Undervisning i problemløsningsstrategier

Bjørnar Alseth

Artiklen presenterer i første del et rammeverk som dekker sentrale aspekter ved matematisk tenkning. Begrepene som blir beskrevet er: basiskunnskap, strategier, metakognisjon og holdninger. I tillegg blir forholdet mellom dem diskutert. Artiklens andre del er viet strategiundervisning. Søkelyset rettes mot en modell for slik undervisning; hvordan strategier kan undervises ved hjelp av denne modellen, men også hvordan de øvrige komponentene i rammeverket bør stimuleres for å nå målet: økt matematisk kompetanse gjennom rasjonell bruk av strategier. Artiklen konkluderer med at dette rammeverket og denne modellen for undervisning danner et troverdig teoretisk grunnlag for et videre empirisk arbeid med undervisning av strategier.

Følgende oppgave ble gitt til 17 elever i en førsteklasse ved en videregående skole:

> *Noen personer gikk inn på en kafé for å drikke kaffe og spise kaker. Alle kjøpte det samme. Hvor mange kopper kaffe drakk hver person når de betalte 133 kr tilsammen. Kaffen kostet 5 kr per kopp og hvert kakestykke kostet 9 kr?*

Kun to av elevene klarte å finne en løsning på dette problemet, og det er på sin plass å spørre: Hvorfor klarte ikke elevene å løse denne oppgaven? De grunnleggende ferdighetene som må til er addisjon, multiplikasjon og divisjon, noe alle elevene antageligvis behersket. For å løse dette problemet er det ikke nok å kunne disse algoritmene, det er ikke nok bare å ha den grunnleggende kunnskapen, man må også vite *når* den skal tas i bruk. Som en hjelp til dette, kan man lære seg bestemte metoder eller strategier som forteller hvilke fakta man bør bruke og hvilke algoritmer man bør utføre. I tilfellet over er en mulig strategi "gjett & sjekk". Gjett på en av de ukjente størrelsene,

---

Bjørnar Alseth *är högskolelektor vid Høgskolen i Telemark.*

og se om det gir en mulig løsning. Strategien forteller hvilke regnestykker som skal utføres og i hvilken rekkefølge [1].

Hva vil det etter dette si å kunne "tenke matematisk", hva vil det si å være kompetent i det å utføre matematisk tenkning? Det kan være å kunne visse metoder eller strategier for å nå viktige matematiske mål (som det å løse et matematisk problem), vite når og hvordan disse metodene kan brukes og ikke minst, ha et solid nettverk av matematisk basiskunnskap. Disse aspektene ved matematisk tenkning vil i det følgende bli debattert med spesiell vekt på strategier.

Komponenter innen matematisk kognisjon

Kunnskapsbase

Til grunn for all tenkningen ligger en *kunnskapsbase*. Den består av faktakunnskap (*deklarativ kunnskap*) og ferdigheter (*prosedural kunnskap*), samt betingelser for anvendelsen av denne. Denne kunnskapen er organisert i skjema hvor deklarativ og prosedural kunnskap tilknyttet et bestemt matematisk emne eller begrep, er koblet sammen med kunnskap om *når* det kan brukes. Skjemaene er igjen koblet sammen til kognitive strukturer. Et eksempel på et slikt skjema er addisjon. Når et barn skal addere fem og tre på fingrene, vil dets deklarative kunnskap gi informasjon om størrelsene som inngår. Barnet vet hvor mye fem er, og hvor mye tre er. Deretter vil barnet bruke en algoritme (prosedural kunnskap) for utregningen. Når barnet blir eldre, vil det lære at $5 + 3 = 8$, og da er dette blitt en del av dets deklarative kunnskap, som igjen kan benyttes i andre algoritmer, for eksempel for å addere store tall: $75 + 93$. Den prosedurale kunnskapen kan bestå av enkle ferdigheter eller komplekse prosedyrer, som det å finne en løsning på et max-/min-problem. Prosedural kunnskap har forskjellige benevnelser, som «computational skills» (f.eks. Robitaille, 1990), «procedures» (f.eks. Bassok, 1990) og «conceptual strategies» (Baroody, 1987). Det som er betegnende, er at ferdighetene brukes i spesielle situasjoner og i tilknytning til spesiell deklarativ kunnskap.

Kunnskapsbasen er nært knyttet til de øvrige komponentene i et individs kognitive system. For eksempel viser Rohwer & Thomas (1989) til at kunnskap innen et saksområde har stor innvirkning på

1 «Kaféoppgaven» ble i tillegg gitt til enkelte elever i 8. klasse under et intervju. Det vil senere i teksten bli referert fra disse intervjuene.

hvilke ferdigheter som utvises, også når det gjelder strategiske og metakognitive ferdigheter. Dette kan skyldes både direkte det at eksperter på et saksområde, har mer basiskunnskap, men også det at denne kunnskapen (skjemaene) er annerledes organisert. Rohwer & Thomas hevder at eksperter organiserer sin kunnskap omkring *høyere-ordens prinsipper*. Inkludert i disse prinsippene er også betingelser for *når* kunnskapen skal aktiviseres. Dette i motsetning til noviser innen et saksområde. De vil knytte skjemaene sammen etter overflatiske eller konkrete trekk ved kunnskapen. En undersøkelse som underbygger dette er gjennomført av Chi, Feltovich & Glaser (1981). De ga fysikkstudenter fra et avansert kurs (eksperter) og fra et begynnerkurs (noviser) i oppgave å gruppere 24 tekstoppgaver innen fysikk. Mens ekspertene i hovedsak grupperte etter *hvordan* problemene kunne løses ("deep structure"), samlet novisene problemene i grupper etter overflatiske egenskaper ("surface structure") som etter hvilke objekter som ble nevnt i teksten (vektstang) eller etter hvilke fysiske begrep som ble omtalt (kraft, pot. energi). Dette støttes også av Gallani (1989) som hevder at eksperter har *prinsippbasert* kunnskap, kunnskap organisert etter prinsipper heller enn ytre trekk. I tillegg hevder hun at i ekspertenes kunnskap inngår et hierarki av løsningsmetoder som kan brukes på forskjellige problemklasser. Hun gir dermed støtte til en kobling mellom kunnskapsbase og strategier, og poengterer at hos eksperter er denne koblingen sterkere. Dermed blir ikke ekspertene bare bedre i å kategorisere problemene (etter dypereliggende struktur), de er også bedre i stand til å iverksette brukbare løsningsmetoder /strategier.

