Stedøy

Arbeid som en matematiker

Problemløsing med bruk av vertikale tavler

Australske universiteter har siden 1970-tallet brukt det de kaller «whiteboarding» (Forrester, Sandison & Denny, 2017). Det innebærer å bruke whiteboardtavler som et verktøy i matematikkundervisningen for å fremme høyere ordens tenking og resonnering i tillegg til samarbeidslæring. Elevene skal stå foran tavlene (som må kunne pusses av) i små grupper og løse matematikkproblemer.

Denne metoden har blitt brukt ved universitetet i Wollongong, Australia for alle første års kalkulusstudenter siden 1992. De har egne whiteboardrom med tavler på alle veggene. Det viser seg å ha stor betydning for studentenes oppførsel, i tillegg til at lærerens rolle og oppførsel endrer seg totalt fra tradisjonell undervisning. Studentene jobber mer, er mer engasjert, utvikler gode samarbeidsevner, studerer hverandres arbeid på tvers av grupper, ber medstudenter om hjelp framfor å spørre læreren og deler idéer og løsninger med hverandre. Studentene trenger ikke lenger vente på hjelp fra læreren. Sagt på en annen måte: De tenker og arbeider som matematikere.

Læreren sto ikke lenger foran i klasserommet og behøvde ikke hele tiden å oppmuntre studenter som ikke kom i gang med arbeidet. Hun kunne se hvordan alle studentene arbeidet, og hvor langt de hadde kommet, og gi innspill til hele klassen eller til enkeltgrupper. Hele klasseromskulturen endret seg radikalt.

Ingvill Merete Stedøy
Matematikksenteret, NTNU
ingvill.m.stedoy@matematikksenteret.no

Liljedahl (2016) har gjort studier av klasser der elevene i ungdomstrinnet og videregående skole har arbeidet på ulike måter. Hans funn viser at når elevene får jobbe på vertikale flater der arbeidet kan viskes ut, vil det gi en svært positiv effekt. Hans forskning viser de samme resultatene som erfaringene fra universitetet i Australia. Det er viktig at læreren beveger seg rundt i klasserommet, så det har ikke noen tydelig front, at pultene står i ulike retninger, skjøvet bort fra veggen, og at oppgavene blir presentert muntlig for elevene. Liljedahl peker også på fordelen av å dele elevene inn i synlig tilfeldige grupper med tre elever i hver gruppe (Liljedahl, 2014).

I 2014 ble 52 elever fra ungdomstrinnet invitert til universitetet for å være med på en «Work like a Mathematician»-dag. De ble undervist av matematikkstudenter på universitetet. To av timene skulle de arbeide i et klasserom med pulter og to i et whiteboardrom. Resultatet var slående, selv om det ble lagt vekt på at aktivitetene i rommet der elevene satt ved pulter, skulle være slike som elever har vurdert som morsomme og engasjerende, mens oppgavene i whiteboardrommet skulle være en ren matematisk problemløsingsoppgave. Elevene og lærerne ga nesten utelukkende positive tilbakemeldinger på at whiteboarding var den beste måten å jobbe på.

De australske forskerne fortsetter å forske på denne måten å undervise matematikk på. Åtte lokale skoler har installert slike rom (Forrester et al, 2017). Resultatene så langt viser at elevenes engasjement øker, og at det fremmer matematisk resonnement og elevfokusert samarbeidslæring. Fordelene ved denne måten å undervise på ser ut til å gjelde for alle lærere og lærerstiler, alle klassetrinn og elever på alle ferdighetsnivåer.

Vertikale tavler i norske klasserom

Høsten 2018 startet ti lærere fra videregående opplæring på lærerspesialiststudiet i matematikk. Jeg underviste disse erfarne lærerne i kurset «Læring og undervisning i matematikk» som gikk over to semestre. Allerede på første samling ble de eksponert for vertikale tavler, i form av at de fikk ukjente problemløsingsoppgaver som de skulle løse i tilfeldig inndelte smågrupper ved vertikale tavler. Erfaringen var utelukkende positiv.

