Studier av kunskapsbildning i matematik i dialog mellan två vetenskaper

Inger Wistedt, Gudrun Brattström, Mats Martinsson

Sedan mitten av 70-talet har pedagogiska studier av kunskapsbildning innehållsrelaterats. Det innehållsrelaterade synsättet får konsekvenser för inriktningen av den ämnesdidaktiska forskningen. Ämnesdidaktiken rör sig i gränslandet mellan vetenskaper och artikeln beskriver hur forskare, som företräder olika ämnen, här pedagogik och matematik, kan föra en dialog över ett empiriskt material, där de skilda perspektiven nyttjas för att kasta ljus över kunskapsbildningsprocessen.

Data hämtas från studier av 11-åringar som löser en matematisk uppgift i grupp och av studenter inom högskolans grundutbildning som arbetar med en uppgift som handlar om matematisk induktion. Analyserna av elevernas förståelse av de givna uppgifterna görs ur ett intentionellt perspektiv, *där elevernas tolkningar av uppgiften fokuseras.*

Det intentionella perspektivet är dialogiskt och därför väl lämpat för tvärvetenskapligt samarbete. I artikeln argumenteras för fruktbarheten i en sådan dialogisk ansats.

Inledning

Vid en middag på universitetet i Cambridge försökte en tillrest humanist konversera sina bordsgrannar, med föga framgång. Ingen tycktes begripa vad han talade om. Värden kom till hans undsättningen, med de tröstande orden: "Åh, de är matematiker! Vi talar aldrig med *dem*". Konversationen har återgivits av C.P Snow (1964, sid 3) som med exemplet vill belysa svårigheterna att föra en dialog över disciplingränser. Humanister, samhällsvetare och naturvetare finner inte alltid nöje i att tala med varandra. Okunskap, ointresse eller fördomar försvårar samarbete.

I artikeln som vi presenterar här vill vi visa hur man, trots svårigheterna, kan föra ett samtal mellan två vetenskaper, som i många avseenden är olika — matematik och pedagogik — där syftet för samtalet är att belysa kunskapsbildningens problem. Vi hävdar inte bara att

---

Inger Wistedt *er dosent ved Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.*
Gudrun Brattström *er dosent ved Matematiska institutionen, Stockholms universitet.*
Mats Martinsson *er universitetslektor ved Matematiska institutionen, Göteborgs universitet och Chalmers.*

dialogen är möjlig och att den kan leda till insikter som gagnar båda ämnena, vi menar också att den är fruktbar för teoribildningen inom det ämnesdidaktiska forskningsfältet. Med exempel hämtade från studier av hur barn och ungdomar lär sig matematik ska vi försöka belysa vår tes.

Ämnesdidaktisk forskning som tvärvetenskap

Vid mitten av 70-talet blev *innehållsrelatering* ett nyckelord inom den pedagogiska forskningen (Marton, 1986: Marton et al, 1977, Skolöverstyrelsen, 1980). Lärande är alltid lärande *av* något (Marton, 1981), *i* en specifik situation (Säljö, 1989, Säljö & Wyndhamn, 1990) och *för* bestämda syften (Halldén, 1988, Wistedt, 1987). Vad elever lär sig, hur de gör det och med vilka intentioner, är frågor som måste studeras med hänsynstagande till de unika dragen i lärsituationen. Kritik riktades också mot de förhärskande forskningsansatserna med grund i generell psykologisk teoribildning (Marton et al, 1977). Innehållet, lärsituationen och riktningen för lärandet måste studeras så som de *uppfattas av den lärande.* Vad eleven lär sig är inte givet i undervisningen eller i läromedlen. Texter som läggs för elever, uppgifter som de får av läraren och förklaringar som ges, tolkas av de lärande och ges innebörder som läraren inte alltid har avsett och det är dessa innebörder som formar förutsättningarna för lärprocessens förlopp och utfall. Frågor som under senare år har fokuserats inom pedagogisk forskning om kunskapsbildning handlar om variationer i sätt att förstå undervisningssituationer: hur elevers uppfattningar av ämnesstoffet förhåller sig till teorier och begrepp som tas upp i undervisningen, hur kommunikation av ämnesförståelse sker och vad det innebär att förändra personliga referensramar och etablera ett kunnande som sanktionerats inom en viss ämneskultur (för översikter inom olika teoretiska perspektiv, se t ex Pfundt & Duit, 1991; Marton & Booth, 1997; Säljö, 2000).

Ämnesdidaktisk forskning kan bidra till att fördjupa förståelsen för dessa frågor och har därför en tydlig teoretisk pedagogisk relevans. Men ämnesdidaktisk forskning kräver också djupgående kunskaper i det ämne som berörs. Hur kan vi t ex förstå *vad* en elev är i färd med att lära sig om vi inte har en avsevärd tolkningsrepertoar i ämnet? Ämnesdidaktisk forskning kräver en dubbel sakkunskap som en enskild forskare sällan besitter.

Forskare i matematik kan inte förväntas vara intresserade av teoribildning i pedagogik. Didaktisk forskning på pedagogikens villkor blir därför lätt en monolog, där matematiker reduceras till konsulter eller ämnesexperter. En dialog kräver ömsesidighet, ett genuint intresse av att föra samtal över frågor som intresserar båda parter, ett gemensamt sakförhållande att utforska.

Kan frågor om kunskapsbildning i matematik intressera verksamma matematiker? Vi menar det. Kunskapsbildning i ämnet är något som berör dess utövare, både som undervisare och som forskare. Frågor om *vad* som lärs in när människor sysslar med ämnet, *hur* det går till och *varför* det sker berör därtill vetenskapsteoretiska fundament för ämnet och en belysning av dem kan, menar vi, bidra till reflektion över ämnets kunskapstradering. Alla matematiker är inte intresserade av att delta i den slags diskussioner, men om möjligheter öppnas för reflektion över den egna verksamheten kan åtminstone vissa finna glädje i att delta i ett tankeutbyte om kulturens förmedlingsproblem.

Dialogens förutsättningar

Något att tala om

Samtal förutsätter något att samtala om. En dialog över kunskapsbildning i matematik kräver exempel som skildrar processer där kunskap bildas. När matematiker reflekterar över lärande i sitt ämne använder de vanligen exempel ur egen fatabur, minnen av hur de själva har lärt sig, eller exempel från den egna undervisningen som på något sätt har gjort intryck (Hadamard, 1945; Poincaré, 1956; Penrose, 1989; Gårding, 1977, sid 253ff). Bekymret med sådana exempel är att de ofta skildrar idealiserade eller generaliserade situationer, där urvalet är beroende av den tolkandes personliga preferenser. Vi för våra samtal över empiriska material, som visar hur elever löser matematiska uppgifter tillsammans (Wistedt, 1998; Wistedt, Brattström, Jacobsson & Källgården, 1992; Wistedt, Brattström,& Jacobsson, 1993; Wistedt & Martinsson, 1994; Wistedt, Brattström, & Martinsson, 1996; Wistedt & Brattström, 1999). Samtalen mellan eleverna över de givna uppgifterna spelas in på band och det dokumenterade materialet skrivs sedan ut i sin helhet. Fördelen med att arbeta med empiriska exempel är vi får tillgång till ett gemensamt referensmaterial, som vi dessutom kan återvända till, gång på gång. Det kan inte friseras utan föreligger som ett empiriskt faktum öppet för tolkning. Materialet inrymmer ofta en variation av uppfattningar om ämnet matematik och om uppgiften som ska lösas, data som i viss mening är oberoende av betraktarens intressen och som i bästa fall kan överraska oss alla.

