Lærerstudenters matematiske tenkning og utvikling i en sosial kontekst.

Problemløsning i smågrupper

Raymond Bjuland

Artikkelen er skrevet på bakgrunn av hovedoppgaven 'Problemløsningsprosesser i geometri. Lærerstudenters samarbeid i smågrupper: En dialogisk tilnærming' *(Bjuland, 1997). Målet er å identifisere hvordan studenters matematiske forståelse utvikler seg i en sosial sammenheng og ved bruk av matematisk språk i smågruppedialog. Artikkelen introduserer det teoretiske bakgrunnsmaterialet som består av fem hovedområder: problemløsning, læring gjennom samarbeid (L.G.S.), affektive sider, klasseromsforskning og sosial og kulturelle sider. En etnografisk tilnærming har vært den grunnleggende metoden for innsamlingen av det empiriske materialet, mens det er brukt en 'dialogisk tilnærming' for å tolke og analysere gruppesamtalen. Artikkelen fokuserer på fire episoder fra gruppesamtalen som gir et inntrykk av studentenes matematiske tenkning og utvikling, studentenes sosiale ferdigheter, et av studentenes matematiske gjennombrudd i løsningsprosessen og studentenes evne til å reflektere over gruppesamarbeidet. Resultatene fra analysen av gruppediskusjonen viser at studentene har utviklet sin forståelse i matematikk og sine sosiale ferdigheter. Det er et sterkt samspill mellom faglige og sosiale ferdigheter formidlet gjennom språket.*

1. Innledning

Målet med artikkelen har vært å identifisere lærerstudenters matematiske tenkning når de samarbeider om problemløsningsoppgaver i smågrupper. Målet har også vært å undersøke om studentene har utviklet sin faglige forståelse i den matematiske diskusjonen og å observere studentenes sosiale ferdigheter i gruppediskusjonen. Jeg har også studert om ulike affektive uttrykk som for eksempel glede, frustrasjon, villighet og utholdenhet til å arbeide med problemene, har vært framtredende i gruppedialogen.

Empirien stammer fra et undervisningsopplegg som ble avsluttet med et gruppeprosjekt med problemløsningsoppgaver i geometri. Det ble prøvd ut for allmennlærerstudenter i deres første semester ved en lærerhøgskole høsten 1996. Kurset hadde 105 studenter, som i prosjektet ble delt inn i 21 grupper med 5 studenter i hver gruppe.

Raymond Bjuland *er høgskolelektor ved Norsk Lærerakademi – lærerskolen, i Bergen, og doktorgradsstudent ved Universitetet i Bergen.*

Det empiriske materialet består av feltnotater fra observasjon av tre tilfeldig valgte student-grupper med 8 skoletimer i hver gruppe. Båndopptak med 8 skoletimer i hver av de tre observasjonsgruppene samt studentenes grupperapporter (21 rapporter).

Jeg har foretatt et kvalitativt studium av ei studentgruppe hvor jeg har analysert gruppesamtalen og rekonstruert studentenes løsningsprosess med oppgavene. På denne måten har jeg prøvd å identifisere studentenes matematiske tenkning, deres faglige utvikling og deres sosiale ferdigheter. Nedenfor presenteres fire episoder som viser ulike sider fra gruppesamtalen. Til slutt gir jeg en oppsummering av resultatene.

2. Teoretisk bakgrunn

Det teoretiske bakgrunnsmaterialet belyser fem hovedområder som alle spiller en sentral rolle når det gjelder elevers møte med problemløsningsoppgaver i en sosial kontekst. Disse fem hovedområdene er: problemløsning, læring gjennom samarbeid (L.G.S.), affektive sider, klasseromsforskning og sosiale og kulturelle sider. Forskningslitteraturen er svært omfattende på flere av disse hovedområdene og ulike forskningstradisjoner har forskjellig tilnærming til emnene. Dette er særlig tilfelle på det affektive området. I denne artikkelen sentrerer jeg derfor teorigjennomgangen til noen sentrale undersøkelser.

2.1 Problemløsning

Problemløsning er et begrep som er blitt viet omfattende oppmerksomhet i den amerikanske litteraturen fra 1970 og fram til idag (Silver 1987; Schoenfeld 1985, 1992). I forskningslitteraturen tolkes problemløsningsbegrepet på mange ulike måter (Schoenfeld, 1992). Han peker på at forståelsen av dette begrepet spenner fra en oppfattning av problemløsning som rene rutineoppgaver til en oppfattning at problemløsning er oppgaver der en får muligheten til å arbeide med matematikk som profesjonelle.

Schoenfeld definerer et matematisk problem på følgende måte:

> *'For any student, a mathematical problem is a task (a) in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain the resolution, and (b) for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution.'*
> *(Schoenfeld, 1993 s. 71)*

Selv om denne definisjonen er enkel, så innebærer den noen viktige forutsetninger. For det første så er elevenes engasjement viktig når de arbeider med problemløsningsoppgaver. Schoenfeld (1993) understreker også at om en oppgave er et problem for en elev, avhenger det av hvilke kunnskaper eleven har. For det tredje så mener han at de fleste oppgavene i lærebøker ikke er problemer etter hans definisjon. Schoenfeld kaller mange av oppgavene fra ulike lærebøker for 'exercises', siden slike oppgaver ofte kan løses ved hjelp av en kjent algoritme. Han poengterer at en problemløsningsoppgave skal konfrontere elevene med en vanskelighet. Elevene vet hvor de er og hva de skal fram til, men de har ingen ferdig algoritme for å komme fram til løsningen. Det er denne forståelsen av problemløsningsbegrepet som danner grunnlag for mitt arbeid.

Metakognisjon er et annet begrep som har hatt en sentral plass i den amerikanske litteraturen fra 1980 og fram til idag (Silver 1987; Schoenfeld 1985, 1992). Dette begrepet som er nært knyttet til problemløsning, har også ulike definisjoner i forskningslitteraturen. I følge Barkatsas & Hunting (1996) er det imidlertid en definisjon som er allment akseptert siden den inkorporerer to viktige sider med metakognisjon, nemlig å overvåke og styre sine egne kognitive prosesser. En viktig del av mitt arbeid er å studere lærerstudentenes metakognitive ferdigheter når de arbeider med de åpne problemløsningsoppgavene. Studentenes overvåking og refleksjon over løsningsprosessen er et viktig utgangspunkt for min analyse.

To modeller som viser ulike trinn i den matematiske løsningsprosessen har vært basis for arbeidet (Polya, 1945, Borgersen, 1994). Disse modellene viser hele prosessen i arbeidet med et matematisk problem. Jeg finner det med bakgrunn i min fagoppfattelse viktig at studenter / elever får erfaring i å oppleve matematikk gjennom arbeid med matematiske problemer. Schoenfeld (1985, 1992) er opptatt av å utvikle et begrepsapparat for å analysere kompleks problemløsningsatferd. Han stiller to viktige spørsmål: Hva vil det si å tenke matematisk? Hvordan kan vi hjelpe elever til å gjøre det? Begrepsapparatet hans har fem kategorier (matematiske ressurser, problemløsningsstrategier, metakognitive ferdigheter, system av forestillinger og sosialisering) og disse danner grunnlaget for min analyse av studentenes matematiske tenkning.

Lester (1994) sammenfatter hva ulike forskningsarbeid innen problemløsning har kommet fram til fra 1970 - 1994. Disse viser blant annet at studenter må løse mange problemer for å forbedre sine ferdigheter i problemløsning og at det tar tid å utvikle problemløsningsatferd. Lester trekker også fram at hvis elever skal ha fordel av en undervisning som baserer seg på problemløsning, har det stor betydning at læreren er engasjert og at læreren selv mener at problemløsning er viktig. Undersøkelsen til Grouws & Cramer (1989) bekrefter også dette.

Lester sin anbefaling er at det må forskes mer på undervisning i problemløsning. Han trekker fram at det er viktig å arbeide videre med lærerens rolle og samspillet mellom lærer / elev og elev / elev. Forskning må dessuten fokusere mer på grupper og hele klasser i stedet for enkelt- elever. Det anbefales altså at søkelyset rettes mot gruppenivå i stedet for individnivå.

2.2 Læring gjennom samarbeid (L.G.S.)

Sosialpsykologen Kurt Lewin var opptatt av samarbeid i grupper på 30-tallet og 40- tallet. Morton Deutch (1949) som var student av Lewin, utviklet dette videre. Tradisjonen fra Lewin og Deutch ble videreført på 60 - 70 - og 80 tallet i retning av praktiske, metodiske konsekvenser for undervisning på alle nivå i skolen. En metode kalt 'Learning Together' som er utviklet av David og Roger Johnson ved universitetet i Minnesota, har inspirert norske forskere til å utvikle L.G.S. i norsk skole (Haugaløkken, 1987 ; Digre & Solerød, 1993).

