Diagnoser i matematik år 2

Varför – hur – vad ger resultatet?

Dagmar Neuman

I denna artikel presenteras teorier och tankar bakom de svenska nationella diagnoserna i matematik för år 2 och exempel på hur dessa tar sig uttryck i det färdiga i materialet. Innehållet i diagnoserna avser att spegla det som är nytt inom ämnet i den svenska läroplanen, Lpo 94, och i den syn på kunskap, inlärning och undervisning den utgår ifrån. Diagnosernas viktigaste motiv är emellertid att avslöja hur barn upplever matematiken under sitt andra skolår. Hur teorier och tankar reflekteras i materialet exemplifieras med elevlösningar som visar hur barn upplever det tidigaste bråktalet "en halv". Exemplen antyder också hur problemlösning som sker i interaktion mellan elev-elev-lärare i meningsfulla situationer kan bli en drivkraft i utveckling av matematisk kunskap.

Bakgrund

De svenska diagnoserna i matematik för år 2 kom ut våren 1996. De har utarbetats av PRIM-gruppen vid Institutionen för pedagogik, Lärarhögskolan i Stockholm (Pettersson, 1996), på uppdrag av och i samarbete med Skolverket. Bakgrundsarbetet började med diskussioner om synen på kunskap och lärande i det Huvudbetänkande av läroplanskommittén (1992) som låg till grund för den nuvarande läroplanen (Lpo 94), och om det perspektiv på ämnet som företräds i kursplanen. Det var viktigt att dessa tankar skulle bli synliga i diagnoserna samtidigt som diagnoserna skulle spegla unga elevers upplevelser av olika områden inom ämnet matematik. I den här artikeln försöker jag ge en bild av detta bakgrundsarbete och exempel på hur det har realiserats i diagnosmaterialet.

Artikeln är uppdelad i 7 delar. De handlar om:

1) Betänkandets kunskapssyn;

2) Kursplanens syn på matematikämnets innehåll;

3) Diskussioner om hur kunskapssyn och ämnesinnehåll skulle kunna avspeglas i diagnoserna;

4) Hur man kan utvärdera mycket unga elevers kunskaper;

Dagmar Neuman har vært tilsatt ved Institutionen för pedagogik, Gøteborgs universitet. Etter at hun gikk av med pensjon har hun blant annet arbeidet med de nasjonale diagnosene i matematikk for år 2 i Sverige.

5) Utprövningar;

6) Materialets utformning;

7) Elevlösningar som visar barns sätt att uppleva en halv och att utföra halveringar.

Jag avslutar sedan artikeln med en kort sammanfattande diskussion om möjliga resultat av diagnosernas eventuellt styrande effekt.

Kunskapssyn

Författarna till "kunskapskapitlet" – kap 2 – i Betänkandet (1992) skiljer mellan fyra olika kunskapsformer: fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet. Olyckligtvis har uppräkningen av dessa så kallade "fyra F" ibland misstolkats så att faktakunskap skulle ses som den minst viktiga kunskapsformen och förtrogenhetskunskap som den viktigaste. Författarna har emellertid understrukit att de olika formerna samspelar med och förutsätter varandra. Man bör därför inte ensidigt betona någon av dem.

*Fakta*kunskap handlar om "information, regler och konventioner" (s 65).[1] Det är en kunskap av kvantitativ karaktär: man kan mäta om man har mer eller mindre av den.

Förståelsekunskap är däremot inte kvantitativ. Man kan inte säga att man förstår mer eller mindre, bara att man förstår på ett mer eller mindre kvalificerat sätt. Att förstå matematik är att lära sig matematikens "språkspel" (Wittgenstein, citerad i Betänkandet, s 64). Det gör man genom att samtala om matematik.

Färdighetskunskap har vi när vi vet hur vi ska göra någonting. När vi tänker på färdigheter är det ofta praktiska färdigheter vi associerar till. Men det finns också färdigheter av intellektuellt slag. Matematiska färdigheter, till exempel omfattar främst tankefärdigheter.

Förtrogenhetskunskap får vi genom att delta i olika verksamheter, som ger oss en mångfald av erfarenheter att utgå ifrån i nya situationer.

I Betänkandet diskuterar man sedan individens kunskapsutveckling i skolan. Det som ofta har dominerat forskningen inom detta område har varit frågan om hur man ska kunna avgöra om eleverna är "mogna" för en speciell typ av undervisning eller ej, och om det är meningslöst att försöka lära ut något som de inte är mogna för. Diskussionen har således gällt relationen mellan inlärning och utveckling. En intressant genomgång av hur denna diskussion har påverkat den pedagogiska debatten från 60-talet och framåt görs. Den visar hur de två komponenterna i begreppsparet inlärning-utveckling har haft olika betydelse under olika epoker beroende på att olika traditioner inom inlärningsforskningen har avlöst varandra.

Behavioristiska inlärningsteorier, till exempel Skinners förstärkningsteorier (Skinner, refererad på s 70), utgick från antagandet att *inlärning är detsamma som utveckling*. Ju mer man lär sig desto mer utvecklas man. Kunskapsvärdering var i denna tradition – som dominerade debatten på 60-talet och under början av 70-talet – inriktad på yttre beteenden, inte på inre tankeprocesser.

Under det senare 70-talet däremot skedde en total omvärdering i det pedagogiska tänkandet. Nu ansågs *möjligheterna till inlärning vara bestämda av individens utveckling*. Piagets teorier (Piaget refererad på s 71), där utveckling sågs som en serie av kognitiva stadier av allt mer avancerad, abstrakt och formell karaktär, var utgångspunkten för denna debatt. Utvecklingen ansågs vara generell, universell och spontan, i det närmaste oberoende av social miljö.

Motivet för Piagets forskning var inte att lösa skolans problem, och den var inte främst inriktad på att studera relationen mellan inlärning och utveckling, utan på att utforska kunskapsutveckling i allmänhet. Tyvärr, säger man i Betänkandet, har den ändå haft stort inflytande på tänkandet om undervisningen i skolan. Uppfattningen att det utvecklingsstadium elever har uppnått – eller inte ännu uppnått – sätter gränser för vad som är möjligt för dem att lära sig, har till exempel satt spår i den nuvarande läroplanen, anser man (den läroplan som gällde, när betänkandet skrevs: Lgr80).

Den tredje traditionen – den som just nu tilldrar sig stort intresse – har sina rötter i den kulturpsykologiska forskning, där Vygotsky (refererad på s 71) är centralfiguren.[2] Den gör återigen helt om när det gäller synen på relationen inlärning – utveckling. Här utgår man från antagandet att *inlärningen kan påverka utvecklingen*. Medan Piaget menade att barn själva aktivt skapar sin kunskap om de befinner sig i en lagom stimulerande miljö, hävdade Vygotsky att barn får kunskaper utifrån, i samband med att de interagerar med vuxna och använder språket. Barnen tolkar visserligen orden på sitt eget sätt, men genom att ord används i många sammanhang får de efter hand dels en allt mer generell, dels en allt mer distinkt betydelse. Ordmeningarna närmar sig så småningom de meningar ord har för vuxna. Drivkraften i utvecklingen är den interaktion mellan vuxna och barn där lärande formas, menar Vygotsky. Inlärningen går således före utvecklingen och skapar en potentiell utvecklingszon, där barn kan utföra handlingar tillsammans med vuxna, innan de ännu kan utföra dem på egen hand.

En viktig skillnad mellan Piaget och Vygotsky är synen på vad som är det primära i tankeutvecklingen. Enligt Piaget föregår tankeutvecklingen möjligheterna att uttrycka sig språkligt, medan Vygotsky ser tanke- och språkutveckling som två av varandra ömsesidigt beroende processer.