En dialogisk forskningsansats

Konsten att bli överraskad är konsten att öppna sig för det materialet bjuder, att överskrida egna normativa utgångspunkter: föreställningar om vad som är goda och mindre goda sätt att lära sig matematik eller om hierarkiska vägar till matematisk förståelse som inte så sällan har sin grund i föreställningar om hur man bäst *undervisar* i ämnet.

Metoden vi använder för att öppna materialet för en dialog kan kallas *intentionell analys* (von Wright, 1971; Downes, 1984; Scheja, 1998; Halldén, Scheja, Jakobsson Öhrn, 2000). Det eleven gör och säger i lärsituationen ses av forskarna *som meningsfullt handlande* riktat mot mål som eleven uppfattar som rimliga att eftersträva i den rådande situationen. Med utgångspunkt i data som samlats, tillskrivs eleverna intentioner som gör deras handlande rimligt och meningsfullt. En intentionell analys av kunskapsbildning i matematik fokuserar handlingar i situationer som aktualiserar matematiska begrepp och tankestrukturer: elevers tolkningar av uppgifter med matematiskt innehåll, av matematiska begrepp och teorier och av regler och konventioner som eleverna förknippar med den matematiska kulturen. Tolkningar av elevernas agerande i ett pedagogiskt och ett matematiskt perspektiv prövas mot varandra och mot de dokumenterade utsagorna och sekvenser av dessa. Alternativa tolkningar framläggs i en pågående dialog med materialet.

Relativisering av perspektiv

Den intentionella analysen har sina risker. En risk är att forskaren lägger sina egna tolkningar som ett raster över materialet — ser det han vill se, det han förmår se, eller det han förväntar sig att få se. Ett sätt att motverka en sådan personlig bias är att konfrontera egna tolkningar med andras, vilket kräver en samtalsform som öppnar för en relativisering av de personliga utgångspunkterna för analysen, det subjektiva perspektivet (Janson, 1975, sid 4ff). Det säger sig självt att en analys av elevers matematiska intentioner kräver stor kunnighet i ämnet. Vi ska senare ge exempel på detta. Men förtrogenhet med den matematiska kulturen kan också förblinda. Inom varje vetenskap utvecklas normer och handlingsregler som dess utövare med tiden ser som självklara, så uppenbara att de kan ha svårt att problematisera dem. Uttryck som "det inses lätt...", "av detta följer..." osv signalerar kulturella förgivettaganden som riskerar att underförstås också i en analys av hur elever lär sig ämnet. I en dialog mellan människor som företräder olika vetenskapliga discipliner kan sådana kulturella förgivettaganden problematiseras. När jag ur ett matematiskt perspektiv försöker förstå hur pedagoger tolkar ett material som är gemensamt för oss båda och omvänt, fördjupar jag min egen syn både på materialet och på min egen relation till det, samtidigt som jag får möjlighet att berika den andres perspektiv. Sådana är dialogens förutsättningar.

Kontakt med läsaren

Dialogen tänks vidare omfatta läsaren av forskningsresultaten. Denne kan givetvis inte ges tillgång till hela analysunderlaget och möjligheterna att pröva slutsatserna måste därför bli begränsade. Men om data presenteras på ett sätt som uppmuntrar till ifrågasättanden och om läsaren ges rimligt underlag för en prövning av resultaten, ökar möjligheterna till delaktighet.

För att fånga händelserna i elevgrupperna som vi studerar, även det ickeverbala samspelet mellan deltagarna, presenterar vi data i form av narrationer, *berättelser* om elevernas arbete med den förelagda uppgiften. Berättelserna följer händelserna i gruppen i kronologisk ordning. Utsagor från eleverna presenteras i direkta citat, markerade med lutande stil.

I en kort artikel är det emellertid inte möjligt att presentera beskrivningar som fyller de dialogiska kraven. Här ger vi istället utdrag ur data, som avser att exemplifiera vår forskningsansats och resultaten vi har nått. Vi har dock försökt att ge de valda exemplen en så fyllig beskrivning som möjligt, detta för att möjliggöra en kritisk läsning. Det är inte heller möjligt att här återge hela dialogen mellan forskarna. Ibland går rösterna i varandra. Studien är resultat av en dialog som förts under en lång forskningsprocess där forskarna ömsesidigt lärt sig identifiera och uppskatta den andres perspektiv. Det betyder inte att en matematiker som deltar i en sådan dialog blir pedagog eller att pedagogen blir matematiker. Med respekt för varandras expertis bidrar vi istället gemensamt till analysen av hur eleverna arbetar med matematiken. Förhoppningsvis kan vi också stimulera läsaren till att delta i samtalet.

En dialog över två empiriska exempel

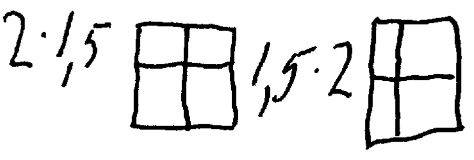
Oändligheter och gränsvärden

I en förortsskola i Stockholmsområdet ägnar sig en grupp elever i en femteklass åt multiplikation och tals uppdelning i faktorer[1]. Elin, Jan

[1] Exemplet finns utförligt redovisat i Wistedt, Brattström, Jacobsson, & Källgården, 1992 samt i Wistedt, 1994a, b.

och Alex "bygger tal" med hjälp av klossar. Läraren har bett dem undersöka hur "små" tal (talen 2,3,4) kan beskrivas som multiplikationer av två andra tal. Syftet med övningen är att barnen ska upptäcka multiplikationens kommutativitet, dvs att t ex 1 × 4 och 4 × 1 är två uttryck för talet 4.

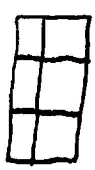
Eleverna börjar med talet 2 och hittar faktoriseringarna: 1 × 2 och 2 × 1. De fortsätter till talet 3 och hittar också här två varianter, 1 × 3 och 3 × 1, vilket de inte tycker är riktigt tillfredsställande. Ett större tal borde ge fler faktoriseringar. Elin föreslår då att man kan dela klossarna. Talet 3 skulle då kunna beskrivas som en och en halv gånger två eller som två gånger en och en halv. När eleverna ska beskriva sin upptäckt i symboler föreslår Jan, ett skrivsätt: Man kan skriva 1,5 × 2 respektive 2 × 1,5:



- *"Det borde ju gå. I och med att där är två stycken hela och om man lägger ihop dom där två halvorna så blir det en hel."*

Nöjda fortsätter eleverna till talet 4. Elin hittar snabbt heltalsvarianterna: 1 × 4, 4 × 1 och 2 × 2. Men eftersom barnen har introducerat regeln att klossarna kan delas uppstår frågan om man kan hitta andra faktoriseringar. Elin menar att man kan dela en av klossarna och fördela delarna jämnt på de övriga tre:

- *"Om man delar den i tre lika delar så här. Då kan man sätta en liten bit där."*



- *"Men det blir ju inte jämnt"*, protesterar Alex.
- *"Nä i och för sig"*, säger Elin, *"men då kan man göra tredjedelar istället".*
- *"Ja, just det"*, säger Alex. *"Men då blir det bara små delar. De blir inte riktiga. Då blir det inte rätt, för då blir det 4,5."*

Men delarna är inga halvor, utan tredjedelar, påpekar Elin. Och hur ska man skriva tredjedelar i decimalform?

- *"Men då blir det så här"*, säger Elin, *"komma, komma, komma, hela tiden. Om man ska ha det alldeles rätt."*

Alex förelår att man ska avrunda, men Elin envisas:

- *"Ja, men du, om man gör så här att man tar en sån här* /kloss/ *som tio. Om man delar där då blir det tre, och så är det en liten kvar."*
- *"Var ska man lägga den då?"* undrar Jan . *"Nej, jag får ont i huvudet av allting".*
- *"Men liksom"*, förklarar Elin, *"då måste man lägga på en pytteliten bit och en pytteliten bit. Det blir så hela tiden ju".*
- *"3 komma 3. Det är det bästa"*, tycker Jan.
- *"Njae, mmm..."*, funderar Elin, *"det blir en liten bit **kvar** ju."*

Så hur ska man få det alldeles rätt?

