För allt smör i Småland

Jakob Törefors

I denna sammanfattning av ett examensarbete prövas otraditionella problemtyper för att utveckla elevers tänkande, taluppfattning och problemlösning.

Att enbart läsa kurslitteratur under universitetsstudierna kan bli enahanda för att inte säga tråkigt. Under mina ämnesstudier har jag försökt att även läsa ”populärframställningar”. Förutom det rent nöjsamma har jag fått idéer om hur man skulle kunna undervisa kring vissa fenomen på ett annorlunda eller roligt sätt. Denna artikel handlar om hur en sådan idé växte fram och utvecklades i samband med mitt examensarbete.

Innan examensarbetet skulle ta sin början läste jag en bok av Hans-Uno Bengtsson (1996) där han bl a berättar att Nobelpristagaren i fysik 1938, Enrico Fermi, påstod att *”en teoretisk fysiker borde kunna räkna ut vad som helst, på en tiopotens när”* (s 175). Vid ett tillfälle exemplifierade han detta genom att räkna ut antalet pianostämmare i Chicago med hjälp av djärva antaganden. Bengtsson tar efter detta mönster och visar att överslagsräkning är att räkna med, om man bara är lite ”fräck” i sina antaganden.

När jag läste detta slogs jag av tanken att inte är det väl förbehållet teoretiska fysiker att räkna på det här sättet? Varför skulle inte elever i gymnasiet klara av att göra liknande överslag? Ju mer jag funderade på det ju mer kände jag att detta var intressant. Att uppskatta och göra överslag kräver ett helhetstänkande där bedömning av resonemang och resultat blir väldigt viktigt. Bristen på *ett* korrekt svar och överslagsräkningens karaktär av ”vardagsmatematik” kändes också attraktivt. Frågor jag ställde mig var:

– Vilka svårigheter har elever med överslag?
– Tycker de att det är intressant och roligt?
– Är överslagsräkning användbart för att vidga elevers matematiska vyer och gynna kommunikation om matematik?

I det här läget började jag tycka att det var på sin plats att försöka förstå vad det här egentligen handlar om och reda ut om den relativt vaga idén jag hade skulle kunna hålla för ett examensarbete.

En frågeställning tar form

Den första fråga man ställer sig är om någon har berört ämnet förut och om det finns något skrivet om det. I NCTM´s årsbok (Schoen, 1986, s 175-181) hittade jag ett kapitel som behandlar just den typ av problem som Bengtsson tar upp. Problemtypen kallas för *Fermiproblem* eller ”hur man får ut mesta möjliga av det man redan vet”. Där ges också några exempel och beskrivningar av resonemang kring dessa. Jag insåg att om jag skulle kunna komma vidare med min idé och göra en undersökning skulle jag behöva någon slags definition eller karakterisering av vad Fermiproblem är. Eftersom jag hade hittat få exempel blev det dessutom nödvändigt att konstruera fler sådana. Samtidigt som jag funderade på vad som kännetecknar ett Fermiproblem formulerade jag problem i denna ”anda”.

De mest specifika egenskaperna hos Fermiproblem, som jag ser det, är:

***Jakob Törefors** är nyutexaminerad gymnasielärare i matematik och fysik och arbetar på LM Engströms gymnasium, Göteborg. Teckningar av **Åsa Jansson**.*

– Problemen är *öppna*, d v s val av modeller och strategier är helt fritt.

– *Storhetsuppskattningar* är nödvändiga.

– Man ska bara använda sig av *sådant man redan vet*.

– Svaret är i praktiken omöjligt, eller mycket svårt att *kontrollera*.

Efter några försök och efter diskussioner med min handledare kom jag fram till följande frågeställning för examensarbetet:

– Vad finns det för svårigheter och möjligheter med Fermiproblem i gymnasieskolans matematikundervisning?

Det jag ville beskriva var *hur* den karakteriserade problemtypen skulle användas, *om* den kan användas, *när* den ska användas och hur den *uppfattas* av lärare och elever. Den ursprungliga idén hade nu fått en betydligt fastare form så nästa steg blev att försöka besvara frågeställningen.

Fermiproblemens potential

Att i ett 10 p examensarbete ge sitt problemområde en solid teoretisk grund är knappast möjligt och jag inriktade mig istället på att ta upp några få begrepp som hade relevans för min frågeställning. Jag frågade mig vad som kännetecknar ”god” matematikundervisning och vilka av Fermiproblemens egenskaper som stöttar sådan? Jag försökte utröna problemens potential.

