter i D_f, så f är kontinuerlig. Med samma resonemang följer det att alla rationella funktioner är kontinuerliga. (En rationell funktion är en funktion f som definieras av en kvot av två polynom $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, där definitionsmängden består av hela $\mathbb{R}$ förutom eventuella nollställen till q.)



Figur 2. Grafen för en rationell funktion.

Varför är begreppet viktigt?

Låt oss nu peka på några sammanhang där kontinuitet kommer in som ett verktyg. Först lite beteckningar. Det slutna begränsade intervallet bestående av tal x sådana att $a\le x\le b$ betecknar vi $[a,b]$. Motsvarande öppna intervall, där ändpunkterna $x=a$ och $x=b$ inte ingår, betecknas (a,b).

A. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så antar f vilket värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ som helst, i någon punkt på $[a, b]$.

Satsen, som kallas satsen om mellanliggande värden, innebär att om $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken, så har f minst ett nollställe på intervallet. Satsen kan alltså tillämpas för att visa på existens av rötter till en ekvation. Som exempel får vi argument för att ekvationen $x^3 = x + 1$ har en rot i intervallet $[1, 2]$. Ekvationen kan nämligen skrivas $f(x) = 0$ där f är den kontinuerliga funktionen $f(x) = x^3 - x - 1$. Vi har nu att $f(2) = 5$ medan $f(1) = -1$, varpå $f(x_0) = 0$ för något x_0 i intervallet $[1, 2]$

Notera att för den rationella (och kontinuerliga) funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ gäller att $f(1)$ och $f(-1)$ har olika tecken, men f saknar nollställen mellan $x = -1$ och $x = 1$. Detta motsäger inte satsen ovan, för den kräver att f är kontinuerlig (och därmed definierad) på hela intervallet $[-1, 1]$.

B. Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så antar f såväl ett största som ett minsta värde på $[a, b]$.

Satsen innebär, tillsammans med satsen om mellanliggande värden, att värdemängden för en kontinuerlig funktion med en definitionsmängd $[a, b]$, också är ett slutet begränsat intervall $[c, d]$. (Vikten av motsvarigheten till detta, för allmänna kontinuerliga funktioner mellan vilka topologiska rum som helst, kan inte nog understrykas.)

En viktig konsekvens av satsen är följande. Antag att vi söker ett största och/eller ett minsta värde för en funktion f på $[a, b]$, som är kontinuerlig på detta intervall samt deriverbar på (a, b). Vi vet då att ett maximum/minimum antas, och vi vet även att dessa extremvärden måste antas i antingen ändpunkterna $x = a, b$ eller i en stationär punkt, det vill säga en punkt $x = s$ där $f'(s) = 0$. Genom att vi nu vet att maximum/minimum verkligen antas, räcker det att undersöka/jämföra funktionsvärdena $f(a), f(b), f(s)$ där s löper över alla stationära punkter i (a, b). Vi behöver alltså inte blanda in teckenstudium eller på annat sätt undersöka f kring de stationära punkterna. Optimering på slutna begränsade intervall blir med andra ord relativt oproblematiskt.

C. Antag att f är kontinuerlig i $x = a$, där $x = a$ är en inre punkt i definitionsmängden. Om $f(a) > 0$ så är $f(x) > 0$ på ett helt intervall kring punkten $x = a$.

Detta, som är en direkt följd av definitionen, ligger till grund för exempelvis andraderivatatestet:

> Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$, där f'' är kontinuerlig i ett intervall kring $x = a$, så är $x = a$ en lokal minimipunkt för f.

Villkoret att $f''(a) > 0$ ger, genom att f'' är kontinuerlig kring $x = a$, att f'' är positiv i ett helt intervall kring $x = a$. Det innebär att f' är strängt växande i detta intervall. Eftersom nu $f'(a) = 0$ måste f' ha teckenväxlingen – 0 + över $x = a$, så $x = a$ är en lokal minimipunkt.

D. Eftersom kontinuitet bygger på gränsvärdesbegreppet, kan kontinuitet även tillämpas vid gränsvärdesberäkningar. Om f är kontinuerlig i $x = a$ gäller, per definition, att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Låt oss illustrera hur detta kan användas. Definitionen av talet e ger att $e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Betrakta nu gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. Detta betraktas som ett standardgränsvärde, alltså ett centralt gränsvärde för vidare beräkningar, och vi ska återkomma till dess betydelse. Vi ska beräkna det med ett kontinuitetsresonemang. Logaritmlagarna ger att

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = f\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right),$$

där $f(x) = \ln x$. Eftersom nu f är kontinuerlig (speciellt i punkten $x = e$) och $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ då $x \to 0$, gäller att

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = f\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \to f(e) = \ln e = 1$$

då $x \to 0$.

Resultatet $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ är en hörnsten vid härledningen av derivatan av $f(x) = \ln x$. För $a > 0$ och litet h gäller nämligen att

$$\frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \frac{\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

där $x = h/a$. Eftersom nu $x \to 0$ då $h \to 0$ drar vi slutsatsen att funktionen $f(x) = \ln x$ är deriverbar i vilken punkt $x = a$ i D_f som helst och $f'(a) = 1/a$.

Hur ska komplexa begrepp hanteras i undervisningen?

Jag tror inte att man ska vara rädd att närma sig (mer) formella definitioner i gymnasieundervisningen. Att kunna ta till sig begrepp och definitioner är mycket centralt för fortsatta studier i matematik. Därmed inte sagt att man inte ska förenkla och presentera tolkningar, men det är viktigt att visa på vad utsagor och begrepp bottnar i. Jag har ovan pekat på hur informella beskrivningar, i syfte att förenkla, kan leda till missförstånd och oklarheter. Det är lite av matematikens signum att vi håller oss till otvetydiga definitioner, som jag även skrev om i Nämnarenartikeln *Om begreppet begrepp*. De senaste åren har jag arbetat med att ta fram ett alternativ till den befintliga gymnasielitteraturen, en bokserie för kurserna 3c och 4, där jag är lite mer stringent med definitioner och satsformuleringar.

LITTERATUR

Petersson, H. (2015). *Om begreppet begrepp*. Nämnaren 2015:4.
Petersson, H. (2019). *Avancera I*. Studentlitteratur.
Petersson, H. (2019). *Avancera II*. Studentlitteratur.