



Addition med bråk på tallinjen

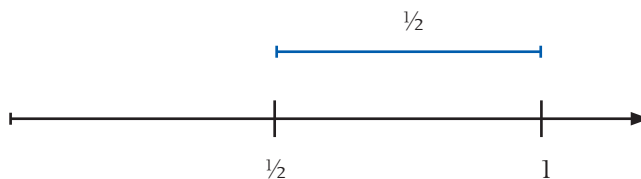
I sin tredje artikel om tallinjen beskriver författarna hur den används för att utveckla elevers förståelse för addition med oliknämniga bråk. Det beskrivna arbetet pågick under en lektion i årskurs 5 och utgick från projekt *Reflekterande och matematiserande barn*, ROMB. Lektionen planerades av författarna och genomfördes av Britt Holmberg som är artikelns 'jag'.

Bråkräkning uppfattas av många elever som svårt, särskilt vid beräkningar där bråken har olika nämnare. Det är ofta en bristande förståelse för bråkens storlek och för ekvivalenta bråk som ställer till det för dem när de behöver använda en gemensam nämnare. Många elever lär sig använda multiplikation av både täljare och nämnare för att få fram en gemensam nämnare. Om de bara lär sig hur "man gör" är risken att det blir en procedur utan grundläggande förståelse för den underliggande innebörden i ekvivalenta bråk och gemensam nämnare.

I det arbete med bråk på tallinjen som beskrivs här har inspiration hämtats från två olika håll: dels från University of California, Berkley: *Learning mathematics through representations*, LMR och dels bokserien *Context for learning mathematics* som är ett material utarbetat vid Mathematics in the city i New York.

Lektion i årskurs 5

Att arbeta med tallinjen som modell ger elever ett kraftfullt verktyg som kan underlätta förståelsen för tal, i detta sammanhang förståelse för rationella tal och betydelsen av att ha gemensam nämnare vid addition av bråk. När bråk på tallinjen introduceras är det en fördel om eleverna har arbetat med tallinjen tidigare och känner till modellens egenskaper. Eleverna behöver upptäcka att det på tallinjen finns både punkter och avstånd. Rationella tal på tallinjen är alltid relaterade till enhetssträckan, det vill säga avståndet från punkten 0 till punkten 1. "En halv" kan på tallinjen representeras både som en punkt och som ett avstånd. *Punkten* $1/2$ finns endast på ett ställe, nämligen mitt emellan 0 och 1. *Avståndet* $1/2$ finns däremot överallt på tallinjen där du kan markera en sträcka som är precis halva avståndet av enhetssträckan.



Lektionen hölls i en klass som tidigare hade arbetat med addition, subtraktion av heltal och decimaltal på tallinjen och som precis påbörjat arbetet med bråk och procent. Det var första gången eleverna mötte addition av oliknämniga bråk. Eleverna fick en serie väl utvalda uppgifter, med ökande svårighetsgrad. Uppgifterna utgör en så kallad *Number string* som är hämtade ur lärarhandledningen till *Contexts for learning mathematics*. Under lektionen använde vi den tomma tallinjen. På tavlan ritade jag en linje utan linjal och utan fasta punkter. Det var en fördel att inte använda en fast tallinje där markeringar och tal redan var utsatta eftersom fokus skulle vara utforskande av bråkens delar och då var det eleverna som satte ut de delar som behövdes för beräkningarna. De uppgifter eleverna fick arbeta med i tur och ordning visas i rutan.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

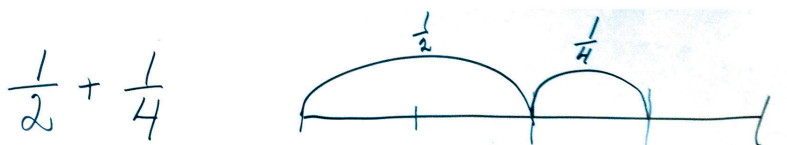
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