Hele skoleåret anvendte de metoden med egne elever. I tillegg til å bruke vertikale tavler la vi vekt på at det skulle være synlig tilfeldig gruppeinndeling. I sine tekster der de analyserer egen praksis, kommer det fram akkurat de samme positive effektene som forskningen fra Australia viser. Lærerne la vekt på å bruke verktøyet 5 praksiser[1] (Smith & Stein, 2011) og samtaletrekk[2] (Kazemi & Hintz, 2014) i planlegging og gjennomføring av undervisningen. En av lærerne kom med følgende uttalelse: «Elevene mine vil ikke ha hjelp av meg lenger! De vil finne det ut selv, eller spørre en annen gruppe. Min rolle som lærer er radikalt forandret, og elevene arbeider selvstendig, målbevisst og med stor utholdenhet.» Lærerne kunne også fortelle hvordan elevene opplevde øyeblikk der de plutselig forsto en løsning eller en sammenheng, og hvordan dette ga elevene ny tro på egne evner og mer positiv holdning til faget. Dette er helt i tråd med hva Liljedahl (2005) konkluderer med i sin forskning på «the AHA-moment».

Parallelt med at lærerne i kurset gjennomførte denne praksisen i egne klasser, samarbeidet jeg med lærere i ulike videregående skoler, der vi gjennomførte flere undervisningsøkter med vekt på utforsking og problemløsing.

Schoenfeld (1985) identifiserer hvordan fagmatematikere skiller seg fra flinke studenter når de arbeider med problemløsing. Det vises ved måten de jobber seg gjennom problemene på, og hvordan de resonnerer, korrigerer seg selv og tar skisser og uformelle notater underveis i løsningsprosessen.

Studien til Carlson og Bloom (2005) sammenlikner fagmatematikeres tilnærming til et problem med flinke studenters tilnærming. De viser at det som karakteriserte alle matematikerne, var at når de hadde gjennomført beregningene, begynte de straks å validere og sjekke om resultatet kunne være riktig. Underveis reflekterte de over effektiviteten av metodene sine. De stilte seg selv spørsmål som «Får denne metoden meg nærmere en løsning?» og «Hva sier dette meg?». Denne selvsjekken, og viljen til å legge en metode til side og gå i gang på nytt var ikke karakteristisk for studentenes måte å arbeide på. For at elever skal lære seg å arbeide som matematikere, blir lærerens rolle viktig. Læreren må være villig til å gi elevene tid, uten å blande seg inn, men samtidig oppmuntre til utholdenhet og gi støtte og kanskje hint hvis elevene er i ferd med å gi opp. I stedet for å svare ja eller nei når de spør læreren om de har fått riktig svar, må læreren heller spørre tilbake hvordan de selv kan vurdere om svaret kan være riktig.

Jeg skal beskrive og analysere elevers arbeid med en problemløsingsoppgave. Med problemløsingsoppgave mener jeg her at det ikke er noen opplagt metode elevene bør velge for å løse oppgavene, de har ikke sett en liknende oppgave før.

Oppgaven kan videre karakteriseres som en LIST-oppgave (Lav inngangsterskel, stor takhøyde). Oppgaven skal være lett å komme i gang med, alle kan komme fram til svar eller delsvar, og oppgaven kan utvides eller generaliseres.[3]

Kalle Kanin

Oppgaven er hentet fra nettsiden Youcubed, utviklet ved Stanford Graduate School of Education.[4]

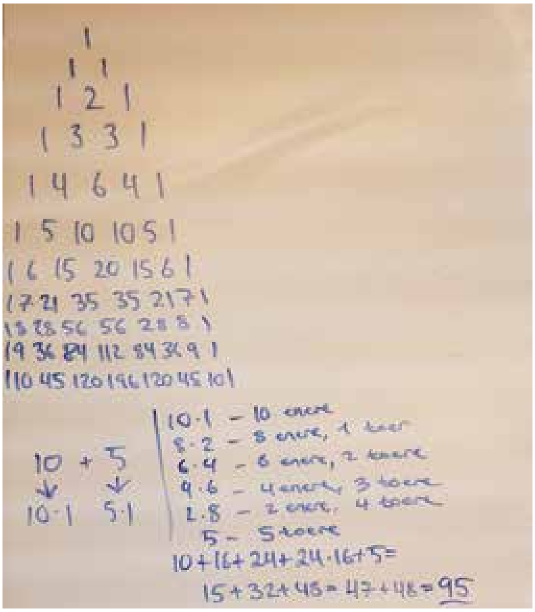
> Kalle Kanin skal hoppe opp ei trapp med 10 trinn. Han starter på bunnen og kan hoppe enten ett eller to trinn om gangen. Han hopper ikke nedover igjen.
>
> På hvor mange måter kan Kalle hoppe for å komme til toppen av trappa?