Kunnskapen i et skjema kan være mer eller mindre korrekt. Gal eller ufullstendig faktakunnskap vil naturligvis virke uheldig inn på elevens arbeid i likhet med uriktige algoritmer eller prosedyrer. Visse feil viser seg ofte å være godt innarbeidet, slik at elevene kan gjøre de samme feilene om og om igjen (Bell, Fischbein & Greer, 1984). I tillegg vil mange elever kunne ha mangler i kunnskap om når skjemaet kan anvendes. Jeg ga følgende oppgave til 25 elever i 8. klasse i begynnelsen av en time: *0,65 kg sopp koster 43 kr. Hva er kiloprisen?* Kun en elev klarte å finne riktig svar, og det er oppsiktsvekkende, selv om det må bemerkes at elevene fikk liten tid til oppgaven. De fleste brukte multiplikasjon og da antageligvis følgende regel for å aktivisere det skjemaet: Når svaret skal bli større enn det tallet man starter med, bruk multiplikasjon eller addisjon. Det eksisterer mye forskning omkring misoppfatninger hos elever, se for eksempel Bell (1987). For at elever skal beherske et matematisk begrep godt, forutsetter det at hele skjemaet er korrekt og fullstendig.

I tillegg til det elevene lærer på skolen, vil kunnskap de tilegner seg ellers virke inn på deres matematiske atferd. Denne kunnskapen er dels intuitiv, som når de ser at to toppvinkler alltid er like store, og dels blitt undervist utenom skolen (uformelle kunnskaper), som for eksempel det å kunne telle. Ostad (1990) har sett på uformelle kunnskaper hos førskolebarn og hvilken innvirkning de har for elevenes videre matematikklæring. Han hevder at elevene gjennomgående stiller med gode uformelle kunnskaper når de begynner på skolen, samt at trening av uformelle kunnskaper hos elever med matematikkvansker har gitt liten effekt. Den manglende responsen på instruksjon kan skyldes at uformelle kunnskaper er en *nødvendig*, men ikke *tilstrekkelig* betingelse for en god matematisk kompetanse.

Strategier

I andre fag har interessen for strategier stort sett vært knyttet til strategier for økt læring, mens man innen matematikkdidaktikk i hovedsak har sett på strategier for problemløsning. Med strategier menes derfor her fremgangsmåter som har til hensikt enten å nærme seg en løsning av et problem eller å forstå et problem bedre. Strategier skiller seg fra prosedural kunnskap ved at de kan aktivisere flere skjema og brukes på tvers av forskjellige kunnskapsområder. Strategier er målrettede i den forstand at de virker *mot* et mål, og at de kan ende i et produkt hvis de blir fullendt. Dette skiller også strategier fra prosedyrer slik de er beskrevet under basiskunnskap. Prosedyrer fører nødvendigvis til et produkt (riktig eller galt) hvis de blir fullførte, mens strategier kan være upassende og dermed ikke gi noen løsning. Mange av elevene som fikk feil svar på kaféoppgaven i begynnelsen av teksten, løste den ved å sette opp ei likning ($5x + 9x = 133$) som de deretter løste. De brukte da en prosedyre for løsning av uoppstilte likninger, og prosedyren ga et resultat, $x = 9{,}5$, som de oppga som svar. Prøver man derimot med en ugunstig strategi, vil man kanskje oppleve å stå helt fast, og man kan se seg nødt til å måtte avbryte strategien midt i utføringen. En elev i 8. klasse prøvde følgende strategi: $5 + 9 = 14$, så "ganger jeg opp helt til jeg kommer til 133", altså $14 \cdot 8 = 112$, $14 \cdot 9 = 126$. Når han innså at $14 \cdot 10$ ble for mye, måtte han avbryte strategien uten å ha kommet fram til et svar.

Enkelte strategier kan ha liten direkte tilknytning til matematiske problemer: f.eks. kategorisering av informasjon eller strategier for å hente informasjon fra hukommelsen. Andre strategier er mer knyttet til matematikk og matematisk problemløsning; gjett & sjekk, tegn figur (Lopez-Real & Veloo, 1993), se på et enklere problem (Swan, 1984), «Polyas liste» (Polya, 1957) o.l. Strategier vil på denne måten ha forskjellig spesifiseringsgrad. Enkelte strategier vil være nokså knyttet til bestemte kontekster, oppgavetyper eller matematiske begreper. Andre strategier vil være mer generelle og kunne brukes på tvers av flere områder. I tillegg vil enkelte strategier være generelle i den forstand at de aktiviserer andre strategier.