En *string* är en omsorgsfullt utformad serie uppgifter med ett bestämt matematiskt lärandemål. Tankarna bakom valet av additioner var följande: De två första uppgifterna ska vara lätta för eleverna att beräkna eftersom de har erfarenhet av halvor och fjärdedelar i många andra sammanhang. När den första summan visar sig vara $3/4$ är det inte svårt att förstå. Endast det ena bråket behöver byta nämnare. Tallinjen används här som en *modell av* elevernas tänkande, ett sätt att illustrera vad de redan kan tänka ut. Därefter följer en mer utmanande uppgift där båda bråken behöver byta nämnare. Det kan krävas betydligt mer funderande och olika förslag kan komma på hur det ska illustreras på tallinjen. Den fjärde uppgiften som endast innehåller sjättedelar är där för att befästa betydelsen av ekvivalenta bråk eftersom det visar sig att det är precis samma beräkning som den som just utförts. Poängen med att ge utmaningen först är att eleverna får fundera och reflektera och själva inse att en gemensam nämnare behövs. Den sista uppgiften är en ny utmaning eftersom båda bråken behöver byta nämnare och de nya delarna är tolfthedelar, vilka inte är lika välbekanta och intuitiva för eleverna. Förhoppningen är att tallinjen nu ska kunna fungera som modell för tänkandet.

Egna tallinjer

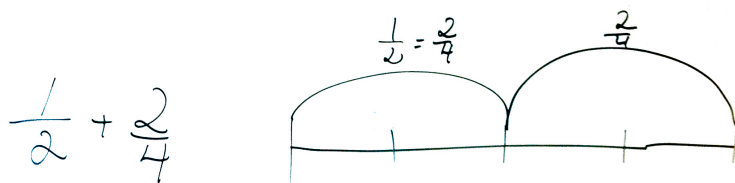
Arbetsordningen var sådan att eleverna fick en uppgift i taget som de arbetade med själva under några minuter, gärna tillsammans med sin bänkkamrat. Därefter diskuterades uppgiften i helklass. Jag ritade och skrev på tavlan efter elevernas instruktioner.

Eleverna ombads att rita en tallinje på sitt papper och sedan fundera på hur de kunde räkna ut uppgiften med hjälp av den egna tallinjen. Jag ritade en tallinje på tavlan och eleverna fick sedan berätta hur tallinjen skulle kunna delas in. Eleverna bad mig dela in linjen i hälften och sedan varje del ytterligare en gång på hälften och på det sättet hade tallinjen delats in i fyra delar.



Det som blev tydligt på tallinjen var att en halv bestod av två fjärdedelar. Additionen blev med elevernas hjälp $2/4 + 1/4 = 3/4$. Vi diskuterade inte *minsta gemensamma nämnaren* (MGM) på den här lektionen, däremot upptäckte eleverna själva genom de utvalda exemplen och de efterföljande diskussionerna att det som varit fokus och målet för lektionen var att vid addition måste bråken vara liknämniga (ha samma nämnare).

Nästa uppgift $1/2 + 2/4$ var enkel för eleverna att lösa. Jag frågade vad som hänt. Du har lagt till en fjärdedel, påpekade en elev. Flera av eleverna uttryckte att en halv var lika mycket som två fjärdedelar, vilket var en viktig kunskap. Med utgångspunkt i sin egen tallinje hade de därmed fått en bild av ekvivalenta bråk.

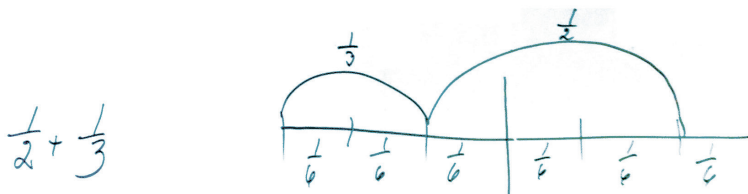


Tredjedelar stor utmaning

Den stora utmaningen kom när vi införde tredjedelar: $1/2 + 1/3$. Eleverna föreslog att vi skulle börja med att dela in tallinjen i tre delar. När eleverna förstätt att vi delar in tallinjen i så många delar vi behöver blev det tydligt att vi nu behövde sjättedelar, en lärdom från förra uppgiften. Trots att det stod en halv först i uppgiften menade eleverna att det var bättre att sätta ut tre tredjedelar först och sedan dela dem på hälften. Den kommutativa lagen var för eleverna självklar, de bytte självmant plats på bråken. Genom att rita bågar visades avståndet och bråkens delar blev då tydliga.