Oppgaven er brukt i flere klasser både i grunnskolen og i videregående skole. Her vil jeg presentere og analysere arbeidet med og løsningene til to matematikkgrupper, den ene en S1-gruppe og den andre en 2PY-gruppe. Elevene i begge gruppene ble delt inn i tilfeldige treergrupper som arbeidet på vertikale tavler.

Jeg har både observert og undervist samme oppgave i 1P og 1T. Den største forskjellen i valg av metoder var at disse gruppene ikke hadde blitt introdusert for kombinatoriske problem der binomialkoeffisienter var introdusert. Disse gruppene hadde bare erfaring med ulike måter med systematisk opptelling. Noen av gruppene i S1 og 2PY brukte slike metoder, så de vil også bli presentert nedenfor. Det skal også nevnes at samme problem har blitt brukt av kolleger på Matematikksenteret, både på 2. trinn og 6. trinn i grunnskolen med stort hell.[5]

Jeg var deltagende observatør i S1-gruppene og lærer i 2PY-gruppa. Begge gruppene hadde nettopp jobbet med kombinatorikk, binomialkoeffisienter og Pascals talltrekant.

Tavla til den første gruppa jeg vil kommentere, figur 1, viser at elevene har tenkt at dette er kombinatorikk, og det har de nettopp holdt på med. De prøver å lete etter et verktøy de kjenner fra før, og satser på at Pascals talltrekant kan hjelpe dem. Dette er ganske typisk for elever

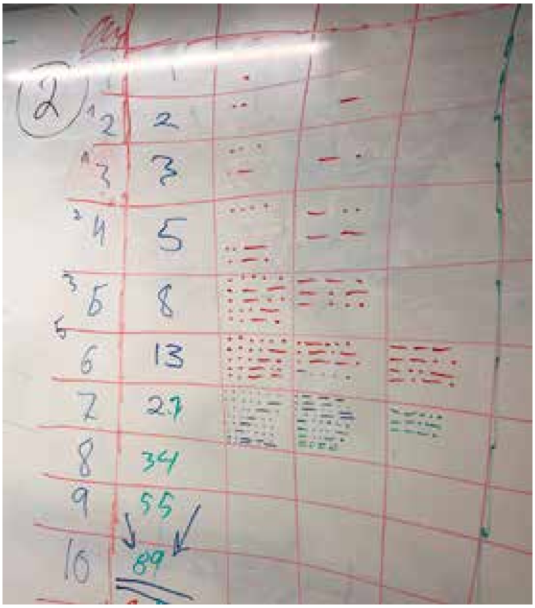


Figur 1: Elever tenker kombinatorikk.

som er vant til løse oppgaver ved å hente fram formler og metoder de kjenner fra før. De har ikke utviklet godt nok evnen til å møte nye problemer uten å tro de skal kunne bruke en kjent metode. Men de finner ikke hjelp i Pascals talltrekant. Denne gruppa gir ikke opp, men starter med en annen metode, nemlig å kombinere opplysningene i oppgaven og deretter litt logisk resonnement, for så å «gjøre noe med tallene» som gir et ganske troverdig resultat.

Denne gruppa er ikke i stand til å begrunne, forklare eller bevise hvorfor dette skulle gi et riktig resultat. Det som gjør at de slår seg til ro med resultatet sitt, er nok at de faktisk vurderer svaret til å gi mening. Det de har tatt utgangspunkt i for å finne noen tall de kan sette sammen, er at Kalle kan ha de ulike kombinasjonene av enkelthopp og dobbelthopp som de har skrevet opp nederst til høyre på tavla si. Dette er helt riktig resonnert, men de har ikke sett hvordan de skal bruke dette til å finne alle kombinasjonene.