Efter att ha studerat bl a Björkqvist (1993), Alseth (1995), Lester (1996), Wistedt (1993) och den artikelserie om taluppfattning som publicerades i Nämnaren årgång 22 och 23 (Reys m fl, 1995 a,b,c, 1996), kunde jag urskilja några aspekter som viktiga i ”god” matematikundervisning. *Problemlösning* kan användas för att stimulera reflektion över eget tänkande och utveckling av olika strategier. God taluppfattning kan stödjas av aktiviteter som *huvudräkning*, *överslag* och *uppskattningar*.

En del av detta tyckte jag mig kunna se hos Fermiproblemen:

Exempel på Fermiproblem

- Hur mycket blod pumpar hjärtat under ett helt liv?
- Hur mycket damm produceras i Sverige per år?
- Hur många kameler (eller människor) går in i Scandinavium, om man packar väl?
- Hur mycket äter en person under sin livs tid?
- Hur lång tid tar det att räkna till en miljon?
- Efter hur lång tid har syret i klassrummet förbrukats?
- Hur mycket tvål spolas ner en dag i Sverige?
- Vad är allt smör i Småland egentligen värt?
- Hur långt går man under en livstid?
- Hur tjockt är ett blyertsstreck?
- Hur mycket vatten flyter ut i havet från Göta älv under ett år?
- Hur mycket ”avslitet” däckgummi hamnar på svenska vägar varje år?
- Hur många ord läser du varje vecka?

- Problemens *öppenhet* gör att eleverna får tillfälle att använda eller inventera sina olika strategier eller eventuellt konstruera nya.

- Nödvändigheten att göra *uppskattningar* har att göra med den aspekt av taluppfattning som handlar om referenspunkter men utmanar även andra taluppfattningsaspekter beroende på kontext.

- Att använda sig av *sådant man redan vet* är en av konstruktivismens grundhypoteser.

- Problemens egenskap att ha *svårkontrollerade resultat* gör att den i princip enda möjligheten att bedöma svarets rimlighet (en del i problemlösningsprocessen) är att granska antaganden, uppskattningar, uträkningar, modeller och värderingar. Denna egenskap, inbjuder till diskussion kring lösning och resultat.

När det gäller Fermiproblemens karaktär i förhållande till gymnasieskolans kursplan i matematik anser jag att det finns ytterligare skäl att intressera sig för sådana. Ett kort utdrag ur kursplanen får tjäna som illustration för detta.

Väsentligt är att eleverna lär sig förstå och föra matematiska resonemang, skapa och använda matematiska modeller och kritiskt granska deras förutsättningar, möjligheter och begränsningar samt att lära sig redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt.

Undersökningen

Det är en sak att Fermiproblem verkar bra ur teoretisk synvinkel, en helt annan hur de ter sig i en klassrumssituation. För att besvara frågeställningen genomförde jag därför en undersökning i samband med min slutpraktik, för att få en så informationsrik bild som möjligt av hur problemen fungerar och uppfattas av både lärare och elever. Detta realiserades mha en *undersökningsprocess* där min praktikhandledare, jag själv och elever i de klasser jag övningsundervisade ingick.

1 Med min praktikhandledare diskuterade jag problemfokusering, frågeställning och några exempel.

2 Test av ett problem i en klass. Eleverna delades in i grupper och fick ett problem på papper. De uppmanades att lösa det under 5-10 min. Efteråt diskuterades elevernas lösningar i hela klassen. Min praktikhandledare och jag observerade händelseförlopp och reaktioner.

3 Intervju/samtal med praktikhandledaren efter lektionerna (bandades).

4 Sammanställning av testresultat, observationer och intervju (ordagrann utskrift). Förändringar i presentation osv.

Jag genomförde fem test med fem olika Fermiproblem och dessutom intervjuade jag sex elever (två från varje klass). Till sist gjordes en strukturerad och relativt omfattande intervju med min praktikhandledare. Undersökningen var ett försök att se Fermiproblem i relation till dels ett lärarperspektiv och dels till hur elever reagerar på och upplever specifika problem. Väldigt mycket hände under undersökningens gång. Jag väljer här att exemplifiera detta med korta beskrivningar av två test.

En massa mat

Det första testet genomfördes i en relativt stökig men trevlig ”etta” med både naturvetare och samhällsvetare. Jag presenterade mitt examensarbete, formerade eleverna i mindre grupper (2–5 personer) samtidigt som jag delade ut följande problem:

- *Hur mycket äter en människa under sin livstid?*

Många aktivierade sig väldigt snabbt, trots att osäkerheten över vad de egentligen skulle göra var stor. Exempel på frågor och reaktioner var: ”Ska vi räkna ut i kg”, ”Alla kommer ju få olika svar”, ”Det beror på livsstil”, ”Vad är medellivslängden”, ”Detta måste vara orimligt”. Både praktikhandledaren och jag försökte låta bli att besvara frågor. Istället uppmanade vi eleverna att gissa, uppskatta och tro på egna idéer och tankar.

