Russell Hatami & Rimma Nyman

Stenrika problem

I den här artikeln presenteras begreppet stenrika matematiska problem för att beskriva rika problem som erbjuder möjlighet till progression vad gäller lösningsmetoder och matematiskt innehåll. Författarna visar hur ett stenrikt problem kan anpassas från årskurs 3 och upp till gymnasiet.

Problemlösning är både mål och medel i skolans matematikundervisning. I läroplanen skrivs problemlösning fram som både centralt innehåll och matematisk förmåga. Som förmåga kan det ge näring till andra centrala innehåll och möjliggöra en kontinuitet i elevernas lärande, speciellt när rika problem används. Rika problem kännetecknas av ett rikt matematiskt innehåll med olika vägar till lösningar och uppfyller sju särskilda kriterier. Problemet ska:

- introducera till matematiska idéer
- vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det
- upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid
- kunna lösas med flera olika matematiska idéer
- kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika matematiska idéer och representationer
- kunna fungera som brobyggare mellan olika matematiska områden
- kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Stenrika problem

Utöver de nämnda kriterierna för rika matematiska problem erbjuder stenrika problem en innehållslig matematisk progression, det vill säga bygger på ett innehåll som kan göras svårare matematiskt och därmed behandlas i skolans olika stadier. Med progression menas att elever får möjlighet att reflektera och fördjupa sitt matematikkunnande och därmed höja sin nivå med avsende på matematikinnehåll. Se exempelvis artikeln *Retorisk-resonerande matematik* där progression från förskoleklass till gymnasiekursen Matematik 2 illustreras.

Syftet med att arbeta med denna problemtyp är att upptäcka, lära och förstå matematiska begrepp över tid. Det bidrar till kontinuitet och ger en röd tråd i matematiklärandet som i sin tur kan utvecklas från grundläggande matematiskt innehåll på lågstadiet ända upp till gymnasial nivå. Ett exempel på ett stenrikt problem är *Jordgubbslandet* som vi nu presenterar ihop med flera lösningsmetoder med olika matematiskt innehåll i ökande svårighetsgrad.

Jordgubbslandet

Att många elever blandar ihop begreppen omkrets och area är välkänt för lärare och forskare. Följande problem kan bidra till förståelse för skillnaden.

> Nilofar ska göra ett rektangulärt jordgubbsland och har 32 meter stängsel till sitt förfogande. Staketet behövs för att inga djur ska komma och äta av hennes jordgubbar. Hon vill att jordgubbslandet ska bli så stort som möjligt. Vilka mått får jordgubbslandet?

Problemet har potential att fördjupa förståelsen för de geometriska begreppen rektangel, kvadrat, längd, area, omkrets och areaenheter, men även mer abstrakt matematiska begrepp som funktion, definitionsmängd, förändring, optimering och konjugatregeln. Olika representationsformer som tabell, graf (exempelvis med hjälp av Geogebra) och symboler kan inkluderas i olika lösningsmetoder. Vi ska nu presentera fem olika lösningsmetoder med progression i det matematiska innehållet.

Metod med tabell som en representationsform

Eleven kan lösa problemet med hjälpa av en tabell. En tabell är inte enbart en lösningsmetod eller representationsform utan, vilket är ännu viktigare, ett verktyg som hjälper elever att strukturera information. Tabellen hjälper eleven att reflektera över strukturer, samband och mönster.

Till en början kan det vara en stor hjälp att använda sig av en figurativ representationsform, det vill säga att rita upp en rektangel som får fungera som *stödfigur*. En figurativ representationsform skiljer sig i minst två avseende från en standardfigur, som är statisk och många gånger skalenlig. En stödfigur är dynamisk i sitt innehåll och form, och behöver inte vara skalenlig. Exempelvis kan en rätvinklig triangel vara svaret till en uppgift där vi började med en godtycklig triangel som figurativ representationsform.