Johnson & Johnson (1990) gir råd om hvordan L.G.S kan brukes i matematikk. De antyder noen grunnleggende elementer i L.G.S. Disse elementene (positiv gjensidig avhengighet, samspillet i gruppa, individuelt ansvar, mellommenneskelige ferdigheter, gruppeferdigheter og gruppeprosessering) har vært utgangspunktet for min analyse når det gjelder å identifisere studentenes sosiale ferdigheter.

2.3 Affektive sider

Jeg avgrenser her til affektive uttrykk som kan relateres til matematikk. I mitt arbeid er jeg spesielt interessert i å undersøke studentenes villighet, utholdenhet og glede ved å løse de gitte problemløsningsoppgavene. Jeg har også undersøkt hvilke emosjonelle responser som kommer fram hos studentene i deres matematiske løsningsprosess. Det er naturlig at de vil oppleve en viss frustrasjon hvis de bruker lang tid til å løse problemene. Jeg har avgrenset den affektive litteraturen til McLeods (1992) affektive rammeverk som inneholder tre hovedbegreper: 'beliefs' (forestillinger), 'attitudes' (holdninger) og 'emotions' (emosjonelle responser). Det er disse tre affektive komponentene sammen med de affektive egenskapene som er nevnt ovenfor, som danner grunnlag for mitt arbeid på dette feltet. McLeod (1992) understreker imidlertid at det er en rekke andre begreper som har tilknytning til det affektive området og som kan ha betydning for en elevs arbeid med matematikk-oppgaver.

En grundig innføring i beslektede begreper til det affektive området har blitt gjort av Svege (1996).

Flere studier viser at en persons forestillinger spiller en avgjørende rolle for å lykkes med å lære matematikk (Schoenfeld, 1985; Silver, 1985; Pehkonen & Törner, 1996). På en annen side kan slike forestillinger også være en hindring for effektiv læring av matematikk (Pehkonen & Törner, 1996). En norsk studie har undersøkt studenters forestillinger, holdninger og følelser overfor matematikk (Svege, 1997).

Det gjenstår mye forskningsarbeid på det affektive området (McLeod, 1992). Han understreker at forskning må være opptatt av sammenhengen mellom affektive responser og utviklingen av problemløsningsferdigheter. McLeod konkluderer med at hvis framtidig forskning på affektive sider kan knyttes nærmere til kognitive læringsfaktorer, vil det affektive området vies større oppmerksomhet i utviklingen av læreplaner, utdannelse av lærere og forskning på undervisning og læring.

2.4 Klasseromsforskning

I de senere år har forskere fra mange ulike teoretiske tradisjoner fokusert mer på virksomheten i klasserommet. Denne virksomheten er et komplekst system av mange ulike faktorer. Det er allikevel to begreper som er viktige: kommunikasjon og læring. Kommunikasjon mellom mennesker er en mangesidig prosess og et samspill som foregår i flere dimensjoner. Den sosiale samhandlingen mellom lærer/elev og elev/elev har avgjørende betydning for det som læres i klasserommet. Cestari (1998) har brukt dialogisk tilnærming for å undersøke kommunikasjon i klasserommet. Målet med hennes undersøkelse var å identifisere hvordan matematiske begrep utvikles gjennom språket, i dialog mellom lærer og elev (se også Cestari, 1997).

Innenfor dette hovedområdet retter jeg oppmerksomheten mot ulike klasseromssituasjoner der læreren lar elevene være aktive i læringsprosessen slik at elevene får oppleve skapende matematikk (Lampert, 1990; Johnsen, 1996). I klasseromssituasjoner som Lampert og Johnsen beskriver, vil kommunikasjonen mellom lærer og elev og mellom medelever bære preg av at læreren er mer en veileder i den matematiske diskusjonen enn en person som overfører den matematiske kunnskapen til elevene. Mitt arbeid retter søkelyset mot den sosiale interaksjonen mellom studenter som arbeider med matematikk i en gruppekontekst. Jeg studerer hvordan hver enkelt student bidrar med innspill og ideer som fører dem videre i løsningsprosessen. I denne sosiale konteksten kan ulike meninger bli diskutert og studentene kan utvikle sin matematiske begrepsforståelse.

2.5 Sosiale og kulturelle sider

Flere forskere har i de senere årene vært opptatt av læring av matematikk i en kulturell kontekst. D'Ambrosio (1991) fokuserer på 'ethnomathematics' som et viktig begrep, som har fått økende oppmerksomhet. Bishop (1988) understreker at det for få år siden var vanlig å betrakte matematikk som 'culture free' kunnskap. Generelle betraktningene om hvordan matematikk oppfattes i ulike kulturer kan, i følge Bishop, overføres til barn og elevers læring.

Bishop hevder at barn har en lokal kultur eller hjemmekultur som han kaller 'enculturation', men de blir også presentert for en fremmed kultur (acculturation) som er ulik deres lokale kultur. Bishop mener at det er viktig at undervisning tar utgangspunkt i elevenes bakgrunn og deres hjemmekultur. Han understreker at vi kjenner godt til hvor negativt det kan være for elever som bare erfarer en matematikkundervisning som er fjern fra deres egen virkelighet.

Et forskningsarbeid har sammenlignet barns arbeid med matematikk som gateselgere i Recife (Brasil) med liknende matematikkoppgaver gjort i en klasseromskontekst (Carraher, Carraher, & Schliemann,1985). Som gateselgere må disse barna løse mange ulike matematikkoppgaver vanligvis uten at en kan benytte seg av papir og blyant. Undersøkelsen avslørte at barna brukte metoder til å løse oppgavene på som var forskjellige fra de som ble undervist på skolen. Forskerne tror ikke at konklusjonen på denne undersøkelsen er at skolen skal tillate barn å bare utvikle sine egne beregningsrutiner uten å ta hensyn til de konvensjonelle metodene som er utviklet i kulturen. De understreker imidlertid at skolematematikken må ta utgangspunkt i praktiske og reelle situasjoner slik at faget blir knyttet mer opp til barnas egen bakgrunn.

Lave, Smith & Butler (1989) fokuserer på hvor viktig det er at en elev tilegner seg kunnskap på samme måten som en lærling i et praktisk yrke. De understreker at et sentralt aspekt i denne læringsmodellen er at læring er en situasjonsbestemt konstruksjonsaktivitet. Elevene tar med seg erfaringer fra sin egen hverdag inn i skolen. Denne lærlingemodellen blir, i følge Lave & Wenger (1991), kalt for 'legitimate peripheral participation'. De understreker at læring er en situasjonsbestemt aktivitet og denne modellen er opptatt av den prosessen som det er for en nykommer som skal bli en del av et praktisk samfunn. Lave & Wenger poengterer at nykommerens intensjoner med å lære blir forsterket, og hensikten med læringen blir formet av prosessen mot å bli et fullverdig medlem av den sosial-kulturelle praksis.

3. Metode

I undersøkelsen har jeg foretatt et kvalitativt studium av ei studentgruppe hvor jeg har analysert gruppesamtalen og rekonstruert studentenes løsningsprosess med problemløsningsoppgavene. En etnografisk tilnærming har vært den grunnleggende metoden for innsamlingen av data.

I mitt arbeid er båndopptak helt avgjørende for å kunne analysere den matematiske diskusjonen mellom gruppemedlemmene. Jeg benytter meg av en 'dialogisk tilnærming' (*dialogical approach*) til datamaterialet for å kunne tolke og analysere gruppesamtalen. En dialog karakteriseres ved en interaksjon, i tidsmessig og romlig nærhet, mellom to eller flere deltakere som er bevisst på og orientert mot hverandre i en kommunikasjonshandling (Markova, 1990).

Min analyse bygger på definisjonen til Markova der jeg studerer på hvilken måte kommunikasjonen mellom studentene har innflytelse på deres læringsprosess. Jeg analyserer derfor hva hvert enkelt gruppemedlem sier ved å studere det som blir sagt før og etter utsagnet i gruppedialogen. På denne måten blir hver enkelt 'utterance' analysert ved at den blir satt inn i en videre kontekst. Vi kan dermed få et inntrykk av om innspill eller ideer som har kommet fram tidligere i dialogen, har hatt betydning for hva som blir sagt i den enkelte 'utterance'. På samme måten kan vi studere hvilken betydning et utsagn har for den videre samtalen. Det er på denne måten at vi kan analysere om den sosiale interaksjonen mellom gruppemedlemmene hjelper dem til å konstruere og utvikle sin kunnskap sammen.