Begreppsparet "inlärning -utveckling" börjar nu få en annan betydelse i den pedagogiska debatten, eftersom man inte längre ser utveckling som ett generellt fenomen, utan som knuten till innehållet i det man tänker om. Innehållsrelaterad forskning har varit mycket aktiv under det senaste decenniet (här refererar man till den fenomenografiskt grundade didaktiska forskning som initierats av Ference Marton och hans medarbetare, s 73). Den har handlat om hur elever tänker inom olika kunskapsområden. Men den har också handlat om hur de – genom det de undervisas om och genom det sätt de undervisas på – lär sig vad kunskap inom ett visst område är och hur man går till väga när man lär sig något inom detta område.

Betänkandet understryker att kunskaper är något som "ligger mellan" (s 73) individ och omvärld. I forskningen har man använt benämningen "situated cognition" (t ex Lave, refererad på s 73) för att beteckna denna relation.

Det är viktigt att elever får kunskaper som är beständiga. Ur individuellt perspektiv blir ett barns kunskaper beständiga bara om de införlivas med hela den kunskapande process barnet deltar i. Speciellt under de första skolåren är det därför viktigt att lägga en helhetssyn på undervisningen, att inte dela upp den i olika skolämnen. Det är under dessa år barnen ska utveckla självförtroende och tro på sin förmåga att lära. Det gör de om de inspireras till att använda olika uttrycksformer: att rita, måla, skriva, berätta och så vidare.

När det gäller kunskapens natur, framhåller man i betänkandet att kunskap inte är en avbildning av världen, utan något vi själva har skapat för att kunna förstå och hantera världen. "*Kunskap är på det viset inte sann eller osann, utan något som kan argumenteras för och prövas.* Kunskap är diskuterbar" (s 76). Ett skolämne är till exempel inte något som har existerat sedan urminnes tider och som kommer att förbli oförändrat. Kunskap kan materialiseras och bli verktyg. Då blir den inte längre kunskap man har behov av att undervisa om, i varje fall inte på det sätt man har gjort tidigare. Det är viktigt att lägga ett sådant historiskt perspektiv på de ämnen man undervisar om.

Avslutningsvis betonar man att "skolan måste erbjuda ett socialt sammanhang där elevernas kunskapande blir meningsfullt" (s 80).

Mellan Lgr80 och Lpo 94 kan man således främst se en förändring av synen på språkets betydelse.Man framhåller att det är den interaktion som sker mellom barn och vuxna i meningsfulla problemlösningssituationer, som är själva drivkraften i den inlärning som leder till utveckling. Vikten av att veta något om hur barn tillägnar sig begrepp inom olika ämnesområden – inte enbart om hur de lär sig i almänhet – betonas också starkare.

Matematikämnets innehåll

Vid en jämförelse mellan de två läroplanerna kan man se en tydlig förskjutning i betoningen av det kunskapsinnehåll som ska tas upp i matematikundervisningen. I Lgr80, under rubriken grundläggande aritmetik för lågstadiet, skriver man:

> Begreppen multiplikation och division tas upp, men behandling av algoritmerna bör anstå tills eleverna har uppnått säkerhet i additions- och subtraktionsalgoritmerna. Dessa kräver i sin tur väl inövade kunskaper i additions- och subtraktionstabellerna upp till 18. Multiplikationstabellen med ena faktorn högst fem lärs in (s 101).

I Lpo 94, under rubriken ”Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det femte skolåret” formulerar man sig däremot så här:

> Eleven skall ha grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal – i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare (s 34).

Ingenting sägs här om tabellkunskaper eller om algoritmerna för de fyra räknesätten.

I Lgr80 anser man att förutom grundläggande aritmetik ska man på lågstadiet ta upp mätning, geometri, algebra (enkla likheter som löses genom prövning) och statistik. Problemlösning ska förekomma inom alla huvudmoment. I det avseendet är skillnaderna inte så stora mellan de två läroplanerna. Men genom att man i Lpo 94 inte uttryckligt föreskriver att eleverna ska kunna använda algoritmerna för de fyra räknesätten, har man nu skapat betydligt större möjligheter för lärare att starkare betona ämnets övriga delar.

I Lpo 94 börjar man inte – som i Lgr80 – med att beskriva vad eleverna ska kunna inom olika delar av ämnet, utan med att visa vad man ska sträva efter i all matematikundervisning. De åtta strävansmål som först tas upp handlar om mål som tar sin utgångspunkt i den kunskapssyn läroplansbetänkandet företräder. Man märker den både i innehåll och i formulering av meningar, till exempel: eleven ska få tilltro till det egna tänkandet ... ska inse att matematiken har spelat och spelar en viktig roll i olika kulturer ... får kännedom om historiska sammanhang, där viktiga begrepp och metoder inom matematiken har utvecklats och använts ... förstår och kan använda begrepp och metoder ... inser värdet av språk och symboler ... kan använda logiska resonemang samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande ... förstår och kan lösa problem med hjälp av matematiken ... med förtrogenhet kan utnyttja miniräknare och datorer .... Det finns inget tak för strävansmålen. Det eleverna ska kunna framstår här närmast som en ögonblicksbild man får om man går in i en process de deltar i – en process där de skolas in i den matematikkultur som vi tillsammans sedan urminnes tider har hjälpts åt att skapa och fortsätter att forma.

Först efter dessa åtta strävansmål kommer en uppräkning av begrepp och metoder matematikundervisningen ska sträva efter att ge eleverna. Inte heller här finns något tak för strävandena.

Det nya är således huvudsakligen dels att de kunskaper som "har materialiserats i form av verktyg" – algoritmerna för de fyra räknesätten – inte betonas, dels att man betonar vikten av att lära sig använda de verktyg som dessa kunskaper nu finns inbyggda i. Men framför allt ser man en skillnad mellan de två läroplanerna i betoningen av vad matematik *är*. I Lgr80 *är* matematiken redan något färdigt, något som kan användas och som eleverna efter hand ska lära sig att nyttja. I Lpo 94 beskrivs matematiken så här:

> Matematik är en levande mänsklig konstruktion och en kreativ och undersökande aktivitet som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition. Undervisningen i matematik skall ge eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem (s 34).

Kunskapssyn och ämnesinnehåll avspeglade i diagnoserna

Efter reflektioner över kunskapssyn och ämnesinnehåll representerande Lpo 94 stod det klart att diagnoserna – om de skulle avspegla målen i Lpo 94 – inte skulle kunna bli av den traditionella, kvantitativa modell, där man bedömer eleverna utifrån antalet korrekt lösta uppgifter. De problem som skulle formuleras måste vara sådana som gjorde det möjligt att upptäcka de unga elevernas mer eller mindre kvalificerade sätt att *förstå* på."Nakna sifferuppgifter", avsedda att pröva förmågan att använda algoritmerna för de fyra räknesätten, eller tabellkunskaper, var således inte av intresse. Hur barn upplever att de verktyg kan användas där nu dessa algoritmer finns inbyggda, ansågs däremot vara av vikt att studera. Här uppstod omedelbart ett problem: "Hur ska man kunna utvärdera barns förmåga att använda miniräknaren redan år 2, när den sällan börjar användas förrän betydligt högre upp i åldrarna?" Att utesluta miniräknaren var inte tänkbart, om läroplanens mål skulle kunna avläsas i diagnoserna. Problemet måste på något sätt lösas.