I problemet med jordgubbslandet är en godtycklig rektangel den figurativa representationsformen. Eleverna får chansen att, relativt konkret, se vad som är omkrets och vilka delar den består av. De ges möjlighet att upptäcka att omkretsen till en rektangel är dubbelt så stor som summan av rektangelns olika sidor (längd och bredd). Härifrån kan slutsatsen dras att summan av de två olika sidorna är

$$\frac{32}{2} = 16.$$

Nu kan vi använda en tabell och föra in olika alternativ på sidlängder och deras produkt, alltså arean. Till en början kan vi välja naturliga tal med förutsättningen att ingen av sidorna får vara noll eftersom produkten då skulle bli noll, alltså ingen area. Om ena sidan är 1, inser eleverna vanligtvis att den andra är 15, och så kan de fortsätta med andra alternativ. Redan här kan eleven få en första förståelse för innebörden av begreppen intervall och definitionsmängd utan att de formella termerna tas upp. Vid behov och anpassat till årskursen går det att i tabellen införa generella symboler, till exempel a och b, där $a + b = 16$.

I de tidigaste årskurserna behöver vi växla mellan olika uttrycksformer för att bygga en bro mellan procedur och struktur, mellan aritmetik och algebra. Vi synliggör själva räknandet för att så småningom upptäcka strukturen. Hur vet vi att om en sida är 5, så är den andra sida 11? Jo, genom uträkningen att $11 + 5 = 16$ eller $16 - 5 = 11$. Det är tydliggörandet av dessa uträkningar, speciellt den andra, som utgör brobyggandet och leder in i algebraiskt tänkande.

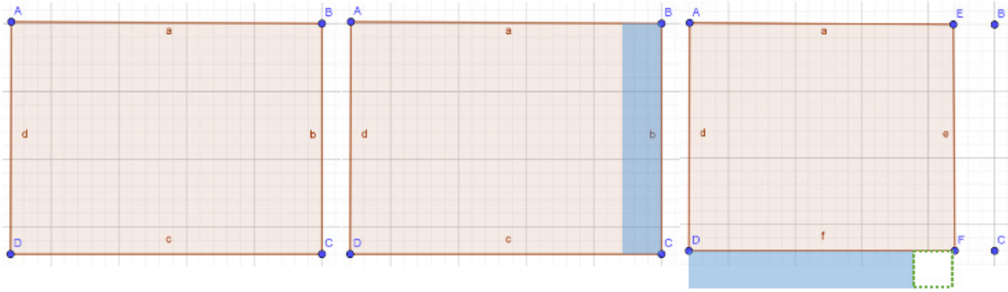
Vi upptäcker ett mönster i tabellen, nämligen att efter raden där båda sidorna är 8 upprepas de första sju fallen men med ombytta roller för sida 1 och sida 2. Det som då kan hända är att eleven inte ser kvadraten som en rektangel och därför väljer 63 som största möjliga area. Men eftersom en kvadrat också är en rektangel är största arean på jordgubbslandet 64. När varje sida är ¼ av omkretsen ges den största möjliga arean.

Summan av sidorna $(a+b)$	*sidan 1* s_1 eller a	*sidan 2* s_2 eller b	$a \cdot b$
16	1	$(16-1)=15$	15
16	2	$(16-2)=14$	28
16	3	$(16-3)=13$	39
16	4	$(16-4)=12$	48
16	5	$(16-5)=11$	55
16	6	$(16-6)=10$	60
16	7	$(16-7)=9$	63
16	8	$(16-8)=8$	64
16	9	$(16-9)=7$	63
	…	…	…
	…	…	…
	…	…	…
	15	$(16-15)=1$	15

Det kan vara på sin plats att dynamiskt undersöka vad som händer om vi väljer andra positiva decimaltal, vilkas summa är lika med 16. Här får eleverna med hjälp av miniräknare eller ett kalkylprogram som till exempel Excel pröva många tal mellan noll och 16. Ju närmare noll det ena talet kommer, desto närmare 16 kommer det andra talet. Talens produkt minskar när deras avstånd ökar. Intressant! Det blir en speciell upplevelse för elever att få erfara kontinuitet och gränsvärde när definitionsmängden experimenteras fram. En högst matematisk upplevelse av funktionsläran, utan dess kompakta representationsformer.