Etter mønsterplanen av 1987 (M87) skal problemløsning være et hovedemne i matematikkundervisningen i Norge. Dette blir implementert i et læreverk for ungdomsskolen ved undervisning i strategier. For eksempel blir det å lage en modell eller tegne en figur presentert som en strategi for å løse problemer: *Ofte kan det bli lettere å løse et problem hvis vi lager en modell eller tegner en figur av problemet, eller en del av problemet.* Deretter gir boka et eksempel, en løsning av problemet: *Du kjøper 3 frimerker på posthuset. De rives av et stort ark og henger sammen. Hvor mange forskjellige måter kan de henge sammen på?*. Denne strategien er svært generell. For å løse problemer av samme type som eksemplet, kunne strategien vært spesifisert nærmere; til for eksempel: Skal du finne antall kombinasjoner av et eller annet, kan du prøve å tegne de forskjellige mulighetene. På denne måten er strategier tilknyttet matematisk problemløsning av varierende spesifiseringsgrad.

Det hersker uenighet om i hvilken grad strategier kan være ubevisste. Enkelte forskere har definert strategier til utelukkende å omhandle kontrollerte handlinger, skapt bevisst av individet for å oppnå bestemte mål (konf. Bråten 1993). I nyere forskning tillates det imidlertid også ubevisste handlinger innen begrepet strategier (f.eks. Symons et al., 1989; Royer, Cisero & Carlo, 1993). Enkelte strategier antar man kan automatiseres ved trening og dermed utføres utenfor individets bevissthet. Omvendt kan automatiserte strategier igjen bli bevisste og underlagt individets kontroll. For eksempel kan elever læres å alltid sette prøve når de har løst ei likning. Etter flere uker med øvelse, kan man forvente at elevene gjør dette automatisk, dvs. uten at læreren eller læreboka ber dem om det. Men selv om dette punktet er nådd, kan elevene når som helst stoppe og starte å sette prøve etter eget ønske; utøvelsen av strategien er under kontroll.

Metakognisjon

Dette er et begrep som har hatt stor teoretisk interesse de siste årene, og en god innføring gis i Brown (1987). Grovt sett kan det sies at metakognisjon dreier seg om hvordan et individ fordeler sin tenkning. Et eksempel kan knyttes til løsing av matematiske problemer.

Noen ganger går løsningsprosessen nærmest av seg selv; strategien er valgt, og nødvendig basiskunnskap er tilgjengelig. Da er det nærliggende å tenke: "dette går sannelig greit, jeg fortsetter i samme stil, så vil jeg finne en løsning ganske snart". Slike tanker er av overordnet natur, det er tenking *omkring* tenkning. Det er aktivisering av kunnskap omkring strategier (det at hvis strategien opprettholdes, så vil den føre fram) og omkring basiskunnskap (det at kaféoppgaven ser ut som en oppgave som kan løses som likning). Andre ganger stopper løsningsprosessen opp. Da griper metakognisjonen direkte inn; skal strategien avbrytes eller opprettholdes? Hvis den avbrytes, hva kan da gjøres i stedet? Skal man prøve å lage en tegning for å få et klarere bilde av problemet, eller skal man prøve en annen løsningsstrategi? Kunnskap og ferdigheter knyttet til det å overvåke og regulere ens tenkning er kjernekomponentene innen begrepet metakognisjon.

Kunnskapsbasen og strategiene et individ besitter, kan kalles dets *kognitive system*. Metakognisjon er ens *kunnskap om* og *kontroll av* eget kognitivt system. Det synes imidlertid ikke å være noe skarpt skille mellom kognisjon og metakognisjon. Noen former for tenkning er klart av overordnet natur og kan trygt kalles metakognisjon, mens andre former vil være nærmere knyttet bestemte saksområder, og det blir vanskelig å klassifisere tenkningen som det ene eller det andre. Det dreier seg antageligvis ikke om en dikotomi, men om prosesser langs en skala fra ren basiskunnskap til ren metakognisjon (forholdet mellom kognisjon og metakognisjon blir bl.a. diskutert av Artzt & Armour-Thomas, 1992).

Kunnskap om vil være den kunnskap en elev har om seg selv og sine evner, kunnskap om sitt kognitive system og om sin tenkning. En elev i 8. klasse utbrøt da han hadde kjørt seg fast under arbeidet med et problem: «Nei, jeg kommer ikke videre. Jeg tenkte på den måten i starten <en ugunstig strategi> og nå har den måten låst seg fast i hodet mitt». Eleven har altså kunnskap om og et bevisst forhold til egen tenkning. Det er betegnende at denne kunnskapen kan uttrykkes verbalt slik at dette aspektet ved metakognisjon kan studeres ved hjelp av verbale rapporter, noe som ikke er tilfellet ved kontrollaspektet. Dette henger sammen med at deler av slik kontroll utføres ubevisst og kan dermed ikke være gjenstand for språklig mediasjon.

I dette kunnskapsaspektet ligger også kunnskap om hvilke kognitive redskaper en har for å løse problemer og da spesielt hvilke strategier en kan bruke og hvilken effekt disse har. Bråten (1993) deler kunnskap om strategier i tre. Spesifikk strategikunnskap er kunnskap knyttet til den enkelte strategi, om hvordan den brukes og når den er passende. Relasjonsstrategi-kunnskap er kunnskap om likheter og forskjeller, styrker og svakheter, blant forskjellige strategier innen et kunnskapsområde. Den siste komponenten er generell strategikunnskap. Her refereres det til den generelle nytten og anvendelsen av strategier. Alle tre delene er sentrale momenter for hvorvidt en passende strategi vil bli brukt eller ikke.