- *"Ja, men det blir så här: ett komma tre, tre, tre, tre, tre"*, säger Elin och skriver:

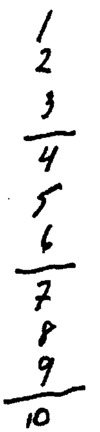
1,3333333...3
1 hel och en 3del · 3

Men Alex håller inte med. Hur många treor blir det? Och hur länge kan man dela?

- *"Tänk själv"*, säger han, *"om man delar den här. Då måste man sätta den i mikroskop. Dela atomer."*
- *"Men du"*, invänder Elin, *"vi **delar** aldrig den där. Tänk om den är så **här** stor då. Då är det mycket lättare att dela."*
- *"Ett komma tre komma tre...är det rätt?"* försöker Alex.
- *"Man kan sätta hur många treor man vill...och så en till"*, säger Elin.

Men någon gång måste det ta slut, tycker Alex. Men Elin håller inte med och plötsligt kommer hon på hur hon kan förklara sin upptäckt:

- *"Jag kom på det!"*, ropar hon och ritar en skiss:



- *"Jag hade så här: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. För varje sån är det tio kom vi fram till. Och så ska vi dela den där med tre. Här är en liten bit: 1,2,3"*, säger hon och drar ett streck, *"en liten bit. 1,2,3... så blir det den lilla över. Så delar man den, den, den..."*
- *"Det är konstigt ändå att det aldrig kan ta slut"*, säger Alex sakta. *"Då kan det ju bli hur småttigt som helst."*

Men nästa dag har han klurat ut problemet. Han kommer glad och stolt till läraren och förklarar att han nu har förstått vad Elin försökte förklara:

"Jag har alltid trott att när man delar något så blir det mindre", säger han till sin lärare. *"Men här är det hela tiden samma kloss man delar. Och vet du vad. Om man lägger ihop alla de där bitarna, då blir klossen hel igen."*

Det pedagogiska handlingsrummet

Matematiker, som har tagit del av exemplet, har ofta imponerats av hur elegant Elin hanterar problemet. En av dem fällde kommentaren:

Men ni kanske inte ska exploatera exemplet för mycket, för det är ju en ovanligt begåvad flicka!

Men vad menar vi när vi talar om begåvning, skulle en pedagog invända. I våra analyser av exemplet (se a.a.) har vi försökt visa, att det finns ett pedagogiskt handlingsrum, inom vilket eleverna utvecklar lösningen i samspel med varandra. Eleverna aktualiserar sina erfarenheter, ställer frågor, ber om förtydliganden, ifrågasätter utsagor och utvecklar tankar som andra bjuder. Allt detta blir stoff för vidare utforskande. Gemensamma överenskommelser, som t ex introduktionen av ett visst sätt att bokföra resultaten, sätter gränser för vad som kan tas upp i samtalet, skapar ett rum för lärande (Wistedt, 1997, Wistedt, kommande). Vi behöver alltså inte retirera till psykologiska förklaringar för att förstå resultaten, hänvisa till personlighetsdrag som "begåvning" eller "fallenhet", som ingen pedagog kan påverka,.

I exemplet löser eleverna problemet hur 4 kan delas i 3 numeriskt lika delar, där delarna skrivs på decimalform. Det var inte det problemet läraren hade tänkt sig att eleverna skulle lösa. Lärarens avsikt var att eleverna skulle söka heltalsfaktorer till "små" tal för att den vägen upptäcka multiplikationens kommutativitet. Det problemet ser inte eleverna. Istället löser de problem som handlar om rationella tal med oändliga decimalutvecklingar. Vi skulle kunna säga att de helt enkelt har missuppfattat uppgiften.

I undervisning i allmänhet och i matematikundervisning i synnerhet är det vanligt att vi med ett problem avser den intention som lärare eller läroboksförfattare haft när en uppgift konstruerades. Ofta används också ordet "problem" för att beteckna en "uppgift" (jfr Halldén, 1982). I ett sådant, normativt perspektiv, kommer elevernas agerande att beskrivas och värderas i relation till hur väl den avsedda intentionen har förståtts. Uppfattningar beskrivas i hierarkiska termer i relation till den intention som, enligt normen, ses som den mest elaborerade (se exempel i Marton & Booth, 1997, sid 77). I ett intentionellt perspektiv däremot är det inte givet *vilket* problem eleverna kommer att formulera när de arbetar med en uppgift. Problemformuleringen kan inte heller enkelt förklaras med hänvisning till formuleringar i texten eller till instruktioner som ges av läraren. Eleverna formulerar egna regler för hur uppgiften kan tolkas, vilket vi ser exempel på i berättelsen ovan, där eleverna gemensamt introducerar reglerna att klossarna kan delas och hur delarna kan beskrivas i symbolform. Tolkningsförutsättningar som läraren har avsett och underförstått, som i exemplet ovan att eleverna ska ägna sig åt multiplikationens kommutativitet med heltal som exempel, är inte synliga för eleverna. De löser uppgiften för att lära sig något nytt, vilket betyder att de inte rimligen kan se det problem som läraren haft i åtanke. Kunde de se det skulle de redan ha förstått poängen med faktorisering av heltal och behövde inte alls ägna sig åt uppgiften (Bereiter, 1985). Istället för att betrakta Elin som ett undantag, antingen som ovanligt begåvad eller som ovanligt anarkistisk och benägen att missuppfatta lärares intentioner, kan vi se henne som ytterst vanlig. I ett intentionellt perspektiv gör hon det varje elev måste göra i en lärsituation — hon nyttjar de erfarenheter som står till buds, egna och andras, för att ge uppgiften en rimlig tolkning och hon visar då prov på en kompetens som i ett normativt perspektiv hade fallit utanför synfältet.

Den intentionella analysen tar oss ut på djupt vatten. Det enda vi kan lita till i tolkningsarbetet är vår kompetens att rimliggöra det barnen gör och säger och att se det matematiskt intressanta i deras agerande. Frågorna om *vilken* matematik barnen lär sig, *hur* de gör det och *varför*, relateras inte till normer formulerade i ett undervisningssammanhang utan till mera grundläggande frågor som överskrider den lokala praktiken, frågor som t ex: Vilket är talet som eleverna är på jakt efter (frågan ställdes av en matematisk konstruktivist)? Finns talet och om det finns, finns det bara ett sådant tal?

I exemplet ser vi hur Elin preciserar sin uppfattning av tredelningens problem. När hon upptäcker att divisionen med tre inte går jämnt ut, försöker hon dividera så gott det går genom att dela de tre bitarna som låter sig delas och sedan koncentrera sig på den fjärde biten. Hon föreslår först att man ska *"göra tredjedelar"* av den och lyckas också övertyga de andra medlemmarna i gruppen om att det rör sig om tredjedelar och inte om *"halvor"*. Halvor kan skrivas på decimalform som 0,5, det vet barnen, så då borde det väl gå att skriva tredjedelar på liknande vis?