Metod med konjugatregeln som symbolisk representationsform

En möjlig fördjupning är att kunna argumentera för en annan tabell, som vi presenterar längre fram i texten. Till den kan konjugatregeln vara en användbar matematisk modell. Konjugatregeln kan med fördel introduceras redan i grundskolan som huvudräkningsmetod för att multiplicera två tal på lika avstånd från ett runt tal, såsom 20, 25 eller 30. Ta till exempel multiplikationen $17 \cdot 23$. Medelvärdet av de två faktorerna är 20 eftersom båda ligger lika mycket över respektive under 20. Vi kan därför skriva $17 \cdot 23$ som $(20-3) \cdot (20+3)$. Har vi väl identifierat en sådan multiplikation säger konjugatregeln att den kan beräknas på följande vis: $20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$.



Konjugatregeln kan illustreras laborativt genom att klippa och klistra. Vi ritar en rektangel med sidorna 23 och 17. Därefter klipper vi av en remsa längs kortsidan som har bredden 3 så att långsidan blir 20 istället för 23. Remsan flyttas till andra sidan och adderas så att även den sidan blir 20. Nu har har vi nästan fått en kvadrat med sidan 20. Det enda som fattas är en liten kvadrat med sidan 3. Arean av den ursprungliga rektangeln är lika med arean av den nya stora kvadraten minus arean av den lilla kvadraten

$$17 \cdot 23 = (20-3) \cdot (20+3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$$

Eller så kan vi använda konjugatregeln direkt. En generell presentation av konjugatregeln med symbolisk notation ser ut så här:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Tillbaka till tabellen där vi kan fortsätta genom att beteckna en sidas längd med ett algebraiskt uttryck med hjälp av variabeln t. Om den ena sidan skrivs som $(8-t)$ så måste den andra skrivas som $(8+t)$ för att de tillsammans ska vara 16. Eftersom arean är lika med produkten av sidorna kan arean skrivas $(8-t) \cdot (8+t)$.

$a = (8-t)$	$b = (8+t)$	$a \cdot b$
$1 = (8-7)$	$(8+7) = 15$	$(8-7)(8+7) = 8 \cdot 8 - 7 \cdot 7 = 64 - 49 = 15$
$2 = (8-6)$	$(8+6) = 14$	$(8-6)(8+6) = 8 \cdot 8 - 6 \cdot 6 = 64 - 36 = 28$
$3 = (8-5)$	$(8+5) = 13$	$(8-5)(8+5) = 8 \cdot 8 - 5 \cdot 5 = 64 - 25 = 39$
$4 = (8-4)$	$(8+4) = 12$	$(8-4)(8+4) = 8 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 64 - 16 = 48$
$5 = (8-3)$	$(8+3) = 11$	$(8-3)(8+3) = 8 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 64 - 9 = 55$
$6 = (8-2)$	$(8+2) = 10$	$(8-2)(8+2) = 8 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 64 - 4 = 60$
$7 = (8-1)$	$(8+1) = 9$	$(8-1)(8+1) = 8 \cdot 8 - 1 \cdot 1 = 64 - 1 = 63$
$8 = (8-0)$	$(8+0) = 8$	$(8-0)(8+0) = 64$

Det kan låta märkligt, rentav löjligt, att vi använder oss av konjugatregeln som matematisk modell när vi redan har upptäckt från första tabellen vilken area som är störst. Den hårfina skillnaden här är att vi, liksom matematiker, försöker visa att detta verkligen gäller på en högre abstraktionsnivå och mer generellt än för det specifika jordgubbslandet.