I undersøkelsen har jeg analysert dialogen i gruppa og fokusert på studentenes læringsprosess med problemene. Jeg har også foretatt en grundig rekonstruksjon av studentenes løsningsprosess sett fra et matematisk synspunkt. Både analysen av gruppesamtalen og rekonstruksjonen bygger på mine feltnotater, transkripsjonen av gruppesamtalen og studentenes egen prosjektrapport.

Transkripsjonen er delt inn i episoder fra hver av de fire gruppesamlingene som kan knyttes til målene for undersøkelsen. Ny episode starter når det er et naturlig skifte i samtalen. Dette kan for eksempel være en ny ide, et nytt innspill, et nytt spørsmål som genererer ny tenkning eller det kan være et oppbrudd som for eksempel en pause.

Hver episode har blitt analysert i tre nivåer. Det første nivået beskriver hva gruppemedlemmene sier, mens jeg i det andre nivået ønsker å tolke hva som blir sagt. I det tredje nivået har jeg diskutert min beskrivelse og tolkning og knyttet dette til annen relevant forskningslitteratur. Nivåene skal ikke oppfattes som å være adskilte, men sammen skal de danne en helhet av den enkelte episode.

4. Konteksten for undersøkelsen

NLA-lærerhøgskolen er en ny kristen lærerhøgskole som startet opp høsten 1996. Det ble tatt opp 105 studenter, og blant disse omtrent en femdel gutter. Det vil sannsynligvis bli tatt opp 100 studenter hvert år framover til en har 400 studenter ved skolen.

Selve undervisningen er lagt opp ved at hvert fag får sin faste undervisningsdag. Dette er gjort for å ha muligheten til å kunne arbeide med ulike undervisningsopplegg over flere timer og for at studentene skal kunne konsentrere seg om et fag per dag. Matematikkundervisningen foregår hver tirsdag fra kl.9.00 til 14.45, og det er opp til lærerne hvordan de ønsker å organisere arbeidet i løpet av dagen.

Samarbeid i smågrupper er en sentral del av undervisningsformen ved skolen. Administrasjonen ved skolen har ansvar for gruppeinndelingen. Studentene ble delt inn i 21 grupper med 5 studenter i hver gruppe. Gruppene ble delt inn i alfabetisk rekkefølge etter etternavn. Gruppesammensetningen er altså en ramme for mitt forskningsarbeid siden jeg ikke har hatt innflytelse på måten dette er blitt gjort på. Administrasjonen delte også studentene inn i tre klasser med syv grupper i hver klasse.

Det var naturlig at de tre klassene hadde gruppesamlingene på ulike tider i løpet av prosjektperioden siden de skulle ha klasseromsundervisning parallellt med gjennomføringen av prosjektet. Det ville også være mulig for meg å observere ei gruppe fra hver klasse ved en slik ordning. På denne måten ble dette en ramme for hvilke grupper som kunne delta i prosjektet.

Jeg var lærer for tre av studentene i videregående skole, så deres grupper ble holdt utenfor min undersøkelse. Det gjenstod dermed seks mulige grupper fra hver av de tre klassene. Tre observasjonsgrupper samt en rekke reservegrupper ble bestemt ved loddtrekning.

En av matematikklærerne (Sve) ved skolen fikk ansvar for å spørre studentene i de gruppene som ble trukket ut om de var villige til å delta. Han informerte de tre gruppene om min tilstedeværelse og at samtalen ville bli tatt opp på bånd. Sve understreket at det ville bli gitt full anonymitet på personnivå. Han fikk positive svar fra studentene i de tre gruppene, og de skrev alle under på en erklæring om at de var blitt informert om prosjektet og at de hadde sagt seg villige til å delta.

I prosjektperioden fikk alle gruppene eget grupperom siden det bare var en klasse som hadde fått tildelt det samme gruppetidspunktet. Det var imidlertid ikke tavle på alle grupperommene. Ledelsen ved skolen hadde bestilt inn tavler, men de kom ikke tidsnok til prosjektet.

Grupperommene som manglet tavle, ble utstyrt med ei stor tegneblokk som fungerte som ei slags reservetavle. Observasjonsgruppene hadde imidlertid tavle på grupperommet.

Jeg brukte de samme prosjektoppgavene som ble benyttet på et tilsvarende gruppeprosjekt ved Høgskolen i Agder våren 1996. Gruppeprosjektet i Kristiansand er en del av et geometrikurs på 3 vekttall som studentene tar i sitt andre semester. Det er også mulig for lærerstudenter å følge dette kurset. Grunnen til at jeg valgte de samme oppgavene var at jeg fikk muligheten til å observere ei gruppe som arbeidet med disse problemløsningsoppgavene i Kristiansand, og jeg fikk dermed en pekepinn om oppgavenes vanskelighetsgrad. Etter grundig refleksjon over oppgavene etter at jeg var ferdig med observasjonen i denne gruppa, ble jeg overbevist om at disse problemene kunne brukes i mitt prosjekt.

Det ble avsatt to skoletimer til å arbeide med prosjektoppgavene den 1.10, 8.10, 10.10 og 15.10 slik at studentene fikk en ramme på 8 skoletimer. Oppgaveløsningen skulle bare foregå på disse tidspunktene. Vi satte opp tidspunkt for gruppesamlingene og fordelte de enkelte klassene slik at gruppetidspunktet varierte fra dag til dag for hver klasse. Dette var nødvendig for at ikke de samme gruppene skulle starte med samlinger på enten begynnelsen eller slutten av dagen.

Hver gruppe skulle skrive en fellesrapport som ble vurdert til bestått eller ikke bestått. Rapporten skulle inneholde seks ulike deler, og hver del ble vurdert ved å benytte seg av en bokstavkode [God prosessbeskrivelse (P), ufullstendig prosessbeskrivelse (p). En tilsvarende vurdering ble gitt på de fem andre kategoriene, analyse (A, a), logg (L, l), oppgaveløsning / bevis (B, b), generalisering (G, g) og evaluering (E, e)]. Jeg poengterte at det viktigste var at hver gruppe gjorde et ærlig arbeid selv om de ikke klarte å løse alle deloppgavene. Studentene fikk også vite at prosessen og konklusjonen på det arbeidet de hadde gjort var det viktigste med prosjektet.

5. Presentasjon av data

Jeg vil her introdusere fire episoder fra gruppesamtalen som belyser viktige sider ved undersøkelsen. Den første episoden fokuserer på studentenes matematiske tenkning og utvikling, mens den andre episoden gir et inntrykk av studentenes sosiale ferdigheter. Videre ser jeg på en episode der studentene opplever et matematisk gjennombrudd. Den fjerde episoden illustrerer studentenes evne til å reflektere over gruppesamarbeidet.

5.1 Studentenes matematiske tenkning og utvikling

Studentene har arbeidet en tid med følgende oppgave:
Oppgave *1*

A. Velg et punkt P i planet. Konstruer en likesida trekant slik at P er et indre punkt og slik at avstanden fra P til sidene i trekanten er h.h.vis 3, 5 og 7 cm.

B. Velg en vilkårlig likesida trekant ABC. La P være et indre punkt. La d_a, d_b, d_c være avstandene fra P til sidene i trekanten (d_a er avstanden fra P til sida som er motstående til A, etc.)

a) Velg ulike plasseringer av P og mål d_a, d_b, d_c hver gang. Lag tabell og let etter mønster.
Prøv å formulere en hypotese

b) Prøv å bevise hypotesen i a).

c) Prøv å generalisere problemet ovenfor

Utgangspunktet for denne episoden er at gruppemedlemmene har startet arbeidet med oppgave 1B. De har diskutert oppgaveformuleringen og sammen har de kommet fram til hver sin tegning av den likesida trekanten. Noen av gruppemedlemmene har startet med å diskutere hvordan de gitte avstandene skal måles, men det er først på dette tidspunktet at alle er klare til å gjøre målingene. Roy er nettopp ferdig med å hjelpe Gry slik at hun har fått fram en riktig figur.