Man kan kanske tycka att ett svar *"en och en tredjedel"* är ett svar så gott som något, men barnen tar för givet att svaret ska vara på decimalform[2]. I undervisningen har barnen förmodligen fått använda stavar delade i tio enheter för att illustrera decimalsystemets principer. Elin kommer i alla händelser på idén att dela den överblivna biten i tio små bitar. Av dessa är nio hanterliga: de kan delas in i tre grupper om tre och så är man klar med dem. Varefter det återigen blir en bit över. Den är tio gånger mindre, men det bekymrar inte Elin: dela den i tio delar kan man fortfarande göra. Räkneförfarandet är precis detsamma oavsett storlek på biten. Man bara skriver dit en trea till i resultatet och får sedan en ännu mindre bit över. När Elin försöker förklara vad hon gör för Alex beskriver hon det som ett slags byte av skala: *"Tänk om den var så **här** stor då..."* Just att mönstret hela tiden upprepas gör det också lätt för henne att se att processen aldrig kan få ett slut.

Om vi, ur ett matematiskt perspektiv, betraktar det Elin säger och skriver och de argument hon använder för att möta de andra gruppmedlemmarnas frågor, kan vi tolka hennes handlingar som led i ett utforskande av vad som brukar kallas "lång division", eller den vanliga divisionsalgoritmen. Barnen har inte lärt sig den än, men Elin behöver den när hon ska tydliggöra sin förståelse av problemet och beskriva den

---

[2] Invändningen gjordes av en av matematikerna som deltog i projektet. För en matematiker kan det förefalla självklart att "en och en tredjedel" och 1,333... är ekvivalenta uttryck.

för de andra. I en matematikers perspektiv framträder detta som en imponerande intellektuell bedrift. Medan det decimala positionssystemet uppfanns av hinduerna ca 500 e.Kr., så är den första kända referensen till lång division från mitten av 1400-talet (se D. E. Smith, 1923), vilket antyder att divisionsalgoritmen långt ifrån är en självklarhet, ens givet decimalsystemet[3].

Men Elins argumentation är inte bara ett elegant sätt att lösa problemet utan också ett exempel på hur kunskap bildas i ämnet matematik. I ett pedagogiskt perspektiv framträder hur Elin, genom att variera exemplet och dess konkreta drag (t ex storleken på klossen), går från konkreta till mera abstrakta aspekter av problemet, från faktiska klossar som delas, till teckningar av klossarna och till en abstrakt modell där delningen sker i en modellvärld (*"Men du, vi* ***delar*** *aldrig den där. Tänk om den var så* ***här*** *stor då"*).

Men när Elin ska redovisa sin lösning för kamraterna förstår de henne inte, trots att hon hittar sätt att variera sina argument. Pojkarna är kvar i det konkreta: de frågar sig vilken bit som ska delas, var biten ska läggas och hur stor den är eller hur orimligt liten. Det är möjligt att de uppfattar decimalsystemet som ett skrivsätt snarare än som en strukturerande princip. Den hjälper dem i alla händelser inte att gå från det konkreta exemplet till en matematisk förståelse av tredelningens problem. Pojkarna väljer istället andra modeller för att finna de abstrakta aspekterna, som i Alex fall, ett gränsvärdestänkande. Förståelse skapas ur personliga erfarenheter och ur preferenser för modeller och metaforer som eleven känner sig hemmastadd i. Begrepp som elever bildar är inte statiska. De bär spår av kunskaps*bildningen*, dvs de innefattar sin egen genes (Dörfler, 1991). I ett pedagogiskt perspektiv ser vi en imponerande utveckling av barnens taluppfattning, hur de går från heltal med halvor till rationella tal på bråk- och decimalform under en mycket kort tidsrymd. Analysen visar inte bara att det är möjligt för elever att nå långt i sin begreppsbildning under en begränsad tid. Den visar också *hur* det kan gå till och vilka redskap eleverna nyttjar i lärprocessen. Resultaten kan därmed användas i en pedagogisk diskussion om hur kunskap bildas och hur begreppsförändring kommer till stånd.

Defekta schackbräden och matematisk induktion

Exemplet ovan visar hur eleverna nyttjar sin egen och andras erfarenheter när de skapar förståelse och det visar också att elever kan nå oväntat

[3] Andra algoritmer för division var dock i bruk tidigare, anpassade till kulramar och andra hjälpmedel som fanns tillgängliga.

långt om de får artikulera och pröva sina egna tolkningar av uppgiften och av det kulturella sammanhang i vilket den ingår, dvs genrekraven i vid mening. Men erfarenheter kan också vara begränsande. Ibland kan de resa kognitiva hinder för förståelsen av både uppgiften och av kamraternas utsagor. Sådana kognitiva hinder kan också finnas hos lärare, särskilt om de har en väletablerad föreställning om vad som är "rätt sätt" att lösa en uppgift.

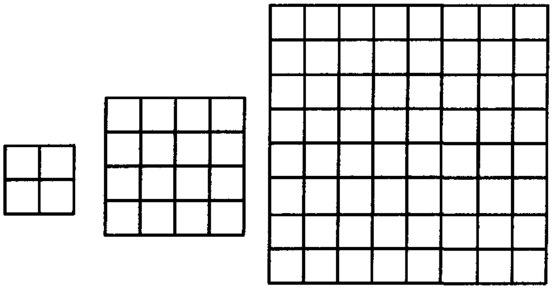
I vårt nästa exempel tar vi upp ett fall där eleverna har svårt att förstå varandra, trots att de anstränger sig för att gemensamt lösa en uppgift på ett sätt som kan accepteras av samtliga. Exemplet ger oss underlag för att problematisera en tes som många matematiker, kanske också andra lärare, gärna sätter sin lit till, nämligen tesen att om någon verkligen har förstått ett begrepp eller en teori ordentligt, så kan förståelsen också omsättas i nya situationer. I själva verket är det detta många avser när de talar om "förståelse". Vi ska avsluta vår empiriska presentation med att nyansera denna syn på förståelse som generell och transfererbar. I matematik är tesen särskilt omhuldad, eftersom ämnets styrka ligger just i att utsagor har generalitet, t o m universalitet. Därav drar man lätt slutsatsen, att exempel som presenteras i undervisningen av studenterna ses som just *exempel* och inte som intressanta i sig. Studenterna förväntas bortse från tillfälliga drag i exemplen för att nå en mera generell förståelse för begrepp och teorier som de exemplifierar. För studenter är det emellertid inte alltid så lätt att inse *vilka drag* som är tillfälliga och vilka som är essensiella i matematisk mening.

Inom grundutbildningen i matematik möter studenterna en bevismetod som enligt många lärare är svår att förstå — matematisk induktion. För att undersöka studenternas uppfattningar av induktion gav vi sex grupper, tre från Stockholms och tre från Göteborgs universitet, en något okonventionell uppgift att lösa, okonventionell såtillvida att den inte innehåller någon algebra, vilket induktionsbevis vanligen gör i undervisningen[4]:

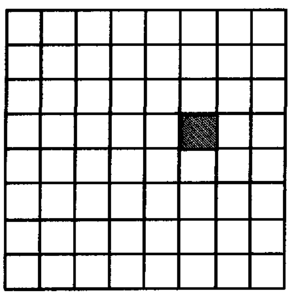
[4] Exemplet finns utförligt redovisat i en rapport (Wistedt, Brattström, & Martinsson, 1996)

Defekta schackbräden och induktion

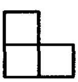
Vi tänker oss ett schackbräde med $2^n \times 2^n$ rutor, där n=1,2,3,... :



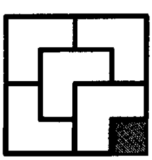
Och så vidare. (Så för n=3 har vi ett "riktigt" schackbräde.) Nu tar vi bort en ruta någonstans på schackbrädet, exempelvis så här:



Vi kallar detta för ett "defekt" schackbräde. Vi ska försöka täcka över ett defekt schackbräde med L-formade pusselbitar:



Exempelvis är följande en övertäckning av ett defekt $2^2 \times 2^2$-bräde:



Problem: Visa med hjälp av induktion att det alltid går att täcka ett defekt $2^n \times 2^n$-schackbräde, för alla $n \geq 1$ och oavsett var på brädet rutan tagits bort.