Om den ena sidan är lika med $(8-3)$ är den andra sidan $(8+3)$, vilket generellt kan uttryckas så här:

$$(8-t)\cdot(8+t)=8^2-t^2$$

Med hjälp av bokföringen i tabellen kan vi nu föra ett symboliskt resonemang som elever vanligen möter under gymnasiets senare år. Vi har nu förstått att arean av vår rektangel kan skrivas $(64-t^2)$. Eftersom sidan $(8-t)$ måste vara större än noll och summan av de två sidorna ska vara 16, inser vi att $0 \le t < 8$. Detta innebär att ovanstående differens alltid är positiv. Med andra ord: $(64\cdot t^2)>0$. Här kan vi se att arean är störst när differensen är minst, vilket inträffar när $t=0$ och sidan därmed är $(8-0)=8$.

Metoder med hjälp av funktionslära

Här presenterar vi ytterligare tre lösningsmetoder som utgår från att arean modelleras som en andragradsfunktion. Utifrån elevers förkunskaper och intresse kan olika vägval göras och resultera i en grafisk eller en algebraisk lösningsmetod, eller en analytisk metod med hjälp av derivata. Med hjälp av en tabell får vi fram en andragradsfunktion.

a	b	$a\cdot b$
1	$(16-1)=15$	$1\cdot(16-1)=1\cdot 16-1=15$
2	$(16-2)=14$	$2\cdot(16-2)=2\cdot 16-2^2=28$
3	$(16-3)=13$	$3\cdot(16-3)=3\cdot 16-3^2=39$
…	…	…
…	…	…
…	…	…
x	$(16-x)$	$x\cdot(16-x)=16x-x^2$

Vid multiplikation med tal som $3\cdot(16-3)$ sker vanligen uträkningen $3\cdot 13=39$. Här är istället elevernas förståelsen av den distributiva lagen, $a\cdot(b+c)=ab+ac$ en viktigt förkunskap. Vi väljer att betrakta area som en funktion av längden på den ena sidan, betecknad med variabeln x. Alltså kommer vi fram till en polynomfunktion av grad 2. Formellt kan vi använda oss av följande uttryck för arean A som funktion av x, där rektangelns ena sida är x och den andra är $(16-x)$:

$$A(x)=x(16-x)=16x-x^2 \qquad \text{definitionsmängden är } 0<x<16$$

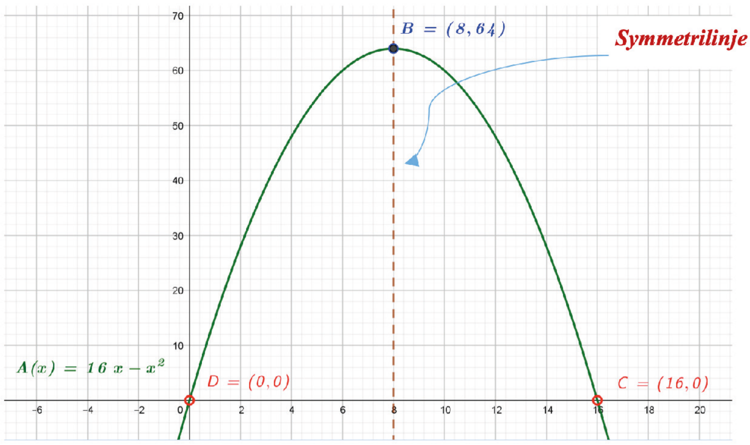
Här använder vi oss av andragradsfunktionen som en matematisk modell och uttrycker funktionen med en symbolisk representationsform. Elever som har viss erfarenhet av andragradsfunktioner vet att en sådan funktion har ett lokalt maximi- eller minimivärde. Maximivärdet kan bestämmas algebraiskt eller grafiskt, eller med hjälp av derivata.