Att inga uppgifter skulle pröva tabellkunskaper betydde inte att prövning av faktakunskaper förankrade i förståelse skulle uteslutas. Den kunskap vi hänvisar till som tabellkunskaper kan vara av olika slag: utantillinlärda kunskapsbitar eller resultatet av meningsfulla operationer som har komprimerats och "inkapslats" till tankeobjekt, relaterade till varandra i ett begreppsligt nätverk. Utan sådana tankeobjekt kan vi inte utveckla *tankefärdigheter*. Tankefärdigheter var viktiga att pröva. Men här uppstod återigen ett problem: att utvärdera tankefärdigheter är bara möjligt om eleverna på något sätt kan förklara hur de har tänkt när de har löst sina problem. Förmågan att "muntligt och skriftligt förklara sitt tänkande" är ett av strävansmålen i Lpo 94 (s 33). Frågan var emellertid om elever under sitt andra skolår skulle kunna ge skriftliga förklaringar till hur de har löst uppgifterna i diagnosen. Att pröva varje elev individuellt i muntliga samtal ansågs knappast vara möjligt inom ramen för den tid en lärare är villig att lägga på diagnosticering.

Hur *"förtrogenhetsaspekten"* av kunskapen skulle utvärderas var inte heller något enkelt spörsmål. Det är framför allt när eleverna möter problem som de inte har mött tidigare, de visar sin förtrogenhet med matematiken och sin tilltro till det egna tänkandet. Men, hur reagerar unga elever – och i ännu högre grad deras lärare – om diagnoserna omfattar problem som inte har berörts i undervisningen ännu?

Att göra de fyra kunskapsformerna tydliga i diagnoserna var en svår men central uppgift i planeringen av materialets utformning. Hur den betoning av språket som medlare mellan barn och den kultur de föds till skulle synliggöras genom diagnosmaterialet var en annan kärnfråga. I det sammanhanget blev Vygotskys (1978) syn på utvärdering ett betydelsefullt inslag i diskussionen. Vygotsky påpekar att vad vi utvärderar är vad barn kan göra utan någon assistans av andra. Vi utvärderar deras *aktuella* utvecklingsnivå, det vill säga resultatet av ett redan fullbordat utvecklingsförlopp. Ger vi barnen ledande frågor eller påbörjar en problemlösning och sedan låter dem fortsätta att lösa problemen på egen hand eller tillsammans med andra barn, anser vi inte att deras agerande säger något om den förståelsenivå de har nått. I själva verket är det emellertid så, säger Vygotsky, att det barn kan göra tillsammans med andra till och med säger mer om deras mentala utveckling i vissa avseenden, än det de klarar på egen hand. Han använder ett exempel med två barn som båda är 10 år, men som enligt intelligenstest anses befinna sig på en 8-årings utvecklingsnivå. Om dessa två barn får lösa problemen i testet med testledarens hjälp kan det mycket väl visa sig att det ena barnet med lätthet hanterar problem på den nivå som 12-åringar brukar klara på egen hand, medan det andra barnet inte klarar problem som ligger över 9-årsgränsen. Skillnaden i utvecklingsålder mellan 12 år och 8 år – eller mellan 9 år och 8 år – kallar Vygotsky (1978) "the zone of proximal development" (s 86). Denna zon hänvisar han till som "knopparna" eller "blommorna" i utvecklingscykeln som ännu inte har hunnit bli frukter. Att få syn på denna "knoppande" kunskap borde vara av vikt i en diagnos. En sådan typ av utvärdering – som med nödvändighet måste göras i någon form av grupparbete – skulle också låta elever och lärare få tillfälle att uppleva språklig interaktion som en viktig drivkraft i barns utveckling. I gruppsamtal skulle eleverna också få tillfälle att visa sin förmåga att förklara muntligt och att argumentera för sitt tänkande, så som Lpo 94 anvisar.

Det har ofta framhållits att en hämmande faktor i det reformarbete inom matematikundervisningen som pågår överallt i världen är de traditionalla utvärderingar som fortfarande är mest vanliga. Administratörer ger motstridiga budskap framhåller man (t ex Smith III, 1996). De betonar förståelseinriktad undervisning, men förväntar sig goda resultat på utvärderingar genomförda med traditionella utvärderingsinstrument. Ett motiv för arbetet med diagnoserna för år 2 i Sverige var att lärare och elever skulle få uppleva det slags matematik som nytänkandet i Lpo 94 står för.

Att utvärdera unga elevers kunskaper i matematik

En utmaning var att rent praktiskt kunna forma diagnoser som passar unga elever. Internationell forskning om utvärdering har oftast berört äldre elever (se t ex ICMI-studierna, Niss, 1993 a och b). Där fanns således få idéer att hämta. I slutfasen av arbetet med utformandet av diagnoserna fick emellertid arbetsgruppen kontakt med van den Heuvel-Panhuizen (1996)[3] vid Freudenthalinstitutet i Holland. Hennes forskning handlade om hur man kan gå till väga för att skriftligt utvärdera unga elevers kunskaper inom ämnet matematik. Freudenthalinstitutets forskare kallar sin syn på hur matematik-undervisning ska bedrivas "Realistic Mathematics Education" (RME).

De teorier om matematikundervisning som företräds av RME har haft stort inflytande långt utanför Europas gränser (Cobb, Perlwitz & Underwood, 1996). RME betonar att matematik ska vara en meningsfull mänsklig aktivitet. Undervisningen ska utgå från barnets egen matematik och avse att utveckla denna genom fortlöpande schematisering och matematisering av problem från verklighet och fantasi, som barn kan identifiera sig med. Det sociala samspelet har stor betydelse och det historiska perspektivet betonas (se t ex Streefland 1991). I matematikens historia kan man se vilka frågeställningar som bidrog till att speciella begrepp utvecklades och utifrån denna kunskap försöka att i undervisningen skapa situationer där elever får komma i kontakt med sådana problem.

Dessa teorier var väl förenliga med de teorier som Lpo 94 utgår ifrån. Det som var nytt var emellertid de teorier van den Heuvel-Panhuizen framförde om hur uppgifter för unga elever ska designas och värderas. Hon anser att för unga elever bör man i första hand bjuda "korta problem". Korta problem ska inte blandas samman med traditionella kortsvars- eller multiple-choice problem. De ska involvera både bredd och djup inom ämnesområdet. Men de ska vara lätt tillgängliga för barnen, presenterade som "situationer" barn kan identifiera sig med, och texten ska vara enkel, till stor del kommunicerad genom illustrationer.

Objektet för utvärdering i RME är inte antalet korrekta svar. Det är

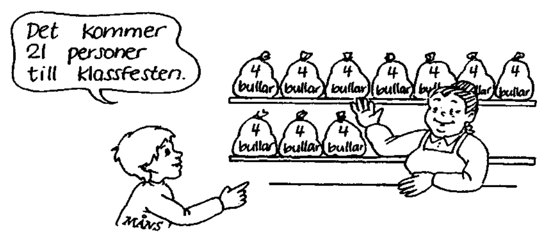
> ... the solution procedures themselves, rather than the results. Assessment must provide, as it were, insight into the students' mathematization activities (s 16).

Denna tanke stämde väl med arbetsgruppens intention att utvärdera tankefärdigheter och problemlösningsmetoder. Van den Heuvel-Panhuizen försöker komma åt elevernas "matematiseringsaktiviteter" genom att lämna ett väl tilltaget inringat utrymme med beteckningen"Kladdpapper" på deras arbetsblad. Vi antog att många barn inte skulle bry sig om att skriva något på ett eventuellt kladdpapper, och ritade därför en liten figur som uppmanar eleverna att inom ett anvisat utrymme skriva om, eller rita, hur de har löst uppgiften. I lärarens manual förklarade vi att uppgifterna inte skulle anses lösta om inga noteringar var gjorda inom de ramar där denna uppmaning fanns. I dessa uppgifter utvärderas nämligen inte enbart faktakunskaper utan också dels tankefärdigheter, dels förmågan att skriftligt förklara sitt tänkande. De barn som inte kunde skriva själva uppmanades att muntligt förklara för läraren hur de hade tänkt så att de kunde få hjälp med att skriva ned det.