Fig 1: Uppgiften

Precis som 11-åringarna lyckas de flesta av studenterna klara ut uppgiften och komma fram till ett svar som de kan acceptera. Fem av de sex grupperna finner en geometrisk lösning av uppgiften. I samtliga fall har emellertid studenterna svårt att acceptera en sådan lösning som riktigt rumsren i en matematisk genre, dvs studenterna tyckts inte förknippa geometri och matematiska bevis och möjligen har de via erfarenhet fått inställningen att bevis ska formuleras i algebraiska symboler. Genreförståelsen begränsar dem och snävar in deras förståelse av uppgiften och bevismetoden. I vissa grupper tolkar studenterna helt enkelt om uppgiften så att den passar in i deras algebraiska uppfattning av matematiken, vilket innebär att de istället för att lösa övertäckningsproblemet prövar ett svagare påstående, nämligen att antalet rutor i ett defekt schackbräde alltid måste vara delbart med 3.

Vi ska inte beröva läsaren glädjen att fundera ut det geometriska beviset för att det defekta schackbrädet alltid går att täcka. Den nyfikne hänvisas till vår rapport (Wistedt, Brattström, & Martinsson, 1996). Vi ska istället ta upp ett utdrag ur diskussionerna i en av de sex grupperna, där två elever, Ebba och Lina, för en dialog över vad som är ett matematiskt bevis i allmänhet och ett induktivt bevis i synnerhet. Den som tar del av Linas förklaringar, som vi här återger i ett kortare utdrag, känner sig ganska övertygad om att Lina har förstått induktionsbevis. Det tycks emellertid inte hjälpa henne att förstå Ebbas invändningar mot bevismetoden och det hjälper henne inte heller att tillämpa förståelsen på den geometriska uppgiften. Linas förståelse, hur varierad den än är, är kontextuellt begränsad till algebraiska sammanhang.

Att förstå induktion

Eleverna läser uppgiftstexten och Lina gör en tolkning av den:

- *"Om det alltid är tre pusselbitar* /rutor i ett L/, *då vet man hur många såna som ska in i ett visst bräde, så det...**det** borde man ju kunna visa. Och går det alltid i jämnt många L blir det aldrig nån ruta över...**det** kan vi visa med induktion."*

Ebba invänder att man måste räkna med *"den formen som är gjord"*, men Lina observerar inte invändningen utan fortsätter att utveckla ett bevis för att antalet rutor i ett defekt bräde alltid är delbart med 3:

- *"Sen antar man att det funkar om det här n:et är lika med p. Och sen ska man visa att om...**om** det gäller för p så gäller det också för p+1"*
- *"Men eftersom vi **antar** att det gäller för p, ska vi inte visa att det gäller för p på nåt sätt?"* undrar Ebba men Lina invänder att det är ett antagande man måste göra.

Hon utvecklar beviset tillsammans med de andra i gruppen och när hon har skrivit ned en formel som gäller generellt invänder Ebba på nytt:
- *"Det kanske är orelevant, men vad vi har visat är att man kan lägga i* ***treor****. Dom ser ju inte ut så."*

Nu först lyssnar Lina på invändningen och under en stund utvecklar eleverna ett geometriskt resonemang. Det minsta brädet som är 2 × 2 rutor kan lätt täckas med ett L, oavsett var man lägger defekten. Det närmast större brädet kan ses som fyra mindre, där ett är defekt. Det vet vi att vi kan täcka. De övriga tre är inte defekta, men kan göras defekta om vi tar bort en ruta från var och en av dem. Lägger vi sedan defekten i ett hörn och lägger hörnen mot varandra så att vi får tre tomma rutor i en L-formation, kan vi täcka hålet med en L-pusselbit. Men så gäller det att övertyga sig om att detta gäller oavsett storlek på brädet och oavsett placering av defekten.

- *"Detta ska vi visa med induktion"*, säger Lina och de andra skrattar och ryser, *"usch då"*.

Två problem aktualiseras i studenternas diskussion: Det ena problemet handlar om huruvida ett geometriskt resonemang kan accepteras som ett induktionsbevis eller, mera generellt, som ett matematiskt bevis. Det andra problemet handlar om varför ett induktionsbevis är ett bevis, vilket bl a involverar förståelse av det implikativa resonemanget: om-så. I ett samtal mellan Lina och Ebba utvecklas detta senare problem:

- *"Det vore ju roligt på du var med på detta"*, säger Lina till Ebba.
- *"Det vore ju roligt om jag kunde induktion"*, säger Ebba.

Hon ser lösningen och förstår den grafiskt men resten hänger hon inte riktigt med på.

- *"Men det är bara att du inte accepterar att det är ett bevis"*, tolkar Lina Ebba.
- *"Nej, precis"*, säger Ebba. *"Man kan ju inte räkna med nånting...eller* ***jag*** *kan inte räkna med nånting som jag inte har accepterat att det stämmer, för då kan jag inte logiskt se vilket steg som gäller."*
- *"Jag har svårt att förklara"*, säger Lina, *"för jag tycker det är självklart. Om vi har visat"*, börjar hon och försöker på nytt, *"om du först tänker bort talen överhuvud taget."*
- *"Mmm"*, säger Ebba.
- *"Utom bara det här n:et då. Jag kan stoppa in nåt tal för n."*
- *"Mmm"*, håller Ebba med.

- *"Och så antar jag att det funkar"*, fortsätter Lina. *"Och sen så visar jag att det funkar för dom som bara är ett steg över, eller hur?"*
- *"Mmm"*, instämmer Ebba.
- *"Och **om** nu det där p:et funkar, som vi sätter in, **om** nu det där p:et funkar, då funkar p+1."*
- *"Men det kan ju vara en slump"*, invänder Ebba. *"Jag kan ju lägga det här tillfälligt. Så funkar det."*
- *"Nej, det går inte"*, svarar Lina, *"för **om** det där p:et funkar, då är det rätt att alla som är över p funkar, p+1 funkar."*
- *"Ja...nej, det är inte klart"*, vidhåller Ebba.
- *"Jo, för det har vi ju visat"*, påstår Lina.
- *"Nej"*, säger Ebba, *"det är ju det som jag hänger upp mig på. Jag tycker inte att det är ett bevis. Vi antar att det stämmer för ett visst p och sen bevisar vi att det stämmer för p+1 och sen har vi dessutom visat att det stämmer för en eller två i början. Men det kan ju lika väl vara en slump att det stämmer överens på dom här. Jag förstår inte varför det är ett bevis, bara för att vi sätter in ett p. Alltså det här är en elementär grej som jag inte har förstått."*
- *"Jag förstod inte vad det är du inte förstår"*, säger Lina.

Studenternas dialog

Uppgiftens icke-algebraiska natur vållar, som nämnts, viss förvirring bland studenterna. I fem av de sex grupperna som deltog i studien löser studenterna visserligen uppgiften på ett sätt som övertygar dem själva, men strax efteråt grips de av tvivel. Ett tydligt brott i samtalet markerar tveksamheterna: Är det här verkligen ett induktionsbevis? Är det ens matematik? Tvivlen tycks dock i huvudsak gälla argumentets giltighet i den matematiska kulturen, här representerade av den som ska lyssna på bandet. Själva tror studenterna på sina resonemang. Vad som övertygar dem själva är emellertid en sak, vad som kan tänkas vara acceptabelt i den matematiska kulturen är en annan. Den citerade gruppen har alla ingredienser i ett geometriskt induktionsbevis — det är snarast en tolkningsfråga huruvida de verkligen genomför beviset eller ej — men överger likväl idén efter Linas konstaterande att det är *detta* som ska visas med induktion (se Wistedt et al, 1996, sid. 60-61). De håller sig till algebran, trots att de med dess hjälp bevisar ett svagare påstående.