235. Roy:	så har vi då d_a, d_b, d_c ..det e den avstanden fra P til sidene i trekanten..
236.	vi må beskriva da at det den korteste avstanden ut te sidene..vi har valgt
237. Gry:	å så har vi lagt..d
238. Liv:	kordan vet du at det e nitti grader
239. Roy:	Nei eg bare holdt den i forhold til den der..det e ikkje så nøyaktig
240. Unn:	nitti grader..har det noe med saken å gjøre
241. Roy:	alså for å få den kort..(sier noe samtidig)
242. Liv:	nitti grader e korteste vei
243. Unn:	ja men koffor ikkje ta han rett ut der?
244. Roy:	Hmm?
245. Unn:	koffer ta han opp der?
246. Liv:	Nitti grader e korteste vei
247. Roy:	nitti grader på den linjå der (samtidig)
248. Unn:	fra den ja
249. Mia:	Ska han stå nitti grader å inn?
250. Liv:	ja nitti grader e den korteste veien

(Sekvensen (251) - (257) - diskusjon om måling fra P til trekantside)

258. Roy: No blir han halv..ja..ja..det blir eeh...
259. Unn: Men dette synes ikkje eg..dette synes eg e direkte ulogisk for meg
260. for det at hvis eg sku målt dette her sant..
261. Roy: sånn omtrent blir an
262. Unn: så ville eg jo bare tatt..lagt linjalen der å sagt kor langt det e rett ut
263. Liv: men det e ikkje korteste veien..
264. Unn: Eg ville nå bare ha gjort sånn eg..om det e nitti elle seksti grader..
265. det e egentlig likegyldig for meg..
266. Roy: men då..då blir det jo forskjellig avstand då
267. Unn: ka avstand?
268. Liv: ja.. (samtidig med Roy - ikke hørbart)
269. Roy: alså hvis det e seksti grader så blir det lenger avstand..
270. Unn: Eg kan jo måle sånn og hvis eg vil
271. Roy: ja..
272. Unn: siden det ikkje står noe i oppgaven så syns eg det e ulogisk å bare måle rett ut
273. Roy: ja å det må vi gjer nå men..men
274. Liv: Men koffor målte du rett ut sånn då?
275. Unn: Nei det vett eg egentlig ikkje..det e et godt spørsmål men det kan alså..
276. Roy: Hmm?
277. Unn: Nei det va bare helt tilfeldig at eg gjor sånn..men eeh..vi må jo finne..
278. må ikkje vi bestemme oss likt om sånn?
279. Roy: Vi må bestemme oss for at de tre vinklane e like iallfall..hvis vi ska
280. kunna finne nåke forhold imellom de...vi kan ikkje ha en tretti graders
281. vinkel sånn å så en seksti å en nitti..det blir..de tre vinklane må være
282 like hvis vi ska kunna finna nåke system..
283. Unn: ja ska vi ta alle..
284. Roy: for alle tilfellene
285. Liv: Mmm
286. Unn: men då ska eg ha nitti å tretti grader..det blir jo..rett opp sånn då..
287. Roy: Mmm

Denne episoden viser oss at studentene er interessert i å måle avstandene fra punktet P til trekantsidene. De ønsker å lage tabell, men de stopper opp i arbeidet siden de er uenige om hvordan de skal forstå avstanden fra et punkt til ei linje. Roy og Liv mener at de må måle lengden av normalene ned på trekantsidene, og de understreker at dette er den korteste avstanden. Unn bemerker at hun har til hensikt å legge linjalen vannrett og måle denne avstanden fra punktet P til trekantsida. Gruppemedlemmene får dermed en spennende diskusjon om dette begrepet, og de er litt frustrerte over at ikke oppgaven spesifiserer hvilken avstand de skal måle. Det kan se ut som om studentene gjennom denne samtalen gradvis får en økt forståelse for avstandsbegrepet, men de mangler fortsatt den matematisk stringente definisjonen av dette begrepet i sitt kunnskapsinventar. Studentene utfordrer hverandre til å gjøre greie for sine ulike oppfatninger av dette begrepet. Vi ser imidlertid at studentene blir enige om at de må velge den samme avstanden når de skal utføre målingene hvis de skal kunne se sammenhenger og sammenlikne resultat. De bestemmer seg for å måle lengden av normalen fra punktet P til ei trekantside som er den korteste avstanden. Gruppemedlemmene har brukt en god stund på denne begrepsdiskusjonen, og dette illustrerer at det tar tid å lære seg nye matematiske begreper. Samtalen har gitt oss et interessant innblikk i hvordan studentene arbeider med å tilegne seg kunnskap i en sosial kontekst.

Bauersfeld (1980) hevder at matematisk argumentasjon som kommer fram fra meningsutveksling gjennom menneskelig samhandling er en skjult dimensjon som kan identifiseres i en klasseromskontekst. Han understreker at elever utvikler og konstruerer sin kunnskap gjennom den sosiale samhandlingen. Diskusjonen mellom studentene viser oss imidlertid at det tar tid å konstruere slike begrep i sin egen bevissthet. Kanskje kunne det ha vært hensiktsmessig at studentene på dette tidspunktet i løsningsprosessen kunne ha snakket med en lærer og samtalt med han om dette begrepet. De hadde nå vært svært mottakelige for en diskusjon om dette begrepet. På en annen side så har diskusjonen så langt vist at de har blitt svært motiverte til å finne ut av dette selv. Det er spennende å legge merke til hvor mye studentene klarer å finne ut av selv når det gjelder matematiske begreper hvis de bare får tid til å tenke og reflektere over en oppgave. Diskusjonen har vist at studentene har vært i en kontinuerlig læringsprosess, og kanskje det er lurt at de i denne sosiale konteksten får anledning til å konvergere mot en økt forståelse av matematiske begreper uten at en lærer blander seg for mye inn i samtalen. Det kan se ut som om studentene virkelig utvikler sin matematiske forståelse og er sammen om å ta ansvar for læreprosessen.

Gruppediskusjonen viser at det er mulig å arbeide med matematikk i smågrupper på en slik måte at studentene er bevisste på å respektere hverandres innspill. Når de får anledning til å arbeide med problemløsningsoppgaver på denne måten, kommer flere matematiske begreper fram i diskusjonen.

For mange lærere er kanskje tidsaspektet det viktigste argumentet for å fortsette en tradisjonell undervisningsform. Selv om det tar tid for ei gruppe studenter å lære seg nye begreper i en slik sosialkonstruktivistisk kontekst, er det rimelig å tro at de utvikler seg til å bruke det matematiske språket og til å tenke matematisk.

Det er viktig for lærere som ønsker å benytte seg av en induktiv undervisningsform enten i smågrupper eller i en klasseromskontekst at de er bevisste nettopp på at det tar tid for elever å lære seg nye begreper. Samtidig ser vi hvor fundamentalt det er at elever får muligheter til å arbeide sammen på denne måten. Mye tyder på at interesse og motivasjon for ulike matematiske oppgaver skapes i en slik dialog mellom elever. Det er også viktig at lærere som ønsker å bruke gruppearbeid på denne måten, bruker noe tid på slutten av timen til en oppsummering. På denne måten kan elever og lærer i fellesskap avklare eventuelle misoppfatninger og vanskeligheter som har oppstått i løsningsprosessen.

5.2 Studentenes sosiale ferdigheter

Denne episoden viser starten på den 2. gruppesamlingen. Den gir et innblikk i studentenes sosiale ferdigheter.

Selv om bare fire av studentene har ankommet, så starter de opp presis klokka 9.00. Det siste gruppemedlemmet Mia kommer kl.9.04, og da er denne episoden allerede ferdig. Dette illustrerer hvor raskt studentene starter opp arbeidet i gruppa. De kunne jo bare ha sittet noen minutter og sett om Mia dukket opp. Det å starte presis er en viktig egenskap å ta med seg når de som framtidige lærere skal ut i skolen. Vi må selvsagt ta i betraktning at observatør og båndopptaker kan ha hatt en viss innflytelse for deres punktlighet, men episoden er for meg en indikator på at studentene er bevisste på å ta ansvar for egen læring.