Bra problem ska kunna lösas på olika sätt och gärna också ha flera möjliga svar. De ska vara utmanande. Barnet ska uppleva att det är viktigt eller spännande för de personer som förekommer i problemsituationen att kunna lösa dem. Två barn som eleverna kan identifiera sig med – Måns och Mia – finns med i praktiskt taget samtliga problem i de svenska diagnoserna. Många av dessa problem kan ha flera möjliga svar, och de flesta kan lösas på olika sätt.

De situationer som presenteras i problemen kan läggas på olika nivåer, i meningen att de kan kräva olika grad av förmåga att "matematisera" (Freudenthal, 1983) vardagsproblem. På den lägsta nivån, som knappast hör hemma i utvärderingar, enligt van den Heuvel-Panhuizen, är uppgiften bara en "naken sifferuppgift" som klätts i ord (t ex "Lena har sex karameller och får två till. Hur många har hon då?") eller en enkel fråga, som kan besvaras bara på ett sätt och med en enda metod. Ett fåtal sådana uppgifter finns i diagnosmaterialet, men då av speciella anledningar, som jag senare ger exempel på.

I uppgifter på mellan-nivå måste barnen själva "matematisera" den situation som beskrivs. Uppgift F:5 (fig 1) i diagnosmaterialet är exempel på en sådan uppgift. Det är en uppgift av ett slag som eleverna knappast har mött i undervisningen ännu. Den prövar således förtrogenhetskunskap, tilltron till det egna tänkandet och förmågan att använda matematik i olika situationer.



Alla ska ha varsin bulle.
Hur många påsar måste Måns köpa?

Fig. 1 Uppgift F.5

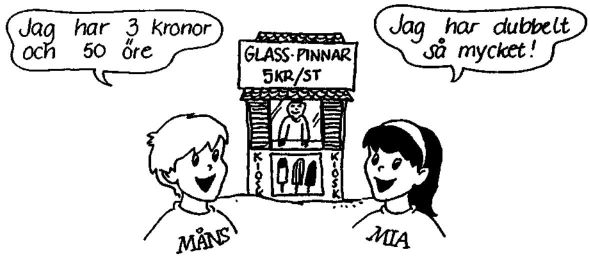
Uppgifter på den högsta nivån kräver inte enbart att eleven ska kunna "matematisera" den situation som beskrivs i problemet, utan också att han eller hon ska kunna "organisera" den Problem där viss information saknas, t ex uppgift E:2 (fig 2) är en sådan uppgift (inspirerad av en liknande uppgift som van den Heuvel-Panhuizen har formulerat).

Hur många 8-åringar väger tillsammans ungefär lika mycket som björnungen?

Fig. 2 Uppgift E:2

Här måste barnen först organisera situationen, till exempel genom att tänka efter vad de själva väger och om detta kan tänkas vara representativt för 8-åringar. Sedan måste de också matematisera den, det vill säga hitta någon bra metod för att lösa den. I elevlösningarna kunde man se ett otal exempel på olika typ av organisering och olika grad av matematisering. En del barn adderade upprepade gånger mödosamt det tal som berättade om vad de själva vägde i ett antal additionsuppställningar. Andra, som ansåg sig själva väga mer än 8-åringar normalt gör tog reda på vad några av deras kamrater vägde och adderade de tal de fick fram på miniräknaren, till dess de kom så nära 120 de kunde. Andra återigen valde ett tal som var lätt att addera, men ändå någorlunda rimligt, till exempel 30, och kunde räkna ut i huvudet hur många gånger 30 gick i 120.

Vidare kan problem vara mer eller mindre komplexa. Flerstegsuppgiften E:7 (fig 3) är exempel på ett komplext problem. Att lösa komplexa problem kräver också en viss grad av organisationsförmåga.



Hur mycket har Mia?
Måns och Mia lade ihop sina pengar.
Räckte det till en glass åt Måns och en åt Mia?

Fig 3 Uppgift E:7

Diagnoser ska inte enbart avse att pröva kunskaper man redan har undervisats om. Lika viktigt – kanske viktigare – är det att pröva kunskaper eleverna kommer att undervisas om, anser van den Heuvel-Panhuizen. Denna synpunkt överensstämde med arbetsgruppens åsikter om hur man kan pröva förtrogenhetskunskap. När elever löser uppgifter de inte har undervisats om får läraren två slags viktiga upplysningar:

• viktig förförståelse kan fattas hos vissa barn

• en del barn har utvecklat informella problemlösningsmetoder inom området, som man kan utgå ifrån när det nya området introduceras.

Inte bara problem av det slag som visas i fig 1 utan också många andra problem, till exempel där barnen måste tänka proportionellt, är av det slaget.

Slutligen understryker van den Heuvel-Panhuizen att utvärderingar inte ger mycket om de sker bara vid ett enda tillfälle. Man måste utvärdera kontinuerligt, och se om något händer mellan utvärderingstillfällena. En kontinuerlig utvärdering är också önskvärd när man ser kunskaper som en process, på det sätt som antyds i Läroplansbetänkandet. Som framgår av den beskrivning jag senare gör av det färdiga materialet utformades diagnosmaterialet så att kontinuerliga utprövningar skulle bli möjliga.

En viktig förutsättning för att bilden av eleverna ska bli så klar som möjligt är ändå, poängterar van den Heuvel-Panhuizen slutligen, att svaren i de skriftliga diagnoserna kompletteras med samtal och observationer. Ett samtalsunderlag finns också i diagnosmaterialet.

Utprövningar

Hur goda teorier man än utgår ifrån är det helt avgörande att man förvissar sig om hur de fungerar i praktiken. Det material som efter hand konstruerades prövades ut vid flera tillfällen.

I en första utprövning i liten skala, som gjordes redan i maj månad 1994, var syftet att undersöka om elever redan under sitt andra skolår utan allt för omfattande förberedelser

• i skrift eller bild kan redovisa hur de löser problem

• kan lösa problem med hjälp av miniräknaren

trots att de inte tidigare har gjort skriftliga redovisningar eller använt miniräknare i undervisningen. På grundval av de erfarenheter som gjordes vid besök i två klasser i samband med denna utprövning utgick arbetsgruppen från att detta skulle vara möjligt, om barnen vid ett enda lektionstillfälle fick pröva miniräknaren och tillsammans diskutera och skriva ner sina olika sätt att lösa problem. För att studera hur pålitliga de skriftliga redovisingarna var intervjuades samtliga barn vid detta besök. Det visade sig att de nästan alltid löste problemen på samma sätt i intervjun som i de skriftliga redovisningarna.