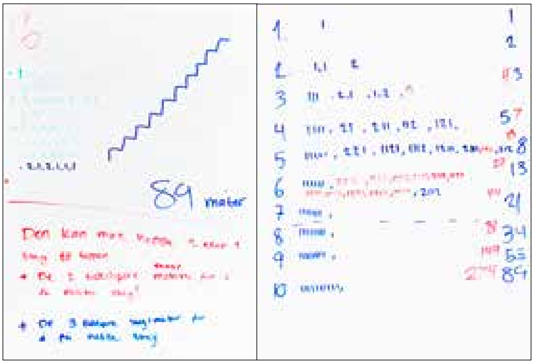
Elevene viser til en viss grad at de er gode problemløsere, i og med at de både er utholdende, prøver en ny metode når den første ikke fungerer, og når de har kommet fram til et svar, vurderer de om svaret virker rimelig og fornuftig. Det de ikke har stilt krav til seg selv om, er at løsningen må kunne begrunnes, forklares eller bevises ut fra faglige og logisk gyldige forklaringsmodeller. Derfor er de fornøyd med løsningen sin. De andre elevene og eventuelt læreren kan prøve å få dem til å innse hvorfor løsningen deres ikke blir riktig. En slik innsikt vil kunne få disse elevene til å bli mer opptatt av å begrunne hvorfor eller hvorfor ikke en metode og en løsning kan være rett eller feil.



Figur 2: Elever søker etter mønster.

Den neste gruppa jeg vil presentere, figur 2, prøvde først å bruke binomialkoeffisienter, men de fant ikke ut av det. Etter litt diskusjon og en prat med ei annen gruppe fant de ut at de ville bruke metoden «Se på et enklere problem» og undersøke om det ville dukke opp et mønster.

De lagde en stor tabell, der kolonnen til venstre står for antall trinn Kalle har hoppet, den neste er antall måter han kan komme til toppen på, og systemet med prikker og linjer, er en notasjon for enkle og doble hopp, og hvordan de kan kombineres for å få riktig antall trinn. Da de hadde kommet til 6 trinn i trappa, hadde de lagd en hypotese som gjorde at de forventet 13 muligheter. De kjente ikke Fibonacci-tallene, men de så at ved å utvide med ett trinn ville antall muligheter bli summen av de to foregående. Etter å ha listet opp alle mulighetene de kunne finne, sto det 12 i kolonne to. Dette var de ikke glade for, og begynte å lete etter om de kunne ha oversett en mulighet. Alternativet var å forkaste hypotesen sin. Plutselig så de at de hadde oversett muligheten de har skrevet med blått, nemlig et dobbelthopp først, og så fire enkelthopp. Dermed var de ganske overbevist. De sjekket for 7 trinn, fant 27 muligheter, og deretter fylte de ut resten av tabellen. Løsningen var 89 muligheter. Jeg utfordret dem på å bevise eller argumentere for hvorfor dette var riktig. Det fikk de først forståelsen for når ei annen gruppe som hadde brukt samme metode, kom med sin forklaring. Jeg tar ikke med den gruppas tavle, men kommenterer heller en helt tilsvarende tavle og helt tilsvarende argumentasjon som en av gruppene i 2P presenterte.



Figur 3: På tavlen til venstre står elevene fast. Til høyre har elevene fått tips om å prøve ett trinn om gangen.

Tavlene i figur 3 tilhører ei gruppe bestående av tre jenter fra 2P. De hadde egentlig gitt opp fordi de prøvde å sette opp alle mulige kombinasjoner for Kalles hopp i trappa med ti trinn. Det ble så uoversiktlig og usystematisk at de sluttet å prøve, og sto egentlig bare og så på de andre. Jeg tenkte at denne gruppa ville lære mye av å få et tips som ga dem ny motivasjon til å prøve videre. De fikk et tips om å prøve med ett trinn, to trinn, tre trinn og så videre i trappa. Gruppa gikk i gang med stor iver. Resultatet av arbeidet deres er tavla i figur 3. Dette er helt i tråd med Liljedahls forskning:

> *Elevenes engasjement bør stimuleres og opprettholdes ved hjelp av lærerens kloke og timede bruk av hint og utvidelser* (Liljedahl, 2018, s. 312, min oversettelse).

Den røde teksten hører sammen med de blå tallene, og omvendt, bortsett fra på 6. trinn hvor de har skrevet litt med rødt og litt med blått. Opptellingen med blått hører til den opprinnelige oppgaven, der Kalle kan hoppe ett eller to trinn om gangen.