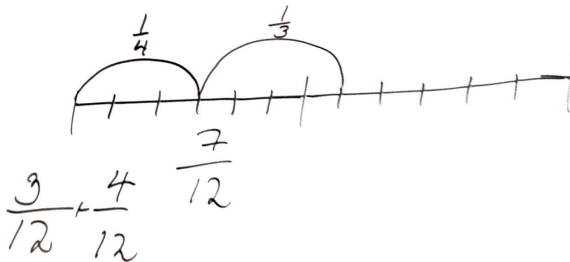
En elev visade på tavlan hur han tog en halv och "flyttade den" så att den börjar där tredjedelen slutar. Avståndet en halv synliggjordes som en sträcka som fanns på flera ställen på tallinjen. Sedan delade han tallinjen i sjättedelar och la ihop en tredjedel, som han menade var lika mycket som två sjättedelar med en halv som var lika mycket som tre sjättedelar. Eleverna resonerade sig fram till att $1/2 + 1/3 = 1/3 + 1/2$, och att det i sin tur var lika mycket som $2/6 + 3/6$ genom att titta på tallinjen. Resultatet blev synligt som ett avstånd men skulle också kunna markeras som en punkt på tallinjen.

Eftersom vi delade in tallinjen i många delar syntes det att varje del blev mindre efter varje delning. "En sjättedel är hälften så stor som en tredjedel", uttryckte en elev det. Sambandet mellan tre sjättedelar och en halv blev tydligt. Utan att rita en ny tallinje fick eleverna fundera på $1/2 + 1/3$ och $3/6 + 2/6$ vilka vi löste gemensamt genom att använda oss av den kunskap vi fått i de tidigare uppgifterna och genom att titta på tallinjen. Att tallinjen var en hjälp blev tydligt eftersom eleverna tyckte att uppgifterna var lätta att lösa.



När eleverna skulle lösa den sista uppgiften $1/4 + 1/3$ föreslog en elev: "Vi kan dela in tallinjen både i fjärdedelar och i sjättedelar men egentligen är det nog bäst att dela in den i tolfte delar". Eleven förklarade att det var för att "fyra gånger tre är tolv". Vi kom tillbaka till elevens tankegång att förlänga bråk för att få fram en gemensam nämnare i slutet av lektionen.

Eleverna föreslog att vi skulle dela in tallinjen i hälften, sedan hälften igen och hälften en gång till så att vi fick åttodelar. Jag gjorde det på tavlan men eleverna var inte nöjda eftersom det fortfarande var svårt att se en tredjedel. Ett nytt förslag blev att vi skulle dela in linjen i tredjedelar och sedan i sjättedelar som vi sedan delade en gång till så att vi fick tolfte delar i stället. Nu gick det att märka ut avståndet en fjärdedel på tallinjen och sedan direkt efter en tredjedel också som ett avstånd. Vi diskuterade även på vilka olika ställen avstånden en tredjedel och en fjärdedel fanns på tallinjen. När vi skulle lösa uppgiften $1/4 + 1/3$ föreslog en elev att det blir sju tolfte delar genom att räkna antalet tolfte delar, en del i taget på tallinjen. Här visade eleverna att de hade insett att om man delar in tallinjen i mindre delar går det att addera två bråk, som från början hade olika nämnare, eftersom bråken nu har samma nämnare. Vi kunde även införa begreppet *gemensam nämnare*.