Nästa utprövning skedde i maj månad 1995. Då hade ett stort antal uppgifter konstruerats och samlats i fem olika häften. Varje häfte prövades av flera hundra barn och varje lärare besvarade ett frågeformulär. Analyser av barnens sätt att lösa uppgifterna gjordes på cirka 100 elevprotokoll (alla protokoll från 5 – 8 klasser) för vart och ett av de fem häftena. I en sammanställning redovisades andelen korrekta svar med någorlunda fullständig redovisning för varje uppgift och för andelen sådana svar i de klasser som hade det bästa och det sämsta resultatet på respektive uppgift. Samma klass hade aldrig bäst eller sämst resultat på samtliga uppgifter. I sammanfattningen inkluderades också lärarnas omdömen om uppgifterna. Vidare gjordes en ingående analys av de olika sätt eleverna hade redovisat att de löst de olika uppgifterna på, och ett antal skriftliga redogörelser och bilder från elevprotokollen valdes som exempel att presentera i lärardelen av diagnosmaterialet.[4]

Uppgifternas lämplighet diskuterades sedan med utgångspunkt från den sammanställning som hade gjorts. Vissa ströks, och andra ansågs vara i behov av större eller mindre justeringar. Att en uppgift ströks kunde bero på att alltför liten eller allt för stor andel av eleverna hade löst den, eller på att den inte gav någon information utöver vad andra uppgifter i materialet gav. Den kunde också strykas med anledning av att många eller alla lärare hade påpekat att den var formulerad på ett sätt som gjorde det svårt för eleverna att förstå vad som menades. Oftast formulerades emellertid sådana uppgifter om och prövades på nytt innan de eventuellt ströks. En uppgift, där barnen skulle fylla i vissa tomrum på en urtavla med romerska siffror – den enda uppgift som prövade barnens förtrogenhet med något som tillhör det historiska perspektivet (samtidigt som den utvärderade deras förmåga att fortsätta ett påbörjat talmönster) – sorterades bort, därför att de lärare som prövade ut materialet ansåg att den inte var adekvat för åldersstadiet. Att uppgifter som berör det historiska perspektivet nu helt saknas är en brist i diagnoserna, som förhoppningsvis kommer att kunna rättas till vid senare omarbetningar.

Nu konstruerades också de gruppuppgifter som skulle ingå i diagnoserna.

Nya och ändrade uppgifter samt gruppuppgifter skickades sedan på utprövning till elever som just hade börjat sitt tredje år i skolan. Om de nya och ändrade uppgifterna var utan anmärkningar i den utprövningen valdes de ut för att tillsammans med de tidigare accepterade uppgifterna ingå i det färdiga materialet.

Materialets utformning

Diagnosmaterialet består i sin färdiga utformning av sex uppgiftshäften: A, B, C, D, E, F. I varje häfte finns ett antal skriftliga uppgifter, avsedda att lösas individuellt, och en gruppuppgift. En anledning till att det finns så många varianter är att det ska finnas möjlighet till kontinuerlig utprövning. I anvisningarna anges det att det första häftet, A, kan användas redan i slutet av det första året, medan det sista, F, passar bra som fördiagnos i början av det tredje året.[5]

Försättsbladet till varje häfte visar en bild av två barn och texten "Lös problem med Måns och Mia. Läs, skriv och rita". Det avser att betona den ämnesintegrering och helhetssyn på kunskap och elever som uttrycks i Lpo 94, och som är representativ för materialet.

I ett kommentarmaterial informeras lärarna om materialets syfte, om hur de kan presentera uppgifterna samt om hur elever i utprövningarna löste dessa. Dessutom finns ett blad där man fortlöpande kan skriva in observationer om elevers framsteg inom de områden som prövas.

I nästa del av artikeln finns exempel på det slags information elevsvaren kan ge. Exemplen är elevlösningar hämtade från ett av de områden som diagnoserna omfattar, det som rör det tidigaste bråktalsbegreppet "en halv".

Barns sätt att uppleva en halv och att utföra halveringar

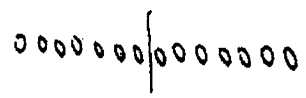
När barn kommer till skolan har de börjat utveckla en hel del "vardagsbegrepp" om fenomen som rör ämnet matematik. "Vardagsbegrepp" har sin rot i empiriska upplevelser, begreppet "en halv" t ex i upplevelser av likadelning. Matematiska begrepp däremot har sin rot i definitioner. För att barn ska få tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan är det viktigt att undervisningen utgår från deras "vardagsbegrepp", även om motivet för undervisningen är att hjälpa dem att fortlöpande "matematisera" dessa. Ett angeläget syfte med diagnoserna var att de skulle avslöja något om barns "vardagsbegrepp", och i vilken mån dessa hade börjat "matematiseras". De skulle också visa om barnen hade faktakunskaper som var nödvändiga som tankeredskap i mer invecklad problemlösning. För att göra detta möjligt måste problemen vara "kritiska", det vill säga de måste innehålla något som gjorde att de avslöjade brister. De måste också formuleras så att olika aspekter hos begreppet aktualiserades, t ex olika ord och uttryck som är knutna till det.

I häfte A prövas barnens förståelse för uttrycket "hälften" i uppgift A:2 och för uttrycket "hälften så många" i uppgift A:4. I A:2 säger Måns att Mia får hälften av hans karameller, som är avbildade i uppgiften. Barnen uppmanas att ringa in Mias karameller. I uppgift A:4 ska barnen rita de hockeybilder Mia har. Hon säger att hon har hälften *så många* som Måns och hans sex bilder är avbildade. Båda problemen är "icke komplexa lågnivå-problem". Barn som inte har hört eller funderat över uttrycken "hälften" eller "hälften så många" klarar inte uppgifterna, och barn som är bekanta med uttrycken klarar dem lätt.

I de flesta klasser var det någon, ibland ett par elever, som inte kunde lösa ens den lättaste uppgiften, A:2. Ibland förstod de inte alls vad som menades med "hälften" och ibland uttryckte de mycket privata tolkningar, t ex att "hälften är ett mindre". Tanken att "hälften så många" betyder "många" dyker upp i uppgift A:4 liksom i nästan samtliga uppgifter där uttrycket "hälften så många" förekommer. Problemen visade sig således vara "kritiska". De prövar viktig fakta- och förståelsekunskap som barn måste ha för att kunna lösa andra problem där begreppet halva eller hälften förekommer. Elevsvaren visar också hur barn till att börja med ger en mycket privat innebörd till ord de har hört men sällan använt.

I häfte B prövas återigen "hälften så många" nu i en uppgift på mellannivå. Barnen måste själva rita ett antal äpplen och bananer på ett sådant sätt att det blir hälften så många äpplen som bananer. Uppgiften löstes korrekt av 64% (högst 80% – lägst 20%)[6] av eleverna. De vanligaste felsvaren var även här knutna till tanken att hälften så många är "många", ibland "ett äpple mer", ibland ett obestämt antal fler äpplen och ofta dubbelt så många, t ex fyra äpplen och två bananer.

I häfte C (uppgift C:2) uppträder uttrycket "hälften så många" i en situation där man måste *beräkna* vad hälften så många som 14 är. Tidigare har inga beräkningar krävts. Till skillnad från vad som var fallet i de tidigare exemplen, där enbart fakta- och förståelsekunskap prövades, prövas således också tankefärdigheter i den här uppgiften. Drygt 75% (högst 95% – lägst 56%) av eleverna kunde lösa den korrekt och beskriva hur de hade löst den. De skrev oftast att de hade tänkt "7 + 7 = 14 eller "14 – 7 = 7" eller att de helt enkelt "visste". En del elever kunde emellertid inte tänka ut svaret, utan ritade ringar för de 14 päron Mia säger att hon har och som man inte kan räkna därför att de finns i en korg (fig 4a). Deras förståelse och faktakunskap var det inget fel på, men de behöver få hjälp med att utveckla tankefärdigheter. Andra elevers redovisningar på olika nivåer av matematisering skulle kanske kunna hjälpa dem (fig 4b och c).



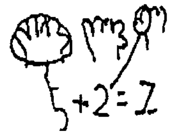


Fig. 4 a
Barnet gör en bild för att räkna på

Fig. 4 b *Fig. 4 c*
Barnet redovisar tankar, där 14 har trukturerats med 5-tal

Av redovisningarna framgår det hur ett mycket torftigt språk räcker för att avge en skriftlig förklaring, och att bilder ofta kan säga mer än ord.