Sex av åtta grupper lyckades få fram ett svar. Mängden mat en människa sätter i sig ligger enligt dessa mellan 35 och 105 ton, där livslängder varierade från 65 till 80 år. Samtliga grupper använde samma lösningsstrategi, att uppskatta matintaget per dygn och multiplicera med livslängden. En av grupperna fick avslutningsvis berätta hur de hade resonerat och räknat. Flera elever ville också veta vad det egentligen skulle bli!

När min praktikhandledare och jag samtalade efter testet tyckte vi båda att elevernas engagemang var förvånansvärt stort. Även deras osäkerhet var påtaglig, min praktikhandledare sa att ”*en del trodde nog att det var en slags intelligenstest av dem*”. Det var tydligt att gruppsammansättningen har stor betydelse. Någon grupp ”grävde ner sig” i detaljer och hann därför inte få fram något svar. Problemet var förmodligen ganska enkelt och inbjöd inte direkt till olika lösningsstrategier. Eleverna verkade dock uppriktigt förvånade över att det överhuvudtaget gick att lösa.

Intervju med Maria

Maria (fingerat namn) blev utsatt för problemet ovan. Intervjun med henne är här något avkortad.

– *Vad tyckte du om problemet?*

– Lite konstigt, men kul. Det var ju inte daglig kalkyl precis!
– Så du räknar inte på det här sättet själv?
– Nej, kanske liknande någon gång. När jag rider måste man ibland räkna på foder, ganska komplicerat, men går bra eftersom jag kan se resultatet. Hade aldrig gått i skolan!
– Var det jobbigt att ett exakt svar saknades?
– Ja, det var synd för då vet man inte om man har rätt eller fel!
– Vad behöver man kunna för att lösa ett sådant här problem?
– Mått, vikt. Ganska allmänbildad, multiplikationstabellen kanske. Man är lagda åt olika håll, en del har läshuvud medan vissa är mer logiska!
– Tror du att man kan ha nytta av att kunna räkna på det här sättet?
– Stor nytta, man lär sig tänka även om problemen inte är så realistiska.

En massa människor

Det andra testet genomfördes i en halvklass med naturvetare åk 3, på liknande sätt som det första testet. Jag lät eleverna ”sätta tänderna i” i följande problem:

- Hur många människor får plats i Scandinavium, om man packar väl?

Några reflektioner : ”Om de ligger som packade sillar....”, ”Behöver de vara levande”, ”Vad är en människas volym”, ”Publikrekordet är ju.....”, ”Så många får man inte ta in”. De två grupper (av fyra) som hann få ett slutresultat hade båda räknat ut totala volymen av Scandinavium och volymen av en människa. Den ena gruppen approximerade Scandinavium med ett rätblock och den andra gruppen med en ”oregelbunden” cylinder som de lät bli en regelbunden cylinder. De räknade med att en människa upptar en volym på 1 respektive 0,7 m^3 vilket gav resultaten 900 000 och 280 000 människor (eller lik!). De två andra grupperna var nog av deras sporadiska anteckningar att döma på väg att räkna på area istället för volym. De angrep problemet med att skissa och räkna på en mängd delytor vilket gjorde att de aldrig hann färdigt.

Även det här testet präglades av stor osäkerhet, men också av engagemang och intresse för problemet. Problemet visade sig kunna lösas mha olika strategier men kanske borde de fått längre tid på sig så att alla fyra grupperna skulle ha hunnit färdigt.

Intervju med Eva

Eva (fingerat namn) var med i en av de grupper som inte hann få fram något resultat. Intervjun är här avkortad.

– Gillade du problemet?
– Lite konstigt att inte få några siffror. Annorlunda och skojigt men jag undrade nog lite vad du ville att vi skulle göra!
– Har du stött på något liknande förut?
– Nej, det är klart att man gör uppskattningar ibland. Packa väskor eller räkna ut hur lång tid det tar att cykla, men annars räknar jag aldrig så här.
– Vad var svårt?
– Att inte få några siffror och att göra antaganden. Själva räkningen var däremot inte så svårt.
– Var det jobbigt att det saknades ett exakt svar?
– Nej, bara man vet vad som är rimligt. Man tror att det finns ett exakt svar för det är man ju van vid, i skolan i alla fall!
– Vad för slags kunskap tror du krävs för att lösa den här typen av problem?
– Man måste kunna uppskatta avstånd och kunna räkna på t ex volymer. Man måste ha lätt för att tänka själv och kanske våga chansa!
– Tror du att man kan ha nytta av att kunna räkna på det här sättet?
– Ja, åtminstone i vissa yrken, t ex byggnadsingenjör.