En elev visade vid uppföljningen att man kan göra en multiplikation för att få fram samma nämnare och beskrev för klassen att jag skulle skriva: $(1 \cdot 3)/(4 \cdot 3) + (1 \cdot 4)/(3 \cdot 4) = 3/12 + 4/12$. Jag ställde frågan till klassen om varför han hade multiplicerat med olika tal: tre på först bråket och fyra på det andra. Alla eleverna i klassen var inte helt säkra på att de förstod hur deras kamrat hade tänkt, men eftersom de fått samma resultat på tallinjen höll de med om att uträkningen stämde. Det var en fördel att det var en av eleverna som gjorde upptäckten och förklarade hur man kan göra eftersom det ger en större möjlighet till förståelse än om jag inlett lektionen med en genomgång av multiplikation för att få fram liknämninga bråk. En naturlig fråga att undersöka kommande lektion är varför denna procedur att multiplicera fungerar genom att knyta an till kunskaper om ekvivalenta bråk och se hur proceduren kan kopplas till bilden på tallinjen.

Under hela lektionen var eleverna delaktiga i diskussionerna och det var deras förslag jag skrev upp på tavlan när klassen var enig om hur beräkningarna kunde göras och illustreras. I alla uppgifter utgick vi från en halv för att vi skulle kunna jämföra storlekarna. Noteras bör dock att vid arbete med en tom tallinje är bilden att betrakta som en skiss där avstånden är uppskattade snarare än exakt uppmätta, så att fokus hamnar på förståelse av sambanden mellan bråken snarare än på mätning och noggrannhet.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4}$$

Målet är att tallinjen ska bli en mental modell, inte att den ska vara tidskrävande och omständlig. När lektionen var slut fanns alla uppgifter illustrerade på tallinjer under varandra där sambanden mellan de ekvivalenta bråken $1/2$, $2/4$, $3/6$ och $6/12$ framträdde.

Eleverna uttryckte själva efter lektionen vad som menas med en gemensam nämnare och att tallinjen var en hjälp för att kunna se de olika bråken även om någon elev föredrog att multiplicera sig fram till en gemensam nämnare inför beräkningen. En elev menade att man kunde använda tallinjen för att räkna procent också, vilket var en koppling till att vi tidigare arbetat med tallinjen och decimaltal. Ett utmärkande drag med lektionen var att det var *eleverna* som undersökte och funderade och sedan berättade för mig hur man gör de enklaste beräkningarna – inte tvärtom. Min roll som lärare bestod i att dels förse eleverna med väl genomtänkta uppgifter som skulle ge dem möjlighet att få syn på innebörden i gemensam nämnare vid addition och dels att hjälpa eleverna modellera sina tankar på tallinjen så att den utvecklades till ett hjälpmedel för sitt tänkande.

LITTERATUR

- Drageryd, K., Erdtman, M., Persson, U. & Kilhamn, C. (2012). *Tallinjen – en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik*. Nämnaren 2012:3.
- Fosnot, C., Imm, K. L., & Uittenbogaard, W. (2002). *Mini-lessons for operations with fractions, decimals, and percents*. Portsmouth: Heinemann.
- Holmberg, B. & Kilhamn, C. (2014). *Subtraktion på den tomma tallinjen*. Nämnaren 2014:3.
- Kilhamn, C. (2014). *Tallinjen som ett didaktiskt redskap*. Nämnaren 2014:2.
- Kilhamn, C. (2015). *Unga matematiker i arbete*. Nämnaren 2015:4.
- Kilhamn, C. & Frisk, S. (2016). *Reflekerande och matematiserande barn – en utmaning*. Nämnaren 2016:3.
- Saxe, G.B. (2013). *Learning mathematics through representations integers and fractions on the number line*. A curriculum unit for 4th and 5th grade. University of California, Berkley.
- Skodras, C. (2016). *Muffles' truffles – undervisning i multiplikation med systematiskt varierade exempel*. Nämnaren 2016:2.