1. Gry:	Ska eg ta meg av skrivingen idag da?
2. Liv:	Ja det kan du godt gjøre
3. Roy:	Flott Gry!
4. Unn:	Ska du..ska du se det fra tirsdag?
5. Gry:	ja
6. Liv:	Har du gjort det der hjemme?
7. Unn:	Nei..nei eg har ikkje ført det inn eg holder på med det
8. Liv:	Mmm
9. Unn:	Men det kan eg ta..
10. Gry:	Før du har gjort det
11. Liv:	Vi begynte å forklare den der oppgaven der forrige gang..det ble jo bare
12. Unn:	Det e bare sånn vi har gjort de andre gangene
13. Gry:	Det e alt vi gjør
14. Unn:	ja
15. Gry:	ja..ja (litt høyere - signaliserer at hun har forstått hva hun skal gjøre)
16. Roy:	okey
17. Unn:	Då bejynner vi på oppgave ein b

Gruppesamlingen starter med at Gry sier at hun kan ta seg av 'skrivingen i dag' (1). Hun var ikke tilstede på den første samlingen, men her tar hun ansvar med en gang når hun tilbyr seg å skrive prosessbeskrivelsen. Liv har ikke noe imot dette (2), mens Roy gir Gry ros for at hun ønsker å ta på seg denne arbeidsoppgaven. Unn viser at hun ønsker å hjelpe Gry, når hun tilbyr Gry å se det de skrev på siste gruppesamling (4). Det kan se ut som om alle gruppemedlemmene bidrar til å etablere et godt utgangspunkt for den sosiale interaksjonen i denne innledningssekvensen (1) - (5). Både Liv, Roy og Unn gir altså respons på Gry sitt initiativ (1), og det kan virke som om hver respons er viktig for den videre samtalen. Det er sikkert ikke vanskelig å skjønne at de to første responsene hjelper både Gry og de andre gruppemedlemmene til å våge og ta nye initiativ senere i gruppesamtalen. Unn sin respons (4) viser at gruppemedlemmene ikke bare gir ros, men de ønsker konkret å hjelpe hverandre til å gjøre et best mulig arbeid. Det å ta på seg arbeidsoppgaver, gi ros og oppmuntringer og hjelpe hverandre er, i følge Johnson & Johnson (1990), viktige sosiale ferdigheter som er avgjørende for at et gruppesamarbeid skal fungere.

Sekvensen (6) - (9) viser Unn og Livs samtale om prosessbeskrivelsen fra forrige gruppesamling, mens i den neste sekvensen (10) - (15), så får Gry vite hvordan hun skal skrive prosessen.

Gruppesamtalen viser at Gry raskt forstår hvordan hun skal skrive prosessbeskrivelsen (13). Det kan virke som om hun er litt forundret over at dette ikke er mer omfattende, men Unn bekrefter at det er på denne måten de har gjort dette tidligere (14). Gry hever stemmen og gjentar ordet 'ja' (15), og med dette signaliserer Gry at hun er klar til starte opp med den matematiske oppgaven. Roy markerer dermed at alle er klare til å komme igang med oppgaven (16). Vi får her bekreftet hvordan gruppemedlemmene har til hensikt å arbeide. Ingen av studentene har startet arbeidet med oppgaven før alle i gruppa er klare, og dette viser at de ønsker å arbeide sammen slik at alle kan delta i løsningsprosessen. Unn stadfester at nå starter de opp med oppgave 1B (17). Dette viser at studentene nå er klare til å inkludere det matematiske perspektivet i den sosiale interaksjonen.

Dialogen har vist at studentene har tilegnet seg gode sosiale ferdigheter. Vi har sett hvordan studentene gir ros, tar på seg ulike arbeidsoppgaver, hjelper hverandre og venter til at alle er klare til å komme igang med den matematiske oppgaven. I følge Johnson & Johnson (1990), er dette fundamentale faktorer for at et gruppesamarbeid skal fungere. Studentene har tydelig etablert et godt sosialt samspill som danner basis for den videre matematiske diskusjonen.

Det er viktig at vi som er lærere, bruker tid på å hjelpe våre elever til å utvikle gode sosiale ferdigheter hvis vi ønsker å bruke en undervisningsform basert på smågrupper. Slike ferdigheter er helt avgjørende for at et gruppesamarbeid skal fungere. En lærer bør altså ha en forberedende undervisningssekvens der han klargjør hvilke sosiale ferdigheter elevene skal prøve å inkludere i deres arbeid med matematikk. For en lærer er det viktig å være klar over at det tar tid å utvikle slike ferdigheter, men ved å være bevisst på å utvikle sosiale ferdigheter i et gruppesamarbeid, kan man kanskje se resultater på lengre sikt. Det er viktig å understreke at lærere som ønsker å arbeide med matematikk i smågrupper, bør ha et overordnet perspektiv på all sin undervisning der det å etablere et trygt og åpent læringsmiljø er helt grunnleggende før andre spesifikke sosiale ferdigheter kan utvikles hos elevene.

5.3 Gjennombrudd i løsningsprosessen

Den neste episoden er hentet fra den 3. gruppesamlingen der studentene arbeider med følgende problem:

Oppgave 3

Gitt en rettvinkla trekant ABC ($\angle B = 90°$) og en halvsirkel Ω med sentrum O og diameter AQ der Q ligger på linjestykket AB. Punktene P ($P \neq A$) og R på Ω er gitt ved at P også ligger på AC og OR er vinkelrett på AB.

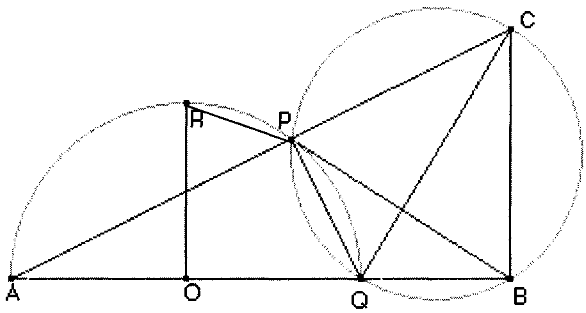
a) *Bestem $\angle APR$ og $\angle QPC$*

b) *Begrunn at $\angle BQC = \angle BPC$*

c) *Vis at hvis B, P, R er kolineære (ligger på linje), så er BC og BQ like lange.*

d) *Formuler det omvendte av setningen i c). Undersøk om dette er en setning.*

Bakgrunnen for denne episoden er at gruppemedlemmene har arbeidet ei stund med oppgave 3b. Studentene har oppdaget firkant QBCP (se figur), og Liv er temmelig sikker på at dette er en syklisk firkant. Liv har vært aktiv i løsningsprosessen ved å stadig tegne nye figurer der hun betrakter denne firkanten. Flere andre innspill som for eksempel formlikhet, sentralvinkel, periferivinkel og speiling har også kommet fram i den matematiske diskusjonen. Når denne episoden starter, har de omtrent 30 minutter igjen av den oppsatte gruppetida.



933. Liv: Vi har en APR som e fem å førti der så har vi
934. Roy: Det va derfor vi kunne bestemma
935. Liv: så e det nitti grader der..så e det hundre å åtti grader der sant
936. Roy: Det va derfor vi kunne bestemma vinkel PQC..QPC..ja men eeh..vi har
937. den firkanten og vi har nåke sånn toppvinkla..å speiling..å syklisk firkant..
938. Gry: Ja men den treffer jo ikkje..
939. Liv: Formlike då..
940. Unn: E det en syklisk firkant?
941. Roy: ja..det går an å finne sentrum..det går an å finne et sentrum
942. Mia: Hon fikk sirkelen rundt hele..(snakker om Liv)
943. Gry: Gjorde hon det?
944. Mia: ja
945. Gry: det får ikkje eg
946. Liv: Det e bare..det e bare å halvera alså så finner du sentrum..men det e ikkje
947. Mia: ja
948. Roy: E det et poeng?
949. Mia: Ja men det e..det e en syklisk firkant..det e det som e poenget
950. Roy: ja

(I sekvensen (951 - 967) samtaler de videre om begrepet, syklisk firkant)

968. Unn: Å hvis vi då...
969. Mia: Å de motstående blir hundre å åtti..
970. Unn: Ja men då må de bli nitti begge to
971. Mia: Nei..
972. Roy: Ja to av de e nitti å de e hundre å åtti tesammen..men de to andre trenger ikkje vær..
973. de ska vær hundre å åtti tesammen men ein kan vær tretti og ein kan vær
974. Mia: Den ene..tesammen (samtidig)..den ene.. ja den ene trenger bare å vær seksti..
975. og den andre sant..det står bare tesammen hundre å åtti..
976. Unn: for at men..ja..men det visste vi jo fra før
977. Mia: ja..for hon har iallfall..hon har gjort det cirka med å finne sentrum..
978. men det ble ..alle punktene..