Da jentene kom til 6. trinn, var de overbevist om at det var 13 muligheter. De så mønsteret i Fibonacci-følgen (som de ikke hadde hørt om), og skrev opp tallene til og med 10. trinn. De har skrevet opp algoritmen med ord til venstre.

På spørsmål om hvorfor det ble sånn, og om de var sikre, svarte de etter litt snakking seg imellom at for å komme til trinn 6, måtte Kalle enten ha kommet til trinn 4 eller 5, så antall muligheter til trinn 6 måtte bli summen av mulighetene til trinn 4 og 5. Da kunne de veldig lett se at for å finne mulighetene til å komme på ett bestemt trinn måtte de summere mulighetene for å komme på hvert av de to foregående trinnene.

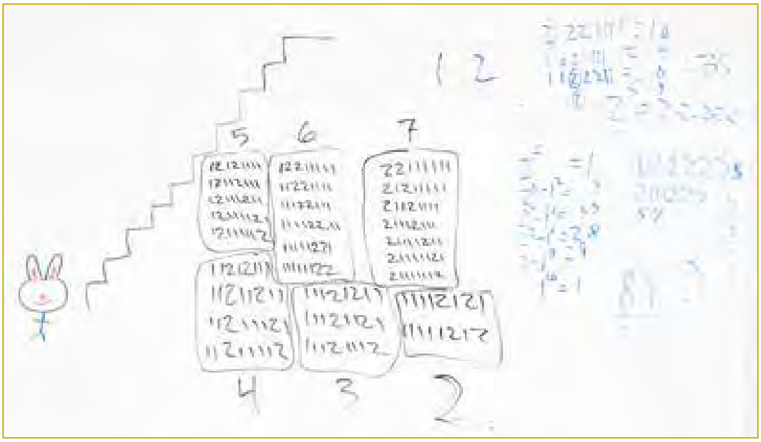
Nå var de klare for nye utfordringer og fikk en utvidelse av oppgaven. Hva hvis Kalle også klarer å hoppe tre trinn om gangen?

Jentene løste fort denne utfordringen. De satte opp første mulighet for et tretrinnshopp på trapp med 3 trinn, og deretter var det bare å fylle på. De var helt sikre på at det var 274 måter å komme til toppen av titrinnstrappa med enkle, doble eller triple hopp. Da de forklarte dette til klassen, var alle enige om at dette måtte være riktig, og alle forsto hvorfor.

Gruppa på den siste tavla jeg har tatt med, figur 4, har introdusert en spesiell notasjon til høyre på tavla. De startet med å liste opp hvor mange doble og enkle hopp Kalle kunne ta for å komme til toppen av trappa med 10 trinn. De skriver:

$$2^5 = 1$$
$$2^4 - 1^2 = 15$$
$$2^3 - 1^4 =$$
$$2^2 - 1^6 =$$
$$2 - 1^8 = 9$$
$$1^{10} = 1$$

Når de skulle forklare hva de mente, sa de at eksponentene viste hvor mange toerhopp og enerhopp Kalle kunne bruke. Minustegnet var bare en «tankestrek». Etter likhetstegnet står antall muligheter. Da ei annen gruppe kommenterte at den skrivemåten egentlig betydde noe helt annet, syntes de ikke at det gjorde noe, bare



Figur 4: Elever utvikler egen notasjon

de forklarte hva de selv mente. De fylte raskt ut tallene 1, 15, 9 og 1. Så ser vi på tavla deres at de har listet opp mulighetene når det er to doble og seks enkle hopp. Ved å sammenlikne med ei annen gruppe innså de at de hadde mistet én mulighet, og skrev inn 28, uten at de fant ut hvilken de hadde mistet. Glippen i systemet deres har skjedd i den siste innrammede kombinasjonsrekka, der de har den første 2-eren på plass 5 i første rad, og så på 6. plass i andre rad. Dermed har de mistet muligheten 11112112 med sin notasjon.

De strevde også med å dokumentere at det var 35 muligheter med tre doble og fire enkle hopp. Da jentene med tavlene i figur 3 forklarte hvorfor det var 89 totalt, regnet de ut at tallet de manglet, måtte være 35.De innså også at deres metode med opplisting fungerte, men at de ikke hadde kommet fram til et enkelt mønster som de kunne bruke.