I *kontrollen av* sitt kognitive system fattes beslutninger om hva man skal gjøre, hvilken sti som skal følges, vurderinger av fremdrift og hvor langt man er kommet. Vurderingene vil kunne få følger for videre arbeid, om man ønsker å avbryte dette arbeidet, gjøre mindre endringer eller fortsette i samme spor. Denne kontrollen kan i større eller mindre grad være styrt av bevisste generelle strategier; som det å vurdere fremdrift for eksempel hvert annet minutt, sette mål og delmål, eller vurdere flere alternativer grundig før man iverksetter. Schoenfeld (1985) kaller dette a) kontroll som avverger fiasko (at man vurderer sitt arbeid og ikke forfølger gale veier) og b) positiv kontroll (ideer blir forsiktig valgt og nøye undersøkt før de forfølges/forkastes). Mye kognitiv kontroll vil også skje ubevisst; strategier avbrytes impulsivt o.l.

I intervju av elever i 8. klasse, var det en elev som løste kaféoppgaven vha. likning. Imidlertid stoppet hun opp et øyeblikk etter å ha satt opp likningen, antageligvis ante hun at et eller annet var galt. Hun fortsatte løsningen av likningen, kanskje fordi hun visste hun kunne løse den enkelt og greit; hun fullførte fordi den belastningen var veldig liten. Da hun så fikk et absurd svar, gikk hun raskt over til gjett&sjekk og fant den riktige løsningen. Strategibruken syntes å være kontrollert.

Det synes å være store forskjeller mellom eksperter og noviser når det gjelder kontrollen av ens kognitive system. Schoenfeld (1985) viser til sin undersøkelse hvor noviser bruker først litt tid til å lese problemformuleringen. Deretter brukes den resterende tiden til å utforske problemet. Eksperter derimot varierer mye mellom lesing, analysering, utforsking, planlegging, iverksetting og kontrollering. Denne variasjonen fører til en bedre forståelse av problemet og mye større variasjon i valg av strategier. Novisene, på sin side, velger ofte en strategi så å si med en gang, og de holder fast ved denne ene strategien. Et begrep som dekker slik atferd er *algoritme-fiksering* (Haylock, 1987) og det er åpenbart at dette er uheldig i de tilfellene hvor den første strategien ikke er hensiktsmessig. Kaféoppgaven ble også gitt som en del av en skriftlig prøve til 26 elever i 8. klasse, og her var det omkring 1/3 som klarte å finne en løsning. Dette kan skyldes at disse elevene ikke er så bundet til bestemte algoritmer som de eldre elevene.

Holdninger

Det synes klart at matematisk prestasjon er i stor grad betinget av andre aspekter enn de rent kognitive. Imidlertid er det mindre enighet om hvordan disse aspektene bør beskrives enn hva tilfellet er for de kognitive delene. Forskjellige teorier bruker tildels ganske forskjellige termer for å beskrive de ikke-kognitive komponentene som virker inn på et individs tenkning. Mens Schoenfeld (1992) snakker om "beliefs" og "affects", er det mest vanlig innen kognitiv psykologi å bruke "motivasjon" (Bråten, 1993; Dufresne & Kobasigawa, 1989; Short & Weissberg-Benchell, 1989). Imidlertid knytter flere en tråd mellom enkelte holdninger og motivasjon (Kloosterman & Stage, 1992; Pressley et al., 1989), og de holdningene som er av interesse her, er nettopp holdninger som har innvirkning på elevers motivasjon.

Det synes å være enighet blant forskere om at affektive komponenter står i sammenheng med det kognitive apparatet et individ besitter; at alle affektive begreper (og spesielt holdninger) har en kunnskapsmessig side (se f.eks. McLeod, 1992). Dette knytter holdninger nærmere metakunnskap, men det er et skille mellom holdningenes og metakunnskapens *objekt.* Mens metakunnskap er kunnskap om ens kognisjon, er kunnskapsaspektet tilknyttet holdninger kunnskap om andre elementer ved en selv og om elementer utenfor en selv. Slike aspekter blir diskutert i det følgende.

Holdninger tilknyttet motivasjon kan deles i to: *oppgavespesifikke/ målrettede* og *generelle* holdninger. Med generelle holdninger menes holdninger til det å arbeide med akademiske/kognitive oppgaver generelt. Borkowski & Turner (1990) trekker ut tre faktorer som synes betydningsfulle i den sammenheng:

1) Positiv selvfølelse. Det synes viktig at elevene får tillit til egne evner i forhold til de oppgavene de skal løse. Dette vil føre til større utholdenhet og økt konsentrasjon i møte med nye, tilsvarende oppgaver (se også Paris & Byrnes, 1989).
2) Indre kontroll. Suksess (eller fiasko) i problemløsning kan tilskrives enten ytre eller indre årsaker. Enkelte elever kan for eksempel hevde at gode matematiske ferdigheter er en medfødt

egenskap. Dette er en holdning som neppe vil føre til positiv motivasjon, all den tid suksessen er gitt en ytre, upåvirkelig årsak. Det er viktig for motivasjonen at elevene har den holdningen at det er dem selv som kontrollerer egne handlinger.

3) Egen innsats. I tillegg til punkt to er det viktig at elevene erkjenner at suksess/fiasko er direkte relatert til egen innsats. Hvis elevene har den holdningen at hardt arbeid og strev fører til forbedret prestasjon, er det grunn til å tro at elevene vil være motivert til å yte mer i møtet med nye problemer.

Oppgavespesifikke og målrettede holdninger er derimot tilknyttet det å løse bestemte oppgaver innen bestemte saksområder. Dette er holdninger som kan dreie seg om skolen, om matematikkfaget, om emner innen matematikk og om elementer innen den konteksten matematikkundervisningen eksisterer i. Slike holdninger er bygget opp over lang tid gjennom de erfaringene den enkelte har gjort innen saksområdet (matematikktimene) (Pressley et al., 1989; Schoenfeld, 1992). Det er grunn til å tro at også slike spesifikke holdninger kan ha store konsekvenser for elevenes atferd i arbeidet med oppgaver innen det bestemte området.