I häfte D prövas ordet "hälften" på tre helt andra sätt. Uppgift D:3 (fig 5) avser dels att pröva förståelsen för att "hälften av" är ett relativt begrepp, dels att uppdelning i hälfter kan göras på många olika sätt. Mias duk är längre och smalare än de övriga 8 dukarna. Att barnen kan måla hälften av en enda av de 8 omålade dukarna visar således att de förstår "hälften av" som ett relativt begrepp, men deras sätt att måla visar också på olika nivåer i förståelsen för vad hälften är. Ca 75% av eleverna målade minst 4 dukar på olika sätt. Uppgiften avsåg att pröva förståelsekunskap, men många elevsvar visade också på goda förtrogenhetskunskaper, som att en halv kan ses som två fjärdedelar, och att en halv rektangel kan bli en triangel.

Fig. 5a *Fig. 5b*
De flesta målade "halva duken" på flera sätt, som kan leda till diskussioner om geometriska förhållendet (t.ex mellan triangelns och rektangelns area). Fig. 5b visar att eleven kan se "en halv" som "två fjärdedelar".

I uppgift D:4 – där Mia har fått 5 kronor för svamparna i sin korg och Måns bara "hälften så mycket" – var avsikten att pröva om barnen visste att hälften av en krona var 50 öre. Avsikten var alltså att pröva ett faktakunnande. Svaren på uppgiften – och även svar på andra uppgifter – visade att många barn är okunniga om 50-öringens existens eller inte förstår vad som menas med 50 öre. I en uppgift som nu inte finns med i diagnoserna, och där barnen skulle ringa in de pengar som behövdes för att köpa en viss vara, pekade t ex flera barn på 50-öringen och frågade om det var en 50-krona.

De barn som inte visste att 50 öre är hälften så mycket som en krona uppfattade uppgiften som uppdelning av ett udda antal objekt (fig 6a). En del gjorde om formuleringen "hälften så mycket" till "hälften så litet" (fig 6b).

att 5-2 blir 3 om man vet
vet 3 man det så hän

Fig 6a
Et udda antal är omöjligt att dela lika. Man får dela så lika som möjligt".

Jag tänker att jag tar hälften så lite.
2:50

Fig. 6b
Det är lättare att tänka: "Halften så litet" som 5 kr är 2:50"

Vissa barn använde ett formellt matematiskt språk i sina redovisningar (fig 6 c och d). Uppgiften gav således inte enbart upplysningar om faktakunnande. Skillnaden i förmåga att matematisera framgick tydligt av elevsvaren, liksom i många fall förståelsen för vad "hälften så många som ett udda antal" är. Ca 60% av eleverna löste uppgiften korrekt (högst 100% – lägst 25%).

2och $\frac{1}{2}$ 5-2och $\frac{1}{2}$ = 2och $\frac{1}{2}$

Jag tänker $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 5$
sen tänker $5 - 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$
2:50

Fig. 6c *Fig. 6d*
Exempel på redovisningar med hjälp av ett mer matematiskt språk.

I uppgift D:7 (fig 7) prövas begreppet "hälften var" i ett komplext högnivåproblem. I det här problemet kan man tycka att det fattas information. Man vet t ex inte hur många karameller det finns i påsen.

Hur många karameller ska Måns ge Mia?

Fig. 7 Uppgift D:7

Men som framgår av fig 8 behöver de flesta elever inte den informationen.

Fig. 8
De flesta elever "transformerar" direkt 5+9 till 7+7 i bild eller i tanke uttryckt med ett matematiskt språk.

Tre barn har använt sig av ett tidigt och mycket intressant sätt att dela upp de karameller som Måns har fått "för mycket" (fig 9 b, c). De representerar inte karamellerna genom att rita ringar eller streck utan genom att skriva de siffror som i deras tankar är knutna till de karameller som Måns har fler än Mia. Det är i deras föreställning de karameller som är knutna till siffrorna 5, 6, 7, 8, 9. Barnen utgår förmodligen från de siffror de ser i uppgiften: 5 och 9 utan att tänka på att även Mia har den karamell som är knuten till siffran 5, och att de karameller Måns har "för mycket" således enbart är de som är knutna till siffrorna 6, 7, 8 och 9 (fig 9a). När "5" kommer med blir det ett udda antal. Två av barnen (fig 9b) låter då två "7" knytas till den mittersta karamellen och svarar "Sju var". Den tredje (fig 9c) har markerat "5", förmodligen för att "5" inte tillhör de karameller Måns har fått "för mycket". Hon delar "6, 7, 8 och 9" i två delar och svarar korrekt att Måns ska ge Mia två karameller. Cirka en tredjedel av eleverna har löst uppgiften korrekt och redovisat sin tankegång (högst 88% – lägst 15%).

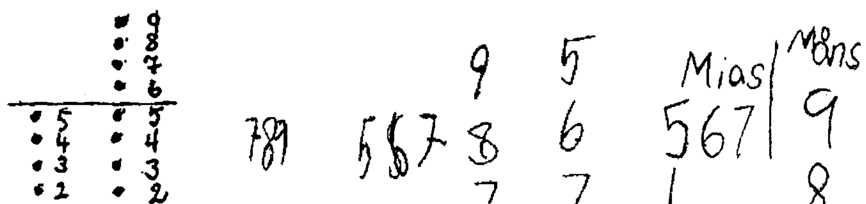


Fig. 9a
Min tolkning av barnets tankar i fig. 9c

Fig. 9b
"7-karamellen" delas i två sjuor

Fig. 9c
"5-karamellen" räknas inte

I den här uppgiften prövas både faktakunskap, förståelse, tankefärdigheter, förtrogenhet och tilltron till det egna tänkandet.

I häfte F avsåg uppgift F:4 att pröva färdigheten i att beräkna vad hälften så många som 30, 50, 70 och 90 olika saker är, det vill säga vad hälften så mycket som ett udda antal 10-tal är. Den färdigheten använder barn ofta när de börjar lära sig multiplicera och tänker "5 gånger är hälften så mycket som 10 gånger" (se t ex ter Heege, 1985). Många barn upplevde exakt samma svårigheter med dessa problem som de upplevde, när de skulle räkna ut vad hälften så mycket som 5 (kronor) var: ett udda antal går inte att dela lika. Det spelade ingen roll att det i detta fall var ett udda antal 10-tal, som således lätt borde ha kunnat delas upp i ental eller 5-tal. En uppfattning av hur ett udda antal ental skulle delas var att man ska dela i två delar "som är så lika som möjligt". I uppgift F:4 försökte barnen dela i två delar så att antalet 10-tal blev så lika som möjligt. Hälften så många färgkritor som 50 blev t ex antingen 20 eller 30. En uppfattning om hälften, när det gäller ental var att "hälften är ett mindre". I uppgift F:4 var motsvarande tanke att "hälften är 10 mindre" (fig 10a och b).

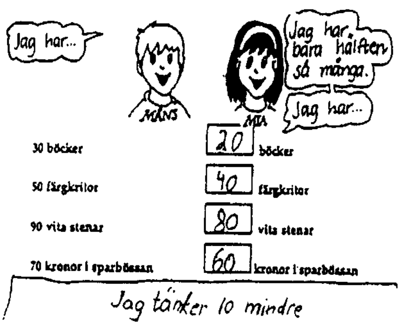


Fig. 10 a
"Hälften så många" är 10 mindre"

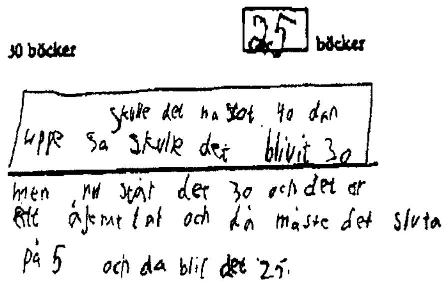
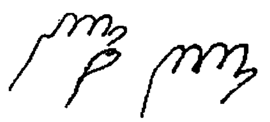


Fig. 10 b
Hälften av ett jämnt antal 10-tal är 10 mindre, men hälften av ett "åjemt" tal måste sluta på 5"

Dessa sätt att tänka tyder på att för många elever är 10-tal odelbara "pinnar" (uttryck använt av en elev jag samtalade med) möjligen av den typ de har sett användas när 10-tal demonstreras med 10-basmaterial (10-talsstavar och entalskuber). Sådana observationer bör följas upp med samtal. Barn som tänker så får problem vid subtraktion från fler 10-tal än ett och vid subtraktion över 10-talsgränser. Uppgiften avsåg att pröva tankefärdigheter, men barnens svar avslöjade dessutom allvarliga förståelsebrister, eller snarare missuppfattningar, av vad 10-tal är. Dessa missuppfattningar var förmodligen en följd av att barnen hade fått använda ett färdigstrukturerat konkret material i undervisningen, innan de själva hade fått forma 10-tal.