Denna starka preferens för algebra är inte särskilt förvånande. De flesta bevis (och förvisso de flesta induktionsbevis) som presenteras i en typisk matematikkurs är onekligen algebraiska ("formler"), så det är inte så underligt att studenterna får uppfattningen att matematiken *är* algebraiska manipulationer. Begränsningen i tolkningen av uppgiften blir också en begränsning i dialogen mellan eleverna. Lina hör först inte Ebbas invändning, att man måste ta hänsyn till formen på pusselbiten får passera, och när Lina slutligen noterar den, säger hon "usch" och fortsätter på det algebraiska spåret. Ebbas argument låter sig inte formuleras i ett algebraiskt formelspråk. Lina förstår inte heller Ebbas mera generella invändning mot bevismetoden. Ebba beskriver ju metoden: hur man övertygar sig om att ett påstående gäller för ett visst heltal, hur man sedan antar att det gäller för ett godtyckligt valt heltal (n) för att sedan bevisa att det gäller för efterföljaren ($n+1$). Induktionsramsan, mantrat, finns i Ebbas formulering, men istället för att fungera som ett argument **för** metoden använder Ebba det som en invändning mot induktionsbevis. *"Jag förstod inte vad det är du inte förstår"* konstaterar Lina.

Forskarnas dialog med eleverna

Hur kan vi förstå Ebbas invändning mot induktionsmetoden? Hela den induktiva bevismetoden bygger på ett stegvis hypotetiskt resonemang: i det här exemplet *antar* man, utan att just då ha några belägg för det, att en viss (godtycklig men för tillfället fix) storlek på schackbräde går att täcka och visar sedan med hjälp av detta att nästa storlek också går att täcka. Kan man nu bara visa att det minsta brädet (2 × 2) kan täckas (det gör det uppenbarligen, med ett enda L) så faller därefter allting på sin plats. Då vet vi ju, tack vare vårt tidigare hypotetiska resonemang, att nästa storlek (4 × 4) också går att täcka och därigenom även 8 × 8 och så vidare. Fram till dess hänger emellertid hypotesen så att säga i luften. Å ena sidan ska man laborera med antagandet *som om* det vore sant när man försöker visa att nästa storlek på brädet alltid går att täcka, å den andra får man inte tro att antagandet verkligen *är* sant: det är ju det man ska bevisa. Det är det hypotetiska resonemanget som Ebba inte tycks acceptera: *"...jag kan inte räkna med nånting som jag inte har accepterat att det stämmer"*, säger hon.

Det kan däremot Lina, men Ebbas ideliga frågor tvingar henne att förklara sig. I en nästan platonsk dialog med Ebba försöker hon förklara hur och varför induktion fungerar. Men Ebba förstår henne inte och Lina ger slutligen upp: *"Jag förstod inte vad det är du inte förstår"*. Det är inte heller så lätt att förstå Ebbas invändningar. Ebba artikulerar, som nämnts, elementen i ett induktionsbevis, så vad är det hon inte förstår? Ebba kan inte acceptera att man gör ett hypotetiskt antagande utan att ha någon grund för det. En möjlig tolkning av hennes invändning är att hon kräver ett slags omedelbar överskådlighet hos bevis, sådan att man med en enda blick når visshet. Just det här beviset är inte överskådligt i den meningen. Även om man har förstått beviset så innebär inte det att man för sin inre syn genast ser hur en övertäckning av, säg ett 16 × 16-bräde ser ut. Ett sätt att konstruera en övertäckning är att köra beviset baklänges steg för steg. Att detta ger ett slags fiskbensmönster längs olika diagonaler är ingenting som kan inses innan konstruktionen är gjord. I ett matematiskt perspektiv är detta snarast en styrka — det innebär att man kan hantera någonting mycket komplext snabbt och enkelt utan att behöva gå in på detaljer. Däremot kan det vara problematiskt för en student som ställer höga krav på sin egen förståelse.

Eller för en student som ställer *andra* krav än den professionelle matematikern, skulle en pedagog tillägga. Poängerna med induktionsbevis framträder inte självklart för den som är nykomling i den matematiska kulturen. I vardagliga sammanhang anser vi oss övertygade när vi fått belägg för en ståndpunkt antingen via auktoriteter som vi litar på eller genom att vår erfarenhet övertygat oss. Kunskapssynen är ofta absolut: utsagor är sanna eller falska oberoende av gjorda antaganden (se Perry, 1970). För elever blir den vardagliga rationaliteten en utgångspunkt när de närmar sig ett akademiskt ämne: de sätter sin lit till lärare och till facit, de låter sig övertygas av enskilda exempel och observerar inte alltid tolkningsförutsättningar när de möter texter och uppgifter. Skillnaderna mellan kontextualiseringar gjorda i ett vardagligt och ett teoretiskt sammanhang framträder inte på något omedelbart sätt för dem (a.a.; se även Wistedt, 1994a; Halldén,1999). Hela det litterata tänkandet som präglar utbildningssamhället kan te sig främmande för elever och svårigheter att tolka diskurskraven förväxlas lätt med brister i begåvning eller fallenhet för ämnet (se Säljö & Wyndhamn, 1988a,b; Säljö 2000). En relativisering av det egna perspektivet kräver medvetenhet om att omvärlden kan tolkas på en mångfald sätt och att den egna kontextualieringen inte kan tas för given. Medvetenheten är särskilt viktig i pedagogiska sammanhang, där elever möter nya och främmande perspektiv på omvärlden. Lina har, som vi sett, svårt att relativisera sin egen förståelse av induktion, som hon uppfattar som självklar. Liknande svårigheter kan möta den professionelle, läraren för vilken den vetenskapliga rationaliteten blivit en förgivettagen grund för tänkandet.

En dialog mellan ämnen

Forskningen vi här har givit exempel på visar en variant av ämnesdidaktisk forskning som rör sig utanför gränserna för skolans grundläggande undervisning. Exemplen svarar inte mot praktiskpedagogiska problem om hur man förmedlar ett innehåll som är centralt i kursplanerna och om hur elever uppfattar, respektive missuppfattar detta innehåll, utan om mera grundläggande frågor som knyter an till teoriutveckling inom pedagogikämnet och till uppfattningar om hur människor lär sig matematik som närs inom den matematiska kulturen.

Den möjliga dialogen

Med exemplen har vi velat visa hur elever i dialog med varandra ges möjlighet att överskrida personliga och förgivettagna perspektiv. Vi har givit exempel på hur samtal kan skapa förutsättningar för kunskapsbildning, men också hur dialogen kan komma att begränsas när perspektiven på det gemensamma samtalsämnet snävas in. Vi har också givit exempel på hur en dialog mellan forskare som företräder olika ämnesperspektiv kan bidra till förståelsen av hur studenter tänker kring ett matematiskt innehåll liksom till förståelsen av de rationaliteter som utvecklats inom ett ämne. Vi glömmer också lätt att ämneskulturer, här exemplifierade av ämnena matematik och pedagogik, rymmer en variation av uppfattningar, en kulturell mångfald som många gånger döljs i den vardagliga kontakten där vi oftast tar för givet att var och en som är insatt i ämnet kan följa våra resonemang. Konstruktivister och klassiska matematiker ger inte samma svar på frågan: Vilket är talet?, frågan som 11-åringarna brottades med. När matematiker ska tolka ett empiriskt material, som ger exempel på hur elever tänker kring ett matematiskt innehåll, kan emellertid variationerna i synsätt bli tydliga — olika uppfattningar om krav som kan ställas på ett bevis, olika meningar om vad det innebär att förstå ett begrepp eller en teori. Grundantaganden som rör ämnet och lärande av ämnet kan bli föremål för reflektion.