Schoenfeld (1992, s 359) trekker fram disse holdningene som typiske for matematikkelever (min oversetning):

- Matematikkproblemer har et og bare et riktig svar.
- Det er bare en riktig måte å løse et matematisk problem på.
- Vanlige elever kan ikke forstå matematikk, de må bare pugge reglene og hvordan de skal brukes.
- Matematikk er en individuell aktivitet.
- Elever som har forstått et matematisk emne, kan løse enhver oppgave fra det emnet i løpet av 5 minutter.
- Skolematematikken har lite eller ingenting med den virkelige verdenen å gjøre.
- Formelle bevis er irrelevant i forhold til det å oppdage eller oppfinne.

Når mange elever sa seg fornøyd med en absurd løsning på kaféoppgaven ($x = 9{,}5$), så skyldes det kanskje deres holdning til det å løse tekstoppgaver i matematikk. Elevene så ikke på tekstoppgaver som noe fra virkeligheten, og de reagerte derfor ikke på et slikt svar.

Etter noen år med matematikkundervisning, danner elevene holdninger til hva det vil si å besvare matematikkoppgaver. En elev prøvde å løse kaféoppgaven ved å dele 133 på x, antageligvis stod denne x-en for antall personer. Hun ga opp etter noen minutter og ble da bedt om å forsøke å gjette systematisk. Hennes første forsøk var 133 : 4 og deretter 133 : 7 som gikk opp, og hun kom fram til et svar. Imidlertid følte hun seg usikker på om hun hadde funnet en riktig løsning, og denne usikkerheten kan skyldes at løsningen ikke "så ut" som den skulle. I løpet av alle sine matematikktimer hadde hun etter hvert fått kunnskap om hva som konstituerer en løsning på en matematikkoppgave, og på den bakgrunn dannet seg en holdning til hva det vil si å svare på en matematikkoppgave. Det hun nå presenterte brøt med denne holdningen.

Strategiundervisning

Da problemløsning ble et moteord innen matematikkdidaktikk utover 70-tallet, ble det gjort forsøk på å undervise elever i bruk av strategier. Tanken bak var å utstyre elevene med høyere-ordens ferdigheter som skulle kunne brukes til å løse problemer innen forskjellige saksområder. Men det viste seg vanskelig å påvise betydelig fremgang gjennom disse forsøkene. Årsaken til disse vanskene med overføring av strategier fra et kunnskapsområde til et annet, skyldes i hovedsak nettopp det at strategiene kan være svært generelle. Dette er påpekt blant andre av Pólya:

> *It may be easy to imitate the solution of a problem when solving a closely similar problem; such imitation may be more difficult or scarcely possible if the similarity is not so close.* (Pólya, 1981, s.ix)

De siste årene er det imidlertid gjennomført studier som beskriver utvikling av strategiske ferdigheter (Boero, 1990; Bondesan & Ferrari, 1991; Lopez-Real & Veloo, 1993) og det er beskrevet modeller for strategiundervisning som har teoretisk troverdighet og en viss empirisk dekning (se Pressley et al., 1989; Lester, Garofalo & Kroll, 1989). En metode for undervisning blir presentert i det følgende samtidig som strategiundervisning blir forsøkt satt i en sammenheng med undervisning av de øvrige delene i elevenes kognitive system.

Strategier

Den metoden for undervisning av strategier som her blir beskrevet, har fått et visst gjennomslag i litteratur knyttet til kognitiv psykologi (Day, Cordon & Kerwin, 1989; Pressley & Harris, 1990; Bråten, 1993). Den bygger på Vygotskys teori om at all kunnskap har en sosial opprinnelse. For eksempel når et barn lærer av sine foreldre ved at disse viser hvordan man behandler og kategoriserer informasjon, hvordan man snakker om og integrerer de erfaringene man gjør. I matematikk skjer det gjerne ved at barnet sammen med en voksen løser en oppgave det ikke ville klart alene. Når det kommer til et punkt utenfor dets ytegrense, vil den voksne ta over og vise hvordan den passasjen kan forseres. Hvis man løser flere tilsvarende problemer, vil barnet kunne gjøre mer og mer av løsingen selv. Evnene som barnet utviser er i ferd med å bli internalisert. Den kunnskapen som først eksisterte i en sosial sammenheng, i en samtale eller samhandling mellom barn og voksen, er i ferd med å bli barnets egen kunnskap.

Dette gir følgende metode for undervisning av strategier. Først må læreren opptre som en modell for elevene. Hun må fortelle hvordan hun tenker underveis, fra hun leser eller formulerer problemet, til hun anser det som løst. I matematikkundervisningen har mange lærere en tendens til å presentere oppgaveløsning som en lineær prosess, den korteste veien mellom start og mål. På den måten kan man vise at matematiske løsninger kan være elegante og imponerende, og man kan vise elevene hvor enkelt det egentlig var å løse problemet. Men det er vel de flestes erfaring at det å løse et problem svært ofte er en mangslungen affære. Skal læreren være en god modell, må hun ikke kun vise en kort og elegant løsning, hun må også ta seg tid til å vise alle avstikkerne elevene kan tenkes å gjøre. Hun må få fram hvordan strategien og basiskunnskapen virker sammen med overordnede vurderinger som angår framdriften i løsningsprosessen. Dermed kan elevene få se en bredt anlagt presentasjon som involverer alle delene i det kognitive systemet.