De barn som förstod att ett 10-tal är 10 ental – och två 5-tal – hittade emellertid ofta bra idéer för hur man kan tänka på det uppdelade 10-talet (fig 11a och b). Cirka 60% av eleverna (högst 79% – lägst 23%) hade löst alla fyra uppgifterna korrekt.



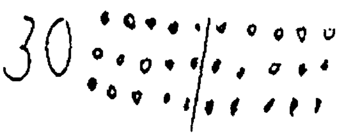


Fig. 11 a *Fig. 11 b*

Ett av 10-talen (fig. 11 a) - eller samtliga 10-tal (fig. 11 b) - upplevs som 10 ental grupperade i två 5-tal.

Begreppet "en halv" använder barn ofta som tankeredskap när de löser problem, som inte alls handlar om "en halv". Det gjorde de t ex i de två uppgifter som avser att pröva deras proportionella tänkande: gruppuppgiften till häfte E (fig 12)[7] och uppgift F:7 (fig 13).

Hur många ägg behöver pappa nu till omeletten?

Fig. 12
Gruppuppgift till häfte E

Hur många flaskor måste Måns köpa?

Fig. 13
Uppgift F:7

Gruppuppgiften till häfte E började eleverna lösa individuellt och gick sedan tillsammans i par eller 3-grupper, för att enas om ett svar och för att diskutera eventuellt olika sätt att lösa uppgiften. Till sist redovisade grupperna för varandra i helklass.

Det vanligaste var att barnen när de löste problemet individuellt tänkte additivt – "två personer till, två ägg till" – och svarade att det behövdes 8 ägg. Flera elever – och efter diskussion många grupper – tänkte och ritade emellertid proportionellt på två olika sätt om hur uppgiften enklast skulle lösas. I båda dessa sätt att lösa problemet spelade begreppet "en halv" stor roll som tankeredskap.

Enligt *"idé 1"* (fig 14a och b) tänkte barnen på förhållandet *mellan* de två variablerna ägg och personer: 1/1,5 = 6/9 (fig 14a) eller 2/3 = 6/9 (fig 14b).

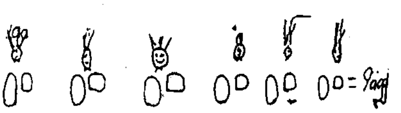


Fig. 14 a
Idé 1: Barnen utgår från vad en person får: 1 1/2 ägg och adderar sedan de 6 halva äggen: 9 ägg.

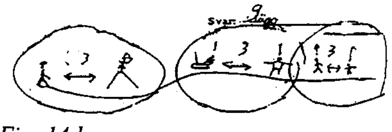


Fig. 14 b
Idé 1: Barnen utgår från vad ett par personer får: 3 ägg. Tre par får då 3+3+3 ägg.

Samma idé uttrycktes matematiskt så här (fig 15) av en grupp som direkt löste problemet:

$$\frac{6}{9} = 1,5 \qquad 1.5 \cdot 6 = 9$$

Fig. 15
Antalet ägg ska vara 1,5 gånger så stort som antalet personer enligt idè 1.

Enligt *idé 2* tänkte barnen dels på förhållandet *inom* variabeln personer, dels på förhållandet *inom* variabeln ägg: 4/2 = 6/3. De två tillkomna personerna (enligt dessa barn "papporna") är hälften så många som de personer som tidigare åt omeletten (barnen). Papporna ska alltså ha hälften så många ägg som barnen. De uttryckte idén så här, enligt läraren:

"... eftersom papporna är halva antalet av barnen får de alltså hälften ... 3 ägg. Då blir det 9".

Gruppuppgiften prövade barnens förmåga att förklara och argumentera och visade ibland tydligt på deras potentiella förståelsenivå. Den visade emellertid också på förmågan till samarbete, som ofta, men inte alltid var god. Ibland gav elever med utmärkte problemlösningsförslag till exempel upp, utan krav från kamraterna på att vidareutveckla sin argumentation, efter att ha blivit motsagda av en eller flera kamrater. Då slutade diskussionen helt enkelt med att den socialt starkaste elevens åsikt blev den som framfördes i klassredovisningen. Hur problem av dessa slag kan lösas genom att barn och vuxna tillsammans skapar "sociomatematiska normer" för hur problemlösning i grupp ska gå till, visar till exempel Yackel & Cobb (1996).

I uppgift F:7 är det ofta svårt att säga om barnen har tänkt enligt den första eller enligt den andra idén.

I fig 16a kan barnet ha tänkt "10 personer", när han eller hon ritade 3 flaskor, "20 personer" efter det att 6 flaskor hade ritats och så vidare (idé 1, förhållandet mellan de två variablerna personer och flaskor fokuseras: 10/3, 20/6, 30/9, 40/12, 50/15, dvs 10/3 = 50/15). Tanken ”50 personer är 5 gånger så många som 10 personer ... alltså ska jag rita 3 flaskor 5 gånger” är emellertid en lika trolig förklaring till hur bilden har tillkommit (idé 2, förhållandet inom varje variabel fokuseras: 10/50 = 3/15 eller snarare 10 x 5 = 50 ... 3 x 5 = 15).

På samma sätt kan det barn som har den övre redovisningen i fig 16b först ha skrivit 20 p och ovanför detta 6, sedan 40p och återigen 6 samt slutligen 50p och 3 (hälften av 6), för att slutligen addera 6 + 6 + 3 (idé 1, förhållandet mellan de två variablerna personer och flaskor fokuseras: 20/6; 40/12; 50/15, det vill säga 20/6 = 50/15. De kan emellertid också ha tänkt 20, 40, 60 ...6, 12, 15, enligt tanken 50 är 2 1/2 gånger så mycket som 6 [6 + 6 + 3]).

I den nedre redovisningen är det antagligen idé 2 som har styrt problemlösningen. Barnet tycks redan ha tänkt inom variabeln personer 2 x 20 + 20 – 10 = 50 (2 x 20 + 1/2 x 20), det vill säga: 50 personer är 2 1/2 gånger så många som 20 personer, innan redovisningen skrevs ner. Där är det enbart variabeln flaskor ”2 x 6 + 6 – 3 (2 x 6 + 1/2 x 6) = 15 flaskor” som redovisas, förmodligen enligt tanken 15 flaskor är 2 1/2 gånger så många som 6 flaskor.[8]

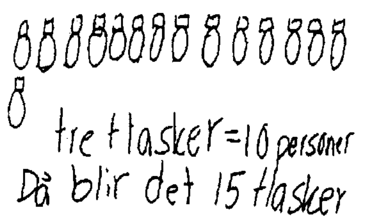


Fig. 16 a
Idé 2: Barnen utgår från vad 10 personer får. 50 personer får fem gånger så många.