Handledarintervjun

Efter att ha testat en rad Fermiproblem i olika klasser tillsammans med min praktikhandledare försökte jag bilda mig en uppfattning om vad han ansåg om problemen. Jag tar här upp några av de reflektioner som kom upp under intervjun.

Om Fermiproblemens användbarhet sa min praktikhandledare *”jag tycker de är användbara för att få eleverna att göra någonting på egen hand, för det mesta matar man ju dem med siffror*”. I relation till kursplanens mål tyckte han att problemen var bra, *”kanske många gånger bättre än de problem man har i läroböcker*”. Ett problem bör vara realistiskt och får gärna knyta an till samhällsproblem eller till elevernas egna verkligheter. Han sa *”frågan måste uppkomma i något sammanhang, den uppkommer ju inte lösryckt på ett papper till dig”*. Några möjligheter som han såg hos Fermiproblem var att de skulle kunna användas för att motivera t ex tiopotensräkning, enhetsomvandling och avrundning. Det krävs mycket för att lösa ett Fermiproblem, kanske inte minst mod att våga uppskatta och att formulera frågor för att klargöra problemets gränser. Min handledare var förvånad över att de problem vi testat hade engagerat eleverna så starkt och att skillnader i problemlösning mellan de olika klasserna var små trots stora skillnader i t ex elevernas matematikkunskaper och ålder (Törefors, 1998).

Några funderingar

Det omfattande materialet från undersökningen analyserades för att i möjligaste mån besvara min frågeställning. Jag drog slutsatser i form av svårigheter respektive möjligheter med Fermiproblem.

Eleverna hade svårt att uppskatta och göra antaganden. Trots stor osäkerhet blev de flesta eleverna väldigt engagerade och det gav upphov till mycket diskussion och kommunikation. Att uppskatta och att välja strategier ger sätt att utveckla elevers kunnande i taluppfattning, problemlösning och att stimulera till att reflektera över egna kunskaper. Fermiproblem är annorlunda i sig och ger dessutom variation i arbetsformer, t ex i grupparbete och huvudräkning. Jag anser att möjligheterna överträffar svårigheterna och att Fermiproblemen har en god didaktisk potential. En svårighet med Fermiproblem är att se till att aktiviteterna hänger ihop med övrig undervisning.

Ett viktigt perspektiv på problemens användbarhet kunde jag av praktiska skäl inte beakta i min undersökning, nämligen vad som händer i tiden. Problemlösning i allmänhet tar lång tid att lära sig och inbegriper många olika aspekter.

Vad för slags kunskap kan Fermiproblemen resultera i och är de i så fall effektiva på att utveckla den kunskapen? Något annat man kan fråga sig är hur man kan utvärdera och kanske sätta betyg på sådana kunskaper. Här finns utrymme för många och goda idéer. Jag tror att det är möjligt att utveckla problemtypen på många sätt. Utmaningen ligger i att hitta eller utveckla nya varianter, både vad det gäller innehåll och sammanhang, som gör att Fermiproblem kan användas kreativt utmanande i skolan.

Referenser

Alseth, B. (1995). Undervisning i problemlösningsstrategier. *NOMAD 3(3)*, 7-26.

Bengtsson, H-U. (1996). *Fysik för fem sinnen*. Västerås: ICA Förlaget.

Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *NOMAD 1(1)*, 8-17.

Emanuelsson m fl (red). (1995). *Matematik – ett kärnämne*. Nämnaren TEMA.

Emanuelsson m fl (red). (1996). *Matematik – ett kommunikationsämne*. Nämnaren TEMA.

Reys, B., Reys, R., m fl (1995a). Vad är god taluppfattning? *Nämnaren 22(2)*.

Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995b). Meningsfulla tal. *Nämnaren 22(4)*, 8-12.

Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1996). Uppskattning av överslag. *Nämnaren 23(1)*, 21-25.

Schoen, H. L. (ed) (1986). *Estimation and mental computation – 1986 Yearbook*. NCTM.

Törefors, J. (1997). *Fermiproblem. Är ovanliga problem omöjliga?* Examensarbete gymnasielärarutbildningen, Göteborgs universitet.

Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *NOMAD 1(1)*, 40-54.