Når det gjelder den spesifikke bruken av strategien, er det viktig at læreren verbaliserer alle trinnene strategien består av etterhvert som de utføres. Hun må også vise hvordan oppgavens kontekst bestemmer hvordan strategien implementeres og hvilken basiskunnskap som trengs. Etter fasen som modell, bør læreren gi elevene oppgaver hvor de får hjelp til enkelte deler av løsningsprosessen, mens de tar seg av det resterende selv. Læreren må da hjelpe / rettlede elevene og gi tilbakemeldinger til det arbeidet de gjør. Kanskje må enkelte punkter i strategien forklares grundigere. Etter en periode med utstrakt sosial assistanse hvor elevene forhåpentligvis får økte ferdigheter i bruken av strategien, bør hjelpen minskes gradvis slik at elevene etterhvert blir i stand til å utføre strategien på egen hånd, uavhengig av læreren og medelever. Eleven får mer og mer kontroll over arbeidet. Det endelige målet med strategiundervisning bør være at elevene kan utføre strategien ubevisst. Da frigjøres en stor del av elevens kognitive kapasitet til andre, kanskje nødvendige, oppgaver.

Det går klart fram i beskrivelsen av denne metoden at det er en tidkrevende prosess å lære elever å bruke en strategi i forskjellige situasjoner. Dermed blir det viktig at læreren velger ut noen få (eller bare en) strategier og retter fokus på disse. Når elevene mestrer dem tilfredsstillende, kan nye strategier introduseres.

Basiskunnskap

Forholdet mellom undervisning i strategier og basiskunnskap er tosidig. På den ene siden er det viktig at elevene har god basiskunnskap innen de områder en velger å trene strategier. Da kan all kognitiv kapasitet rettes mot strategien. Hvis elevene skal lære "gjett & sjekk" i tilknytning til kaféoppgaven, er det en forutsetning at de kan divisjon og multiplikasjon i en rimelig utstrekning. Hvis ikke vil den kognitive belastningen bli for stor, og elevene vil ikke kunne holde fokus på strategien lenge nok. De vil i stedet være nødt til å bruke mye kapasitet på selve utregningene. Dermed er det nødvendig at man sikrer elevene god basiskunnskap *før* man starter strategiundervisningen. Lopez-Real & Veloo (1993) ga elever et problem for å se om de var i stand til å ta i bruk en bestemt strategi: tegn en figur som representerer problemet. Kun 5% brukte strategien uoppfordret. Hvis elevene ikke klarte å løse problemet, fikk de et hint om at denne strategien kunne være nyttig. Av 107 elever som fikk dette hintet, var det 41 elever som brukte strategien med suksess. De øvrige elevene lagde figurer som ikke ga noen god representasjon av problemet og som derfor ikke var til noen hjelp. For å bruke en strategi hensiktsmessig, er det nødvendig med en viss forståelse av problemet og av de basiskunnskapene som inngår i løsningsprosessen.

På en annen side blir enhver strategi brukt i tilknytning til basiskunnskap, og det er derfor nødvendig at strategiundervisningen blir kombinert med fokusering på basiskunnskap. Skal elevene lære hvordan en strategi skal gjennomføres, må dette gjøres i en kontekst, med fakta og ferdigheter relevante i den konteksten. Det er kun satt i en kontekst at elevene kan se den faktiske nytten av strategien som skal undervises. Ved å koble undervisningen av matematiske fakta og ferdigheter sammen med undervisning i strategier, kan læreren vise hvordan strategiene kan lede til en mer effektiv bruk av de basiskunnskapene elevene besitter. Sammen med gunstige strategier kan basiskunnskapen tøyes lengre, og elevene blir i stand til å løse oppgaver som de ellers ikke ville være i stand til. De vil kunne se at enkelte problemer (som kaféoppgaven for svært mange elever) ikke lar seg løse utelukkende av basiskunnskaper; strategiske kunnskaper er nødvendig i tillegg.

Metakognisjon

Det å lære å bruke en strategi innen et saksområde, er én ting, det å bruke den i andre, nye situasjoner noe annet. Det er nødvendig at elevene i undervisningen får hjelp til å gjøre slike generaliseringer. Dette kan skje ved at læreren viser hvordan strategien kan brukes i andre sammenhenger og ved at læreren forteller når, hvor, hvordan og hvorfor strategien er nyttig. Som nevnt tidligere, starter metoden med at læreren er en modell for elevene. Hun kan da vise hele prosessen hun selv har vært igjennom på vei mot en løsning på problemet. Dermed kan bruken av strategien vises også utfra et overordnet perspektiv. Læreren kan fortelle om hvordan hun kom fram til den strategien hun startet med, om vurderinger av progresjon underveis, om eventuelle skifter av strategi og så videre. Da kan elevene ikke bare se hvordan strategien spesifikt kan brukes, de får også se hvilke faktorer som er relevante for igangsettingen av den, at det er nødvendig å overvåke bruken av den og at det kan være aktuelt å avbryte en strategi for å forfølge en annen. Det er viktig at elevene får anledning til å lære slike overordnede kunnskaper for at de skal kunne bruke strategier på en hensiktsmessig måte.

Utviklingen av metakunnskap kan også skje gjennom diskusjoner med elevene både omkring selve strategien og om bruk av den. I begge tilfellene vil elevene kunne få metakunnskap tilknyttet strategien, kunnskap som gjelder dens nytte og anvendelse. I følge Symons et al. (1989) vil dette føre til at elevene beholder strategien lengre og at de lettere generaliserer den. I en studie av Bondesan & Ferrari (1991), viste det seg at elever utviklet mange gode strategier for å finne areal av forskjellige geometriske figurer gjennom samtaler med medelever.