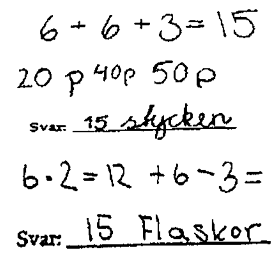


Fig. 16 b
Idé 2: Barnen utgår från vad 20 personer får. 50 personer får 2 1/2 gånger så många.

Hela 35% (högst 50% – lägst 30%) svarar korrekt med redovisning. Att så pass stor andel av eleverna klarade det här problemet visar att många 8-åringar har goda fakta- och förtrogenhetskunskaper relaterade till väl utvecklade tankefärdigheter och intuitiv förståelse för betydligt mer krävande problem än de vanligtvis får möta i undervisningen. Det visar också att elever ofta har god tilltro till sin egen förmåga att tänka och att lösa problem. Genom att de löser problemen på olika sätt och på olika matematiseringsnivåer uppstår den drivkraft för inlärningen, som konfrontationer mellan olika idéer medför.

Avslutande sammanfattning

Uttrycken hälften och dubbelt förekommer ofta i komplexa "högnivåproblem" och behövs lika ofta som tankeredskap i sådana problem. För att alla barn ska kunna vara med och lösa problem av den typen, är det viktigt för läraren att förvissa sig om att alla elever är förtrogna med dessa begrepp. "Halvering" är i själva verket en så viktig tankefärdighet att den borde få specialbehandling i matematikundervisningen, anser vissa forskare (t ex Thornton, 1985).

Exemplen har tagits enbart från ett av många områden som berörs av diagnoserna. De visar ändå tydligt den rikedom av idéer som finns i barns mer eller mindre matematiserade vardagsbegrepp, och som skulle kunna tillvaratas i en problembaserad undervisning, där barn och lärare interagerar och förhandlar sig fram till regler för "det matematiska språkspelet" (Wittgenstein, 1953).

Förhoppningsvis kommer lärare som använder diagnoserna att upptäcka den "knoppande kunskap" som tar sig uttryck dels i de diskussioner som förs i grupp- och helklassamtal, dels i redovisningar eleverna gör, när de skriver ner sina sätt att tänka. De allra flesta uppgifter i diagnoserna kan användas på samma sätt som uppgiften om omeletten: efter det att barnen har löst dem själva kan de parvis diskutera sina lösningar och till sist redovisa i helklass. Lärare som i arbetet med gruppuppgifterna upptäcker den dynamik och kraft i undervisningen som samtal och interaktion leder till kommer förhoppningsvis att använda många av uppgifterna så, och att så småningom göra ett sådant arbetssätt till ett naturligt inslag i undervisningen.

Att prov och diagnoser är styrmedel på gott och ont är ett väl känt faktum. Avsikten med de diagnoser som har presenterats här var inte att de skulle vara styrande i meningen tvingande. Avsikten var att de skulle underlätta för lärare att hitta infallsvinklar på undervisningen som möjligen skulle kunna leda till att de av eget intresse och nyfikenhet vågade ta steget mot en ny och mer berikande samvaro med eleverna; en samvaro där lärare och elever lär av varandra, som människor alltid har gjort i den sedan urminnes tider pågående kunskapande process där vår kultur har blivit till och fortsätter att formas.

Referenser:

Cobb, P. Perlwitz, M. och Underwood, D. (1996) Constructivism and Activity Theory; a Consideration of their Similarities and Differences as they relate to Nathematics Education. I H. Mansfield, N. A. Pateman och N Bednarz (red.) *Mathematics for tomorrow's young children. (pp 10–55).* Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel publishing company.

Läroplanskommittén (1992) *Hovudbetänkande:Skola för bildning. Statens offentliga utredningar 1992:94,* Utbildningsdepartementet. Stockholm: Almänna Förlaget.

Lybeck, L. (1981) *Archimedes i klassen. En ämnespedagogisk berättelse.* Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg.

Niss, M. (red) (1993) *Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (red) (1993) *Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Pettersson, A. (1996). Nationella diagnosmaterial för skolår 2 och 7. *Nämnaren, 3, årg 23,* 8–12.

Smith III, J. P. (1996) Efficacy and Teaching Mathematics by Telling: a Challenge for Reform. *Journal For Research in Mathematics Education, Vol 27, nr 4,* 387–402.

Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thornton, E. B. C. (1985) Four Operations? or Ten? *For the Learning of Mathematics 5, 2:*33–34.

Ter Heege, J. (1985) The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics, 16 (4).* 375–388

Wittgenstein, L. (1953) *Filosofiska undersökningar (Philosophical Investigations).* Stockholm: Bonniers

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996).*Assessment and Realistic Mathematics Education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes.* In M. Cole, V J. Steiner, S. Scribner, E. Souberman (Eds.) London: Harvard University Pre

Yackel, E. och Cobb, P. (19969 Sociomathematical Norms, Argumentation and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, vol 27, nr 4,* 458–477.

Assessment in Mathematics for the Second School Year

Why – How – What are the results?

Abstract

The article presents theories behind the Swedish National Diagnoses in Mathematics for Year 2 and exemplifies how these are expressed in the material. One aim of the diagnoses is to mirror what is new in the Swedish curriculum, Lpo94, and in the perspective it takes on mathematics and on teaching and learning. The main intention, however, is to reveal different ways of experiencing mathematics that were identified among the children. The design of the problems is influenced by theories on assessment presented by van den Heuvel-Panhuizen, a researcher representing the Realistic Mathematics

Education tradition in the Netherlands. How the theories are mirrored in the material is exemplified by problems aimed at revealing children's ways of experiencing the most early fraction concept: "a half".

Author

Dagmar Neuman worked at Göteborg University, Department of Education and Educational Research, until she retired. After retiring she has among other things been working on the development of the National Diagnosis in Mathematics for year 2 in Sweden.

Address

Fagerstrand, 131, HÄSSELBY.
Fax 08 / 739 88 84. E-mail: dagmar.neuman@mailbox.swipnet.se

Noter

[1] Alla sidhänvisningar i denna del av artikeln är hänvisningar till sidor i Läroplansbetänkandet. Referenser till forskning som diskuteras finns i Betänkandet och jag ger därför enbart sidreferenser till Betänkandet, även när jag diskuterar denna forskning.

[2] I Betänkandet använder man beteckningen kulturpsykologisk forskning. En vanligare benämning är kulturhistorisk eller sociokulturell forskning.

[3] Referensen är gjord till van den Heuvel-Panhuizens avhandling, som ännu inte hade kommit, när diagnosmaterialet utarbetades. Medlemmar ur arbetsgruppen fick emellertid förmånen att besöka Freudenthalinstitutet i Holland våren 1995 och fick då i redan tryckt material och genom samtal inblick i huvuddelen av det innehåll som senare presenterades i avhandlingen.

[4] Av de elevelösningar som senare presenteras i artikeln ingår en del i diagnosmaterialets lärardel, dock oftast i förkortade versioner.

[5] Det understryks emellertid att man inte måste använda diagnoserna så, att det är läraren som avgör hur han eller hon bäst anser sig kunna utnyttja dem.

[6] Andel lösta uppgifter i klasser med högst respektive lägst svarsfrekvens. Klasser som deltog i utprövningarna var inte

slumpmässigt utvalda. Lärare och rektorer som t ex deltog i studiedagar och konferenser tillfrågades om de ville delta med sin klass eller skola, eller om de kände till lärare som skulle vilja delta.

[7] Detta är den bild som i utprövningsmaterialet var relaterad till gruppuppgiften i häfte E. Bilden har ändrats i det färdiga materialet.

[8] Jfr Lybecks (1981) beskrivning av hur elever i problem som berör proportionalitet ibland tänker additivt och ibland tänker på förhållandet antingen inom eller mellan variabler.