979. Liv: Vi kan jo gjøre det nøyaktig da.. så finner vi sentrum..her e
980. sentrum..sånn..det e ikkje nåke med periferivinkler her nå då..Roy?
981. Roy: Hmm?
982. Liv: Hvis vi kan finne periferivinkler her..
983. Mia: I en sirk..
984. Liv: Jaaaa!..se her da..hahaha..(ler og ler og ler).. (kl.15.03)
985. Roy: Ke e det for nåke?
986. Mia: Guri malla!
987. Roy: Fortell då Liv ..
988. Liv: Jaa..nå ska eg tegna på tavlå
989. Roy: Ja tegn på tavlå
990. Liv: Så kanskje dåkke finner det ut sjøl....(synger og nynner opp til tavla)
991. Gry: Se på ho der..eg tror ikkje på den der toeren din fra trei..fra første klasse..
992. Roy: Det e lenge si det vet du..(ler)

Gruppemedlemmene har i denne fasen av løsningsprosessen gått tilbake og repetert hvilke vinkler de bestemte i den forrige deloppgaven (933). De oppsummerte hvilke begreper og ideer som de hadde framme i diskusjonen (937), (939). På denne måten ble søkelyset rettet mot den sykliske firkanten QBCP (940) - (950). Samtalen om denne firkanten viste at Liv var mest skeptisk til at dette innspillet kunne hjelpe dem i løsningsprosessen (946). Det er allikevel interessant at andre gruppemedlemmer hjalp Liv til å komme fram til løsningen. Unn leste opp fra læreboka hva som kjennetegner en syklisk firkant (951) - (967), og Mia informerte de andre gruppemedlemmene om at Liv allerede hadde tegnet omsirkelen (942), (977). På denne måten kom disse viktige begrepene inn i samtalen, og Liv gikk tilbake i sin egen hjelpefigur og betraktet omsirkelen til firkant QBCP. Det var dermed ikke vanskelig for Liv å oppdage det siste trinnet i løsningsprosessen om at vinklene BQC og BPC er periferivinkler som spenner over samme sirkelbue (980), (982), (984). Selv om det er Liv som driver fram løsningen med den sykliske firkanten, omsirkelen og periferibetraktningene, så bidrar de andre gruppemedlemmene i aller høyeste grad til at hun fortsetter å betrakte disse ideene. Livs kraftige affektive respons viser at hun har hatt en fantastisk opplevelse når hun oppdager løsningen. Det er viktig å understreke at en slik respons ofte kommer fram som en følge av stor innsats og hardt arbeid med problemet. McLeod (1992) understreker at den affektive responsen er kraftigere hvis elever arbeider med problemløsningsoppgaver i forhold til rutineoppgaver. Det er derfor ikke så merkelig at Liv virkelig er glad når hun nå har funnet en løsning.

Dialogen får også fram at hverken Mia, Unn eller Gry viser særlig entusiasme når Liv oppdager løsningen. Det er sannsynligvis vanskelig for de andre studentene å forstå et slikt gledesutbrudd dersom de ikke selv har fått erfare å lykkes med en problemløsningsoppgave hvis de har arbeidet hardt for å få den til. De andre studentene føler kanskje at de ikke har bidratt i løsningsprosessen. Gruppediskusjonen viser imidlertid at samtlige gruppemedlemmer har bidratt med konstruktive innspill som har hatt betydning for at Liv kom fram til en løsning. I denne oppsummeringen har vi allerede kommentert Unn og Mia sin betydning i løsnings-prosessen, og vi kan også nevne prosessinnspillet til Gry i begynnelsen av episode der hun fokuserte på den sykliske firkanten. Når det gjelder Roy, så viser denne diskusjonen at han også har hatt stor betydning for resultatet. Han har oppsummert de ulike ideene som har kommet fram i løsningsprosessen, og det er han som svarer Unn når hun spør om det er en syklisk firkant. Han bekrefter dette, men han poengterer også at det er mulig å finne sentrum til firkantens omsirkel. Gruppemedlemmene bidrar altså i aller høyeste grad til å finne løsningen, men de ser dessverre ikke selv at de bidrar til Livs store oppdagelse.

Denne episoden har vist hvor viktig det er at vi som lærere hjelper våre elever til å forstå at det kan være svært nyttig å gå tilbake i løsningsprosessen. En slik refleksjon over ulike prosessinnspill viser seg ofte å være et svært viktig heuristisk hjelpemiddel. Vi kan også se at det er det gode samarbeidet mellom gruppemedlemmene som hjelper dem fram til løsningen, og dette illustrerer hvor verdifullt det kan være å arbeide med matematikk i smågrupper.

Det er viktig at vi understreker for våre elever at hvis de er aktive i diskusjonen når de arbeider med en problemløsningsoppgave, så vil de bidra i løsningsprosessen selv om det bare er en av elevene som finner siste trinn i løsningen. Dette er vanskelig for mange elever å forstå, og det er derfor viktig at vi hjelper dem til å reflektere over løsningsprosessen når de arbeider med en oppgave. Kanskje de da vil oppdage at det var ulike prosessinnspill som hjalp dem til å komme fram til løsningen på problemet.

Det er også sentralt at vi hjelper våre elever til å utvikle sine holdninger til det å arbeide med åpne problemløsningsoppgaver. Som lærere må vi legge vekt på at utholdenhet og hardt arbeid er viktige faktorer for at de skal lykkes med en slik oppgave. Samtalen viser også at det er mulig for elever med manglende forkunnskaper å utvikle sine faglige og sosiale ferdigheter i en slik sosial kontekst.

5.4 Refleksjon over gruppesamarbeidet

Bakgrunnen for denne episoden er at studentene har startet refleksjonen over gruppe-samarbeidet, og de har hatt forskjellige oppfatninger av hvordan gruppesamarbeidet har fungert denne gangen (3. gruppesamling). Både Roy og Liv synes at samarbeidet har fungert bra, mens de tre andre jentene har hatt en følelse av at de ikke har kunnet bidra så mye i oppgaveløsningen. Samtalen har vist at flere av gruppemedlemmene synes at dette er frustrerende, og de peker på at oppgavene er for vanskelige. Fra gruppedialogen kommer det fram at både Gry og Liv har hatt svake karakterer fra videregående skole, men at Liv har hatt en gledelig, faglig utvikling. Det er tydelig at hun har hatt stort utbytte av gruppesamarbeidet, og hun har erfart at det nytter hvis en er villig til å arbeide intenst med problemene. Gry har hele tiden understreket at hun har manglende ferdigheter i matematikk og at hun derfor ikke har noe særlig å bidra med i den matematiske diskusjonen. Studentene fortsetter grupperefleksjonen med Unns synspunkt (1538).

1538.Unn: ja..men eg tror at vi generelt gjør alle problemene altfor vanskelige..
1539.Roy: Ka kan vi gjer med det då?
1540.Unn: Nei eg vett ikkje..(ler lavt)
1541.Liv: Eg tror nesten bare at det må bli sånn eg..alså så lenge vi ikkje kan mere..
1542.Mia: Ja eg føler det iallfall ekkelt når dåkke sitte der å tenke ut alt..og vi vet du sier
1543. ja ka ska vi gjere no då?..ka ska vi skrive no då?..sant..(IH - snakker veldig fort)
1544.Liv: Ja eg blir så grådig ivrig fordi at eeh..
1545.Mia: Ja men du forstår det jo og du
1546.Liv: Vi brukar jo lang tid på det
1547.Gry: Vi hadde aldri blitt ferdig trur eg hvis ikkje det hadde vært for at noen
1548. tenkte kanskje litt på seg sjøl å tenkte høyt og at de fant ut litt hver..hver for
1549. seg..for skulle vi alle sammen såte her å tenkt å grublet..så hadde ikkje
1550. vi..eg trur ikkjevi hadde vært ferdig med en oppgave eg
1551.Mia: Men alle må jo være med..alså det
1552.Roy: Men alså..e problemet rett å slett at vi..eeh..før alle i gruppå har skjønt
1553. poenget så går vi videre på neste ting?
1554.Liv: Eg kunne kanskje ha ventet litt med løsningen hvis eg hadde funne
1555. det ut..eller eller sånn eventuelt..eller du eller hvem som helst..at..at
1556. det kanskje ska..heller bare hinte liksom kordan..
1557.Unn: Ka vi ska bruke..
1558.Liv: Ka vi kan gjøre for å finne det ut liksom..før liksom bare presentere
1559. løsningen med en gang..
1560.Roy: ja..men samtidig så e nå vel alle glad for at vi kom fram te en løsning..
1561.Mia: Ja selvfølgelig..det e jo helt klart

1562.Roy: i steden for å bruka ekstra tid på det
1563.Mia: jajaja..det e klart
1564.Roy: Men..eeh..
1565.Unn: Men det e noe med disse problemløsningsoppgavene nå du ikkje vet
1566. ka metoder du ska bruke sant..
1567.Liv: Men det e jo
1568.Roy: Det e jo det vi prøva å feila på heila tidå
1569.Unn: ja
1570.Liv: Det e derfor vi må bruke mange..
1571.Unn: Ja men sett nå at hvis en kanskje finner løsningen..okey vi ska bruke den
1572. metoden..så e det kanskje lettere for de andre å skjønne koffor det blir
1573. sånn..slik at de får prøve ut metoden før..før hele løsningen blir presentert
1574.Mia: Ja..kanskje det
1575.Roy: Ja..at..at når en ser løsningen så kommer en heller med metoden..
1576.Mia: ja..(samtidig)..ikke sier det sant..dersom
1577.Unn: ja...(samtidig)
1578.Roy: ja

Denne episoden viser oss hvordan gruppemedlemmene reflekterer over gruppesamarbeidet.