Man kan ställa sig frågan om inte en matematiker kunde ha formulerat flera av de frågor som vi här har låtit pedagogen ge röst åt, t ex frågan "Vad är begåvning?" Visst kan en sådan fråga ställas av matematiker, och vi menar också att det är viktigt att matematiker ställer den, men för att utveckla frågan och ge den mer än en ytlig tolkning behövs beteendevetenskaplig skolning. "Vilket är talet?", är en fråga som också en pedagog kan ställa och den ställs också av eleverna i en av studierna. Men för att kunna ge frågan och elevernas hanterande av den en intressant tolkning behövs både djup och bredd i det matematiska kunnandet. Elevuppfattningar som ytligt sett ter sig lika kan framträda som mycket olika om vi berikar en pedagogisk tolkning med matematiska tolkningar som görs utifrån en djupare kunskap om innehållet som uppfattningarna rör.

Dialogförutsättningar

Inledningsvis diskuterade vi några förutsättningar för en framgångsrik dialog: det gemensamma samtalsämnet, öppenheten i dialogen, relativiseringen av perspektiv och tydligheten i kommunikationen, dvs möjligheterna för parterna att pröva gjorda tolkningar. I analysen av de två exemplen har vi försökt visa, att dessa förutsättningar inte kan ses som uttryck för en allmän och ytlig välvilja parterna emellan. Vi kan t ex inte ta för givet att samtalsämnet är gemensamt även om vi tycker oss tala om samma sak. Distinktionen uppgift/problem (se ovan, sid 15) riktar uppmärksamheten mot tolkarens referensramar: hur uppgifter kan förstås mycket olika av elever, av lärare och av professionella matematiker, vars uppfattningar också kan skilja sig sinsemellan. I en pedagogisk situation måste samtalsämnet problematiseras och vi har givit exempel på hur en sådan problematisering kan gå till, t ex när 11-åringar diskuterar en oändlig decimalutveckling.

En problematisering av samtalsämnet kräver en relativisering av referensramar. Den som deltar i en dialog måste vara beredd att argumentera för sitt synsätt, att lyfta fram antaganden och underkasta dem granskning. Men en sådan öppenhet inför alternativa sätt att uppfatta omvärlden är inte tillräcklig för att människor ska mötas. I exemplet där Lina och Ebba diskuterar induktionsbevis ser vi hur kognitiva hinder kan blockera en ömsesidig förståelse. Öppenheten kan utvecklas i en dialog, men den kan inte tas för given.

Öppenhet är med andra ord ingen personlighetsegenskap utan ett perspektiv på ett innehåll, en uppgift, ett begrepp, en teori, där den som intar perspektivet "frågar i syfte att öppna sig inför nya, dittills inte gjorda erfarenheter" (Edfeldt & Janson, 1995, sid 67). För att kunna se potentiella möjligheter i elevers utsagor måste emellertid tolkaren kunna variera referensram. Det krävs ämneskompetens för att kunna tillskriva elever intentioner som har matematisk innebörd.

Men om vi nu lyckas se ämnesrelevans i det eleverna gör och säger, hur vet vi att våra tolkningar inte är projektioner av egna uppfattningar av innehållet? Hur vet vi att Lina har "förstått induktion" eller att Elin "uppfinner divisionsalgoritmen"? Självklart kan vi inte veta. Vi har ingen direkttillgång till elevernas medvetande. Vad vi har att tillgå är deras utsagor, skriftliga och muntliga, vi har deras svar på frågor som kamrater ställer, vi har sekvenser av yttranden dokumenterade i en situation där de löser en matematisk uppgift. Det räcker emellertid inte för att rimliggöra tolkningarna. Dessa varierar som vi har sett med tolkaren.

Olika matematiker kan lägga in olika innebörder i t ex Linas agerande. En motsträvig tolkare skulle kanske säga att hon inte alls förstått induktion, eftersom hon inte kan tillämpa metoden i ett geometriskt sammanhang.

Men just detta, att perspektiv kan ställas mot varandra och tydliggöras i relation till ett empiriskt material, är själva poängen med ansatsen som vi här har velat lyfta fram. Vi är inte fria att tolka eleverna efter eget skön. Vi är bundna av ett empiriskt material, som sätter gränser för vad vi kan påstå. Tolkningarna måste finna stöd, inte bara i forskarens eget perspektiv utan också i medforskarens och i läsarens, som har möjlighet att väga analyserna mot materialet sett i ljuset av en artikulerad referensram. Den som hävdar att Lina inte har förstått induktion måste också kunna rimliggöra sin invändning, beskriva dess förutsättningar och argumentera för den med stöd i det redovisade materialet. Här har vi visserligen fått göra avkall på kravet att läsaren ska kunna pröva de framlagda tolkningarna, men den kritiske läsaren kan alltid gå till de mera fullständiga redovisningarna för att finna stöd för alternativa sätt att betrakta elevernas utsagor. Dialogen är, om inte alltid faktiskt, så åtminstone potentiellt möjlig.

Dialogens fruktbarhet

Ämnesdidaktisk forskning handlar traditionellt om skolans undervisning. Den forskning vi har givit exempel på här skulle ha relevans även om det inte förekom någon skolundervisning alls i matematik. Så länge det finns en mänsklig verksamhet som vi kan kalla matematisk är frågor om vad människor tänker om när de ägnar sig åt denna verksamhet, hur de griper sig an matematiska problem och vilka syften som ger upphov till matematisk reflektion, intressanta att belysa ur ett ämnesinternt och ur ett pedagogiskt perspektiv. Men resultaten kan också, menar vi, ha relevans för undervisningen i ämnet, på grundläggande stadier såväl som inom den högre utbildningen. Avslutningsvis vill vi diskutera vår ansats, som ett bidrag till den ämnesdidaktiska forskningen.

All skolundervisning är normativ. Normer styr valet av vad elever ska undervisas om, varför det sker och hur det bäst bör gå till. Ämnesdidaktisk forskning får därför gärna en normativ karaktär. Utgångspunkten för forskningen tas i en relativt stabil undervisningspraktik: studier av hur elever uppfattar begrepp som är centrala inom undervisningen i skolans ämnen, undersökningar av strategier för lösningen av valda matematiska problem, kartläggning av uppfattningar och missuppfattningar av viktiga utsnitt ur skolans matematikkurs är framträdande inslag i den ämnesdidaktiska forskningen.

Vi menar inte att den ansats som vi här har beskrivit ersätter sådan forskning. Den är viktig och kan öka lärares medvetenhet om sin undervisning och dess betydelse för eleverna. Men den har sina begränsningar. Den kan i förlängningen verka konserverande på praktiken, genom att vetenskapliggöra grunderna för en praxis som ytterst vilar på konventioner och beprövad erfarenhet. Genom att överskrida ramarna som ges av skolpraktiken kan vi upptäcka en potential hos elever, som inte blir synlig i ett normativt perspektiv. Vi menar inte att man nödvändigtvis ska undervisa 11-åringar om gränsvärden. Vi visar endast att det kan vara möjligt och att eleverna kan utveckla förståelse av matematiska begrepp som spränger gränserna för skolans undervisning och som därmed visar att normerna för vad, hur och varför vi undervisar i och om matematik skulle kunna vara annorlunda än de är idag.