I tillegg er det gunstig at elevene selv får prøve strategien i forskjellige kontekster; at de får gjort egne erfaringer med strategiens anvendbarhet. En annen mulighet i denne sammenhengen er å prøve ut flere strategier på samme oppgave, for å finne ut hvem som er passende og hvem som ikke er det. Det sentrale punktet her er en *synliggjøring* av at strategier blir brukt, å gjøre elevene bevisste på at de bruker strategier for å løse problemer. Når elevene blir klar over dette, blir de antageligvis bedre i stand til å kontrollere bruken av strategier. Som tidligere nevnt kjennetegnes novisers problemløsning av at de velger en strategi like etter å ha lest oppgaveteksten og denne strategien holder de fast ved inntil tida løper ut. En slik mangel på overvåkning og regulering kan skyldes at de ikke er klar over at de bruker en strategi. Gjennom diskusjoner kan elevene reflektere over og dermed bevisstgjøres sin strategibruk, en bevisstgjøring som nok er en forutsetning for at elevene skal kunne ta i bruk strategier på en effektiv måte.

Når det gjelder kontrollaspektet ved metakognisjon, er det kanskje ikke tilstrekkelig at læreren viser hvordan hun overvåker og kontrollerer bruken av en strategi. Når elevene selv skal ta strategier i bruk, kan det være nødvendig at læreren i en overgangsfase går aktivt inn og avbryter elevene - enten med tilbakemeldinger eller med spørsmål i tilknytning til den strategien som blir brukt. Hensikten med slike avbrudd er å vise elevene at det kan være nødvendig å stoppe opp for å vurdere hvorvidt strategien er passende og om bruken av den er riktig. Hvis elevene innser nytten av slik overvåkning, er det å håpe at de selv blir i stand til å vurdere sin kognisjon fra et metaperspektiv uten at læreren ber om det.

Holdninger

Ved å prøve å utvikle elevenes kunnskap *om* strategien som undervises, kan man oppnå at de både husker strategien bedre, samt at de blir i stand til å bruke den i et større antall situasjoner. Dette fordi elevene får mulighet til å vurdere dens nytteverdi, dens sterke og svake sider. Dette vil kunne påvirke elevenes holdninger til strategibruk og derigjennom deres motivasjon i forhold til strategibruk. Hvis elevene innser at strategien faktisk har nytteverdi, at den kan øke deres matematiske ferdigheter, så er det grunn til å tro at de vil være motiverte til både å lære seg strategien og til senere å ta den i bruk. Dermed settes alle delene av det kognitive apparatet sammen: ved vektlegging av passende (og upassende) strategier, kan man forvente både økt kognisjon, metakognisjon og utvikling av gunstige holdninger.

Økt motivasjon kan også oppnås gjennom direkte ros. Det må imidlertid påpekes at det er viktig at rosen settes i sammenheng med elevens kognisjon (Bråten, 1993), slik at det er elevens egen tenkning som honoreres. En viktig del av rosen blir da å påpeke sammenheng mellom hardt arbeid og kompetent handling. Det er av stor betydning at eleven innser at hardt arbeid tilknyttet passende strategier/kunnskap ofte gir gode resultater. Hvis eleven utvikler en slik holdning, vil han være godt motivert for hardt arbeid senere. Det må imidlertid påpekes at det ikke holder med hardt arbeid alene, arbeidet må rettes mot den strategien eller den kunnskapen som skal læres. Når en strategi eller en ferdighet er innlært, bør rosen endre karakter. Nå er det ønskelig at eleven skal lære å bruke strategien mest mulig automatisk, og da er det lite hensiktsmessig å rose eleven for hardt arbeid. Det er antageligvis gunstigere å rose eleven for at han nå har lært seg den strategien som har vært tema en stund, rose med henblikk på evne heller enn innsats.

Vanskeligheter forbundet med innføringen av strategiundervisning

Det knytter seg flere vansker til det å ta strategier i bruk i matematikkundervisningen. Et problem er det at lærerene selv sjeldent er utdannet i strategibruk. En følge av deres utdanning er at de er lite bevisste på egen bruk av strategier og på strategier i matematikk generelt, og det er derfor ikke å vente at de legger vekt på strategier i sin undervisning. De er påvirket av tradisjonell matematikkundervisning, en undervisning som har lagt vekt på basiskunnskap og i liten grad berørt de øvrige delene som virker inn på elevenes tenkning. En del av denne tradisjonen kan sees gjennom avgangseksamener fra grunnskolen og videregående skole. Begge disse måler overveiende basiskunnskaper, og eksamen har som kjent en stor innflytelse på hva som vektlegges i matematikkundervisningen. Men en forståelse av at det å være flink i matematikk, det å kunne tenke "som en matematiker", er noe mer enn bare å beherske ett sett basiskunnskaper, bør lede lærerne til å vektlegge strategiske og metakognitive aspekter i sin undervisning og i sin vurdering av elevene ved fastsettelse av standpunktkarakterer.

Et annet problem er strategiundervisning av svake elever. Det kan hevdes at svake elever er best tjent med at man viser en regel ved hjelp av flere oppgaver innen en bestemt kontekst og at elevene deretter bes om å løse tilsvarende oppgaver innen den samme konteksten. Denne tjenligheten begrunnes med at svake elever ofte har hatt mange negative opplevelser i matematikktimene og at de derfor har et stort behov for *å mestre*. Hvis de møter problemer av noen som helst art, vil engstelsen for å mislykkes være så stor at de ikke tør å gi seg i kast med problemet. Konklusjonen har da vært at man bør gi elevene svært lette oppgaver og gjerne mange så å si likelydende oppgaver. Ostad (1990) hevder derimot at det er nettopp slik undervisning som gjør at enkelte elever (for-) blir svake. De sliter med det han kaller *tunge begreper*. Matematiske begreper er abstrakte, men de undervises ofte ved hjelp av konkretiseringer. Som når addisjon introduseres ved hjelp av telling på fingrene. Ungene bruker en telleprosedyre for å addere. Senere er det nødvendig at de tunge, konkrete begrepene viker plassen for lette og abstrakte begreper. Når elevene skal lære multiplikasjon, er det en stor hemsko å fremdeles måtte telle på fingrene for å addere. Dermed kan det være at det gjøres en bjørnetjeneste overfor de svake elevene når man fortsetter å terpe på konkreter og tungvinte algoritmer, bare for at de skal kunne få til noe som helst (mestre). Det de trenger er kanskje mer hensiktsmessige begreper og mer effektive strategier for å gjennomføre elementære matematiske operasjoner. Selv om elevene trenger konkreter i innlæringen, er det viktig at undervisningen ikke stopper der. Også for svake elever er det nødvendig med rike begrepsstrukturer knyttet sammen med effektiv strategibruk.