Algebraisk lösning: Vi använder parabelns symmetrilinje, vilken kommer att passera genom $x=8$ eftersom ekvationen har nollställen i punkterna $(0, 0)$ och $(16, 0)$. Vi får därmed att:

$$x_{max}=(0+16)/2=8 \qquad A(8)=8(16-8)=64$$

Grafisk lösning: Med hjälp av en grafisk lösning, i till exempel Geogebra eller en symbolhanterande grafisk miniräknare, kan vi se att arean minskar när sidornas skillnad ökar. Eftersom funktionens graf är symmetrisk kring maximivärdet är arean på ena hållet avtagande och på andra växande. För $x = 8$ får vi den maximala arean vid $y = 64$.

$$y = A(8) = 8(16 - 8) = 64$$



Lösning med hjälp av derivata: I gymnasiekursen Matematik 3 möter eleverna derivatabegreppet i funktionsläran. Derivata kan användas för att få fram en maximipunkt i en funktion.

Vi använder samma uttryck som tidigare:

$$A(x) = x(16 - x) = 16x - x^2$$

Maximipunkten för denna funktion ges av derivatans nollställe.

$$A'(x) = 16 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \text{ ger } x = 8$$

Lösningsmetoder som brobyggare

Det är en viktig erfarenhet för elever att se att svaret är detsamma oavsett vilken av de fem olika lösningsmetoderna som väljs, att den maximala arean ($64\,m^2$) fås när vi har en kvadrat med sidan 8 meter. En av matematikens egenskaper är att relationer och samband inte ändras om vi byter representationsform eller modellerar på ett annat sätt.

De olika nivåerna av lösningsmetoder som presenterats här bygger på olika representationsformer och stödjer en god insikt i på vilket sätt en funktion kan fungera som en matematisk modell. De olika lösningsmetoderna är brobyggare mellan grundskolans och gymnasieskolans matematik.

Från konkretisering till abstrahering och generalisering

Vi vill alltså föreslå en vidareutveckling av idén med rika problem genom att definiera stenrika problem som rika problem med inbyggda möjligheter till matematisk progression. De tidigare presenterade sju kriterierna för rika problem vill vi därför komplementera med följande kriterium:

- problemet ska erbjuda progression, där det matematiska innehållet blir allt mer avancerat.

Problem som erbjuder progression bygger på resonemang och argumentation, som i sin tur utvecklar elevernas abstraktionsförmåga. Men hjälp av de olika lösningsmetoderna får eleverna delta i en matematisk lärandeprocess, som innehåller konkretisering men leder till abstrahering och generalisering. Om vi börjar med konkreta, lättförståeliga material och representationsformer och successivt abstraherar till generella uttryck och alltmer symboliska representationer kan vi skapa enkla modeller som kan vara applicerbara i nya situationer. Konjugatregeln och polynomfunktioner är exempel på generella matematiska modeller.

Man kan fråga sig varför vi löser ett problem med en eller flera metoder, när vi kan lösa det med enklare och mindre matematiska kunskaper. Det är en befogad fråga. Vi gör det i syfte att inte enbart arbeta med problem som är så smidiga som möjligt att lösa, utan i syfte att ta med våra elever på en abstraheringsresa. Att kunna visa elever enkla färdmedel, som optimering med hjälp av resonemang utifrån en tabell, användning av grafer, konjugatregeln, funktioner och derivatans tilllämpning, är ett sätt att skapa sammanhang i matematiken. Det hjälper eleven att lära sig nya matematiska begrepp och kunskapsområden, på betydligt högre och mer krävande matematisk nivå.

Problemet Jordgubbslandet är ett exempel på ett problem som innehåller matematiska begrepp möjliga att introducera på lågstadiet och som också går att göra mer avancerade, ända upp till gymnasiet. Vi har visat hur problemet bjuder in till användning av olika representationsformer och lämpar sig väl för olika sorters matematisk modellering. Liknande problem kan hjälpa elever att få syn på det som gör problem stenrika – matematiken!

LITTERATUR

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2007). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.* Stockholm: Liber.

Hatami, R. (2008). *Retorisk-resonerande matematik.* Nämnaren 2008:2.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande* (Doktorsavhandling). Institutionen för matematik och matematisk statistik, Umeå universitet.