Studentene er åpne og ærlige med hverandre og våger å si hva de mener. Det kan virke som om de har etablert et trygt og aktivt læringsmiljø. Diskusjonen har for det meste dreiet seg om enkelte gruppemedlemmers frustrasjon over at de samme studentene kommer fram til løsning hver gang. Samtidig så synes de samme studentene at de kompliserer oppgavene mer enn det de egentlig trenger å gjøre. Liv bemerker at hun også har problemer med å skjønne oppgavene, men hun har stor hjelp av den matematiske diskusjonen der alle studentene bidrar med innspill. Liv understreker her hvor verdifull gruppesamtalen er for at de skal lykkes med å komme fram til en løsning, og hun får på denne måten fram at det er uvesentlig hvem som kommer fram til det siste trinnet i løsningsprosessen. Alrø & Skovsmose (1994) understreker at det viktigste er ikke om svarene er korrekte eller feil, men at det viktigste er at elevene blir i stand til å forstå, reflektere over og samtale om matematiske problemer. Elevenes argumentasjon blir dermed et sentralt element i læringsprosesser, og gruppesamtalen i forkant av en løsning kan her være meget verdifull.

Samtalen viser at gruppemedlemmene har en åpen diskusjon der de samtaler om hva de kan gjøre for å bedre samarbeidet i gruppa. Et forslag kommer fram, og dette går ut på at den som finner løsningen, bare kommer med noen hint til de andre. På denne måten får alle anledning til å finne det siste trinnet i løsningsprosessen. Dette viser at gruppemedlemmene ikke bare konstaterer hva som ikke fungerer, men de er bevisste på å utvikle gruppesamarbeidet. Sentralt i denne diskusjonen er at studentene skal løse problemene sammen slik at alle skal ha muligheten til å komme med innspill og oppdage selve løsningen. Vi ser altså her ei gruppe som virkelig tar fatt i aspekt med gruppesamarbeidet som ikke fungerer tilfredstillende, og de forsøker gjennom en nøktern og åpen diskusjon å komme med forslag som kan hjelpe dem til et enda bedre samarbeid

Denne gruppesamtalen illustrerer hvor verdifullt det er å reflektere over et gruppesamarbeid på denne måten. Elever må trenes opp til å foreta en slik prosessering på slutten av gruppesamlingen. Dermed kan elever bli mer bevisste på å samtale om hva som fungerer og ikke fungerer i gruppa. Det er viktig for oss som lærere å understreke for våre elever at et slikt gruppesamarbeid stadig kan bli bedre, og vi kan kanskje si at det er først når gruppemedlemmene har utviklet sine sosiale ferdigheter at de kan få et skikkelig utbytte av samarbeidet.

Studentene reflekterer også over oppgavenes vanskelighetsgrad. Selv om enkelte synes at oppgavene er for vanskelige, klarer de allikevel å komme fram til en løsning. Det er viktig at læreren hjelper eleven til å rette oppmerksomheten mot sine egne opplevelser av at selv om problemene i utgangspunktet ser kompliserte ut, vil de ofte ha stor nytte av den matematiske diskusjonen i gruppa. Når elevene arbeider sammen i ei gruppe, vil de samlet ha et større kunnskapsinventar. På denne måten vil de ha bedre forutsetninger til å komme fram til en løsning. Slik er det viktig for læreren å bruke tid til å finne gode problemløsningsoppgaver med en rimelig vanskelighetsgrad.

6. Oppsummering

I denne delen av mitt arbeid har jeg lagt særlig vekt på å studere studentenes evne til matematisk tenkning og deres sosiale ferdigheter når de har arbeidet med problemløsningsoppgavene i gruppa. Det har også vært interessant å observere hvilke affektive uttrykk som kommer fram i løsningsprosessen.

Gruppediskusjonen indikerer at studentene har hatt både en faglig og sosial utvikling i løpet av prosjektperioden. Gruppesamtalen viser også et affektivt engasjement under løsningen av problemene.

Studentene har utviklet sin forståelse av flere geometriske begreper som for eksempel avstanden fra et punkt til ei linje.

- På samme måte har studentene utviklet sine metakognitive ferdigheter. Løsningsprosessen veksler mellom analyse, implementering og refleksjon.
- Noen av gruppemedlemmene har hatt en positiv innstilling til gruppesamarbeidet. De har vist stor villighet, utholdenhet og glede under arbeidet med problemene, mens andre gruppemedlemmer ikke har hatt det samme affektive engasjementet. De har ikke sett poenget med å arbeide med slike oppgaver. Gruppemedlemmene har videre hatt ulike forestillinger om sine egne matematiske ferdigheter, noe som trolig har påvirket deres problemløsningsatferd og deres vurdering av egen innsats.
- Det kan se ut som om studentene har klart å etablere et positivt og åpent læringsmiljø i gruppa. De lytter til hverandre i den matematiske diskusjonen, og hvert innspill og ide blir seriøst behandlet i dialogen. De behandler hverandre med respekt og virker å være trygge på hverandre.
- Studentene har utviklet et positivt gjensidighetsforhold til hverandre. De har et felles gruppemål, og det kan se ut som om de er avhengige av hverandres ressurser.
- Alle studentene bidrar i løsningsprosessen. Et gruppemedlem genererer en ide, et innspill eller et spørsmål som en annen student utvikler videre. Noen av studentene synes imidlertid at de bidrar lite i oppgaveløsningen og dette er frustrerende for dem.
- Studentenes holdninger og innstilling til å arbeide med oppgavene i gruppa er temmelig forskjellige. Det kan imidlertid se ut som om det alltid er en eller flere studenter som klarer å inspirere resten av gruppemedlemmene slik at de arbeider intenst med problemene.

Noen resultater fra undersøkelsen (Bjuland, 1997) som ikke kommer fram i analysen av episodene som er valgt i denne artikkelen, er:

- Studentene har utviklet sin forståelse av vinkelbegrepet, periferivinkel, sentralvinkel, toppvinkel og supplementvinkel. De har også fått en grundig repetisjon av hva som karakteriserer en likesida og en likebeint trekant. Videre ser det ut som om de har utviklet sin forståelse av sirkel, tangent til sirkel, innsirkel, omsirkel, og syklisk firkant.
- Studentene arbeider lite med å generalisere problemene og formulere egne problem.

- Det er uvant for studentene å måtte bevise ulike matematiske sammenhenger. De er uenige om når en matematisk sammenheng virkelig er bevist, og det kan se ut som om de er uenige om hva et bevis er.
- Flere løsningsstrategier har kommet fram i den matematiske diskusjonen. Studentene har tegnet hjelpefigur, de vurderer analoge problemstillinger, de betrakter grensetilfeller og de antar at problemet er løst og bruker dette til å finne en matematisk begrunnelse. Videre går studentene svært ofte tilbake i løsningsprosessen (looking back). Jeg har identifisert 5 forskjellige måter der studentene går tilbake i løsningsprosessen:

1. Studentene går tilbake i løsningsprosessen for å analysere problemet på nytt.
2. De går tilbake til det forrige delproblemet.
3. Gruppemedlemmene går tilbake i prosessen og repeterer hvilke ideer og innspill som har vært framme i den matematiske diskusjonen.
4. Studenten som er prosessansvarlig, bidrar flere ganger med ulike prosessinnspill som tvinger de andre studentene til å stoppe opp å repetere det siste innspillet eller den siste ideen som har vært framme i diskusjonen.
5. De reflekterer over selve løsningen og vurderer om de kunne funnet en alternativ løsning på problemet.