Brottet med den normativa basen för forskningen är ett argument för fruktbarheten i vår ansats. Ett annat argument rör forskningens relevans. Att forska är att ingå i en dialog med andra forskare, där det som förenar är gemensamma samtalsämnen, intressen, frågeställningar, problem. Forskning är till sin natur diskursiv. Den ämnesdidaktiska forskningens diskurs är, traditionellt, skolorienterad. Forskaren vänder sig till kollegor med intresse för undervisningsfrågor och till lärarutbildare eller lärare som undervisar i de ämnen som berörs. Detta utesluter lätt företrädare för de vetenskapliga disciplinerna, som kan sakna både intresse och erfarenhet av skolundervisning. Vad skulle de bidra med i en sådan diskussion? Om vi menar att det är viktigt att matematiker intresserar sig för kunskapsbildning i det egna ämnet och om vi tror att deras kompetens skulle kunna ge bidrag till utvecklingen av ämnesdidaktiken, måste de också vara delaktiga när forskningsfrågorna formuleras. Om frågorna som ställs ter sig alltför lokala och den teoretiska grunden alltför ytlig sedd ur ett ämnesperspektiv, kan vi inte begära att didaktiken ska intressera forskare i matematik eller för den delen pedagogik. Vi inledde vår artikel med en anekdot och ett citat från en middag i Cambridge. "De är matematiker. Vi talar aldrig med *dem*". Vi menar att det är en olycklig och onödig slutsats. Forskningen vi här har givit exempel på visar, att vi *kan* samtala om hur barn och ungdomar närmar sig matematikämnet, om perspektiv på matematiken och på kunskapsbildning i ämnet. Vi kan i tvärvetenskapligt samarbete utveckla didaktisk kunskap om vi ställer frågor som rör ämnets företrädare och berör dem. Vi menar att också sådan forskning har sin plats inom det ämnesdidaktiska forskningsfältet.

Referenser

Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, **55**, 201-226.

Downes, W. (1984). *Language and society*. London: Fontana Paperbacks.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. von Doormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Doordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Edfeldt, Å. W., & Janson, U. (1995). *Beteendevetenskapliga förhållningssätt*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Gårding, L. (1977). *Encounters with mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.

Halldén, O. (1982). *Elevernas tolkning av skoluppgiften. En beskrivning av elevers förhållningssätt till lärares frågor*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Halldén, O. (1988). Alternative frameworks and the concept of task. Cognitive contraints in pupils' interpretations of teachers' assignments. *Scandinavian Journal of Educational Research*, **32**, 123-140.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualization. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change*. Oxford, UK: Elsevier Science Publishers.

Halldén, O., Scheja, M., & Jakobsson Öhrn, H. (2000). *Intentionell analys*. Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet, nr 64. Stockholms Universitet: Pedagogiska institutionen.

Janson, U. (1975). *Intentionalitet och medsubjektivitet*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Marton, F. (1981). Phenomenography — Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, **10**, 177-200.

Marton, F. (1986). *Fackdidaktik, vol I-III*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., Dahlgren, L-O., Svensson, L., & Säljö, R. (1977). *Inlärning och omvärldesuppfattning*. Stockholm: AWE/Gebers.

Penrose, R. (1989). *The emperor's new mind*. New York: Penguin Books.

Perry, W. G, Jr. (1970). *Intellectual and ethical development in the college years. A scheme*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Pfundt, H., & Duit, R. (1991). *Bibliography: Students' alternative frameworks and science education* (3rd ed.). Kiel: IPN.

Poincaré, H. (1956). Matematiskt skapande. *Sigma 5*, sid 2136-2145. Stockholm: Forum.

Scheja, M. (1998). Intentionell analys. En empirisk belysning av ett forskningsperspektiv. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen (magisteruppsats).

Skolöverstyrelsen (1980). *Innehållrelaterad pedagogisk forskning*. En konferensrapport. Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Smith, D. E. (1923). *History of mathematics*. London: Dover.

Snow, C. P. (1964). *The two cultures and a second look*. London: Cambridge University Press.

Säljö, R. (1989). Kommunikativ praktik och institutionell inlärning. I R. Säljö m.fl., *Som vi lär: Elva bidrag om inlärning och omvärldsuppfattning* (sid. 1-17). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prosma.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988a). A week has seven days. Or does it? On bridging linguistic openness and mathematical precision. *For the Learning of Mathematics*, **8**(3), 16-19.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988b). Cognitive operations and educational framing of tasks. School as context for arithmetic thought. *Scandinavian Journal of Educational Research*, **32**, 61-71.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1990). Problem solving, academic performance, and situated reasoning. A study of joint cognitive activity in the formal setting. *British Journal of Educational Psychology*, **60**, 245-254.

Wistedt, I. (1987). *Rum för lärande. Om elevers studier på gymnasiet*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen (doktorsavhandling).

Wistedt, I. (1994a). Everyday common sense and school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, **9**(1), 139-147.

Wistedt, I. (1994b). Reflection, communication, and learning mathematics: a case study. *Learning and Instruction*, **4**, 123-138.

Wistedt, I. (1998). *Att finna fel i ett bevis. Studenter på Chalmers D-linje löser en bevisuppgift i matematik*. Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola: Matematik och Datavetenskap.

Wistedt, I. (kommande). *Rum för samtal – Om dialogen som en möjlighet att demokratisera undervisningen*. I B. Grevholm (Red.), Matematikdidaktik. Lund: Studentlitteratur.

Wistedt, I., Brattström, G., Jacobsson, C., under medverkan av Källgården E-S. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I., Brattström, G., & Jacobsson, C. (1993). *Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I., Brattström, G., & Martinsson, M. (1996). *Vägar till matematisk förståelse i universitetsutbildning som syftar till att utjämna könsskillnader*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I., & Brattström, G. (1999). *Common sense and scientific reasoning in university students' discussions of mathematical induction*. Paper presented at the 8th EARLI conference, Götebor, Sweden, Aug. 25-29, 1999.

Wistedt, I., & Martinsson, M. (1994). *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. Ithaca: Cornell University Press.

Abstract
A dialogical approach to studies in mathematics education

It is often argued that students will learn more and get a deeper insight into a subject field if they are offered the possibility to co-operate with their peers, preferably in heterogeneous groups where a variety of experiences are taken into account. In our study we argue that such a dialogical approach to learning can also be beneficial to researchers in mathematics education. Two empirical examples are analysed in co-operation between researchers in mathematics and in education: One study of a group of three eleven-year olds confronting the concept of infinity, and one study of six groups of university students discussing mathematical proofs, more specifically mathematical induction. In the article we discuss the prerequisites of a fruitful dialogue between researchers from different subject fields and we offer an example of a research methodology applicable to a co-operative research endeavour.

We conclude that a dialogical approach to research in mathematics education can help the researcher to gain a deeper understanding of mathematics learning, based on an increased range of expertise of the researchers' combined knowledge. Furthermore, discussions between researchers with different interpretative frame-works force the researchers to provide warrants and backings to their claims, thereby eliciting specifics of their respective points of view.

Authors
Inger Wistedt, Gudrun Brattström and Mats Martinsson

Research interests

Inger Wistedt: Learning in institutionalised settings, mathematics learning and communication, higher education.
Gudrun Brattström: Number theory, statistics, and genetics.
Mats Martinsson: Algebra, mathematics learning.

Addresses
Inger Wistedt
Associate Professor
Department of Education, Stockholm University,
S-106 91 Stockholm, Sweden
Phone: +46 8 16 31 43
Fax: +46 8 15 83 54
E-mail: ingerw@ped.su.se

Gudrun Brattström
Associate Professor
Department of Mathematics, Stockholm University,
S-106 91 Stockholm, Sweden
Phone: +46 8 16 45 33
E-mail: gudrun@matematik.su.se

Mats Martinsson
Senior Lecturer
Department of Mathematics, Chalmers University of Technology
S-412 96 Göteborg, Sweden
Phone: +46 31 772 35 47
E-mail: matsm@math.chalmers.se