Gruppa var svært utholdende og benyttet seg av å gå til andre grupper for å få idéer når de sto fast selv, slik Liljedahl også beskriver det i sin forskning.

Oppsummering

Gjennomføringen av undervisningsopplegget karakteriseres ved at klassene er organisert i synlig tilfeldige grupper. Elevene samarbeider om å løse et problem som er ukjente for dem, og de blir oppmuntret til å søke råd hos andre grupper hvis de står fast.

Elevene var utholdende og jobbet så lenge læreren ikke avbrøt for felles oppsummering. Elevene tok i bruk ulike relevante problemløsingsstrategier og forkastet metoder som ikke fungerte, for så å gå i gang på nytt.

Jeg vil peke på noen momenter som skiller elevenes adferd fra den adferden jeg har observert i klasser der elevene sitter ved gruppebord. Når de får oppgaven muntlig, er de veldig konsentrert og noterer straks viktige opplysninger eller lager en figur. Det er påfallende hvordan alle elevene i gruppa deltar i løsningsprosessen, og gruppene diskuterer ivrig både løsningsstrategier og om de er på rett vei. Alle skriver på tavlene etter hvert som idéer dukker opp. Elevene tør å ta sjanser, og når problemet er ukjent for alle, er det nesten ikke mulig å skille elevenes faglige nivå før de er langt ut i løsningsprosessen.

Det skjer også en annen ting som er viktig å merke seg, nemlig at gruppene søker råd hos hverandre. Dette kan forklares med at det er lettere å bevege seg rundt til de andre gruppene, men også at elevene bare kan snu seg rundt og se de andre elevenes tavler. Da kan de vurdere om de tror det er noe å hente ved å spørre andre grupper.

Når elevene underveis i løsningsprosessen har fått litt innblikk i de andre gruppenes arbeid, virker det som de får mer utbytte av presentasjonene til slutt i undervisningsøkta.

Læreren har valgt ut rekkefølge på gruppenes presentasjoner, slik at det faglige utbyttet skal bli best mulig for alle elevene. Elevene ble i denne fasen flinkere til å stille spørsmål til de andre gruppene for å oppklare hva de mente, og forstå logikken bak de ulike gruppenes metoder.

Disse eksemplene bekrefter resultatene i Liljedahls forskning (2018, 2016 og 2014) og viser at enkle organisatoriske grep kan gjøre en stor forskjell både på motivasjon, utholdenhet, samarbeidsklima og problemløsningsevner hos elevene.

Noter

1 Forvente, observere, velge, bestemme rekkefølge, se sammenhenger

2 Gjenta («så du sier at …»), repetere («Kan du gjenta det han sa med egne ord …»), resonnere («Er du enig eller uenig, hvorfor? Hvorfor gir dette mening?»), tilføye («Har noen noe de vil tilføye?»), vente («Ta den tiden du trenger. Vi venter.» Telle til 10 inni seg), snu og snakk («Snu og snakk med medeleven din»), endre («Har noen av dere forandret tenkingen deres?»)

3 https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling-i-skolen/elever-med-stort-læringspotensial/om-list-oppgaver

4 https://www.youcubed.org/tasks/leo-the-rabbit/

5 Dette er delvis dokumentert på flere videoklipp på Realfagsløyper, http://realfagsloyper.no/barnetrinn/vurdering-og-tilpasset-opplaering/modul-3m-vurdering-i-matematikk-smatrinn#samarbeid, og tilsvarende for ungdomstrinn – videregående skole.

Referanser

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 45–75.

Forrester, T., Sandison, C. E. & Denny, S. (2017). Vertical whiteboarding: Riding the wave of student activity in a mathematics classroom. *Australian Mathematics Teacher, 73*(4), 3–8.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland, Oregon: Stenhouse Publishers.

Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2–3), 219–234.

Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visibly random groups in a mathematics classroom. I Y. Li, E. Silver & S. Li (red.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (s. 127–144). New York: Springer.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. I P. Felmer, J. Kilpatrick & E. Pekhonen (red.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (s. 361–386). New York: Springer.

Liljedahl P. (2018) Building thinking classrooms. I A. Kajander, J. Holm & E. Chernoff (red.), *Teaching and learning secondary school mathematics. Advances in mathematics education* (s. 307–316). Springer International Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.