Denne undersøkelsen viser at et slikt gruppeprosjekt i problemløsning kan være et nyttig verktøy i allmennlærerutdanningen. På denne måten får lærerstudenter anledning til å forstå og utvikle sine kunnskaper om matematiske begreper. Vi har også sett at et slikt gruppeprosjekt kan føre til at studentene blir mer bevisste på sin egen læringsprosess ved at de reflekterer over sin egen matematiske løsningsprosess og at de diskuterer hvordan gruppesamarbeidet fungerer.

Erfaringer fra Høgskolen i Agder viser at problemer hentet fra geometri ser ut til å være velegnet for problemløsning, og det gir studentene mulighet til å erfare matematikk som en helhetlig og skapende prosess (Borgersen, 1994). Siden fagplandelen i matematikk fra 1997 (L-97) fokuserer på at elever skal få arbeide med geometri på en utforskende måte, tror vi at det er viktig at lærere får erfare hvordan det kan være å arbeide med geometriske problemer i en prosess. På denne måten kan det muligens være enklere for lærerstudentene å forstå hvordan en slik matematisk prosess kan arte seg når de senere skal ut i skolen å veilede sine elever med deres oppgaveløsning.

Et slikt gruppearbeid fører også ofte til at et gruppemedlem opptrer i en lærerrolle overfor sine medstudenter på gruppa. Når de presenterer sine innspill og ideer for hverandre, blir de utfordret til å gjøre greie for sin matematiske tenkning. På denne måten får studentene øvet seg i å uttrykke seg presist. De får også erfaring i å lytte til andres resonnement og til å prøve og forstå hvordan andre studenter tenker.

Vi tror at det å samarbeide om problemløsningsoppgaver i smågrupper kan være et viktig verktøy som kan brukes i undervisningen på alle klassetrinn i skolen. På denne måten kan elevene få muligheten til å forstå og utvikle matematiske begreper sammen. Elevene kan også få anledning til å oppleve matematikk som en skapende prosess slik at de kan få et mer dekkende bilde av hva matematikk egentlig er.

Referanser

Alrø, H. & Skovsmose, O. (1994). *On the right track.* Institute for Electronic Systems, Aalborg University.

Barkatsas, A.N. & Hunting, R. (1996). A review of recent research on cognitive, meta-cognitive and affective aspects of problem solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, **4**, (4), 7-30.

Bauerfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, (1), 23-41.

Bishop, A.(1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, **19**, 179-191.

Bjuland, R. (1997). *Problemløsningsprosesser i geometri. Lærerstudenters samarbeid i smågrupper: En dialogisk tilnærming.* Hovedoppgave ved Høgskolen i Agder, Norge.

Borgersen, H.E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk matematikk-didaktikk*, **2**, (2), 6-35.

Carraher, T.N., Carraher, D.& Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, **3**, 21-29.

Cestari, M.L. (1997). Abandoning some certainties: The social construction of knowledge in the mathematics classroom. In A. Tjeldvoll & I.S. Holmesland (Eds.). *Globalization and Education. Essays on Quality of Equality.* University of Oslo, Institute for Educational Research. Report no. 10.

Cestari, M.L. (1998). Teacher/Student communication in traditional and constructivist approaches to teaching. In M.B.Bussi & A.Sierpinska & H. Steinbring (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom,* 155–166. Washington: NCTM.

D'Ambrosio, U. (1991). Etnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In M.Harris (Ed.), *School, mathematics and work*, 15-25. London: The Falmer Press.

Deutsch, M.(1949). A theory of cooperation and competition. *Human Relations*, 2, 129-152.

Digre, L. & Solerød, E. (1993). *Samarbeidslæring i matematikk.* Halden Lærerhøgskole, Norge.

Grouws, D.A. & Cramer, K. (1989). Teaching practices and student affect in problem-solving lessons of select junior-high mathematics teachers. In D.B.McLeod & V.M.Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving*, 149-161. New York, NY: Springer Verlag.

Haugaløkken, O.K. (1987). *Elevsamarbeid og holdninger i klasserommet.* Hovedoppgave, Pedagogisk Institutt, Universitetet i Trondheim, Norge.

Johnsen, V. (1996). Hva er en vinkel? *Nordisk matematikkdidaktikk*, **4**, (1), 25-49.

Johnson, D.W.& Johnson, R.T.(1990). Using cooperative learning in math. In N. Davidson (Ed.), *Cooperative learning in mathematics. A handbook for teachers*, 103-125. Menlo Park: Addison Wesley.

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (1997). *Læreplanverket for den 10-årige Grunnskolen*. Nasjonalt læremiddelsenter.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question, and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal.* **27**, 29-63.

Lave, J. , Smith, S. & Butler, M. (1989). Problem solving as everyday experience. In R.I.Charles & E.A.Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, 61-81. Reston, VA: NCTM.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research 1970-1994.*Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, (6), 660-675.

Markova, I. (1990). A three-step process as a unit of analysis in dialogue. In I. Markova & K. Foppa (Eds.), *The Dynamics of Dialogue*, 129-146. New York, NY: Harvester Wheatsheaf.

McLeod, D.B. (1992). Research in affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.G.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 557-596. New York: Macmillan.

Pehkonen, E & Törner, G. (1996). Mathematical Beliefs and Different Aspects of their Meaning. *ZDM*, **4**, 101-108.

Polya, G. (1945; 2nd edition 1957). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370. New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. *Sånn, Ja! Rapport fra en konferanse om matematikkdidaktikk og kvinner i matematiske fag.* (Arbeidsnotat 2/93, s. 67-89), Oslo: Norges forskningsråd, Avd. NAVF Sekretariatet for kvinneforskning.

Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and directions. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiples research perspectives*, 247-266, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E.A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, 33-60. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problem solving. *For the Learning of Mathematics*, **14**, (1), 19 - 28.

Svege, E. (1996). *Affektive sider ved undervisning og studenters læring av matematikk.*

Hovedoppgave ved Høgskolen i Agder, Norge.

Svege, E. (1997). Studenters forestillinger, holdninger og følelser overfor matematikk. *Nordisk matematikkdidaktikk*, **5**, (2), 25-55.

Abstract

The aim of my article is to identify problem solving processes in geometry and investigate how students' mathematical understanding are developing in a social context and when using mathematical language in a small group dialogue. The empirical material has been collected by means of an ethnographical research method, while the analysis of the group discussion and the reconstruction of the students problem solving process are based on a dialogical approach. The theoretical material is divided into five categories: problem solving, cooperative learning, affective aspects, classroom research and social and cultural aspects of learning of mathematics. A teaching arrangement ended by a group project of problem solving in geometry was tested on teacher students in their first term on a college of education in autumn 1996. One hundred and five students attended the course, and they were divided into project groups of five. This investigation is based on the observation of one group of students.

The students have developed their mathematical thinking, their social skills and their abilities to communicate about mathematics during the project period. The group discussion shows how one group member generates an idea or a question that is further developed by another student. In this zig-zag discussion the students construct different concepts in their mind. The students have also developed their metacognitive abilities. The solution process varies between analysis, implementation and reflection which shows that the students monitor and control their own process of learning.

We think that cooperation about open problem solving in small groups could be an important tool that can be used in the teaching at all levels in school. Pupils have then good opportunities to experience a more true picture of mathematics. By reflection on a given question or an idea in a group discussion, pupils may develop their knowledge of mathematics.

This investigation also shows that such a group project of problem solving could be an important tool in the teacher training. Teacher students then get the opportunity to understand and develop their knowledge of mathematics. They also get the opportunity to be more conscious of their own process of learning. Such knowledge and experience is decisive for future teachers.

Forfatter
Raymond Bjuland er tilsatt som høyskolelektor ved Norsk Lærerakademi - lærerhøgskolen, og er for tiden doktorgradsstudent ved Universitetet i Bergen
Forskningsinteresser:
Problemløsning og arbeid i smågrupper, klasseromsforskning, affektive sider ved matematikk.

Adresse:
Raymond Bjuland, NLA - lærerhøgskolen, Olav Bjodalsvei 41, 5093 Breistein.
Telefon: +47 55 53 69 00.
E-post: nla-lh@lh.nla.no

Erratum

One important error inadvertently slipped into the presentation of the article "The danger of being overly attached to the concrete: The case of division by zero" by Caroline Lajoie and Roberta Mura, which appeared in Vol. 6, No.1, pp. 7-21.

The following note to the article did not appear in the printed version:

> This is a revised version of a paper originally published in French in the journal *Instantanés mathématiques* (May-June-July 1995), pp. 7-15, under the title "La division par zéro ou le danger d'un trop grand attachement au concret." The original article received the award for the best article published in the journal in the two-year period 1994-1996.

The Editor sincerely regrets this error and apologies to the authors for any inconvenience caused.