Vansker knytter det seg også til strategiers abstrakte natur. Som Hiebert & Behr (1988, s. 14) sier:

> *...students need to maintain connections between the mathematics they are learning and the world that make sense to them.*

Dermed oppstår et dilemma i og med at strategier er generelle og abstrakte. Det at strategier skal kunne brukes i forskjellige situasjoner innebærer nødvendigvis at de i en viss grad er kontekstfrie. Dette dilemmaet kan løses ved at strategier undervises via bestemte kontekster. En studie av Boero (1990) viser at elever utvikler strategisk tenkning (*hypothetic reasoning skills*) først i en ikke-matematisk kontekst, deretter i forbindelse med kontekstuelle matematiske problemer og til slutt med abstrakte matematiske problemer.

Et siste problem tilknyttet strategiundervisning er kompleksiteten i hver strategi. Dette mener Schoenfeld (1985, 1992) er en viktig årsak til at undervisningsopplegg tilknyttet strategier (*heuristics*) ikke har gitt de forventede resultater. De generelle strategiene er for bredt definert og for vagt beskrevet til at de kan være til hjelp for elever i møtet med et problem. Han foreslår en oppdeling i delkomponenter eller understrategier, og at undervisningen rettes mot disse. Men en slik oppdeling fører til at mengden strategier som kan være aktuelle for undervisning, blir større, og når man samtidig vet at det antageligvis tar lang tid før elever gjør en strategi til sin egen, blir det kritisk hvilke strategier som velges. Det er avgjørende at strategiene som skal undervises er passende for det trinnet undervisningen skal foregå, at elevene er i stand til å lære dem, og at man velger strategier som har vist seg nyttige. Hvis ikke kan det skje at elevene blir bedt om å lære unyttige strategier, noe som kan få store negative konsekvenser. Ikke bare kaster man bort verdifull tid, i tillegg kan elevene danne en holdning om at strategier generelt ikke har noen hensikt, noe som vil lede til at de vil være lite motiverte både for å lære andre strategier og for å implementere strategier de kan. Pressley et al. (1989, s.328-329) nevner noen generelle strategier som har vist seg gunstige i komparative undersøkelser, mens det innen matematikk i liten grad har vært gjort slike undersøkelser. Det er derfor et stort behov for forskning innen dette feltet, både når det gjelder å beskrive forskjellige strategier tilknyttet matematisk tenkning og når det gjelder hvordan og i hvilken grad de kan undervises.

Avslutning

Det er forsøkt vist at matematisk tenkning er en sammensatt prosess, med mange faktorer som virker inn på forskjellige måter. En måte å beskrive denne prosessen på, er ved å dele opp et individs kognisjon i basiskunnskap, strategier, metakognisjon og holdninger. Ved å bruke disse kategoriene, beskrive hver enkelt og hvordan de samhandler, er man i stand til å beskrive matematisk atferd på en nokså presis måte. Kategoriene synes å dekke sentrale deler av matematisk tenkning. Når matematikklærere skal forsøke å bedre elevenes kognitive ferdigheter innen matematikk, blir det naturlig å hevde at dette gjøres best ved en påvirkning rettet mot alle disse kategoriene. Mens tradisjonell undervisning stort sett retter seg imot matematiske fakta og ferdigheter, er det her foreslått hvordan man kan undervise strategier. I den sammenhengen er det også beskrevet hvordan de øvrige komponentene må inkluderes for at strategiene skal bli tatt i bruk på en hensiktsmessig måte. Dette gir et teoretisk grunnlag som synes å ha stor «face-validity», og utfordringen for framtida blir å vise i hvilken grad strategiundervisning etter en slik modell vil føre til økt matematisk kompetanse.

Referanser

Artzt, A.F. & Armour-Thomas, E. (1992). Developement of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups, *Cognition and Instruction*, **9**, 2, s. 137-175.

Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking*, New York: Teachers College Press.

Bassok, M. (1990). Transfer of Domain-Specific Problem-Solving Procedures, *Journal of Experimental Psychology*, **16**, 3, s. 522-533 .

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Context, *Educational Studies in Mathematics*, **15**, s.129-147.

Bell, A. (1987). *Diagnostic Teaching: Methods and Materials Based on Research on Understanding*, Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Boero, P. (1990). On Long Term Development of Some General Skills in Problem Solving: A Longitudinal Comparative Study, *PME XIV Proceedings*, Mexico.

Bondesan, M. & Ferrari, P. (1991). The Active Comparison of Strategies in Problem-Solving: An Explorative Study, *PME XV Proceedings*, Assisi, Italy.

Borkowski, J.G. & Turner, L.A. (1990). Transsituational Characteristics of Metacognition, Schneider, W. & Weinert, F.E. (eds.), *Interactions Among Aptitudes, Strategies and Knowledge in Cognitive Performance*, New York: Springer-Verlag.

Brown, A. (1987). Metacognition, Executive Control, Self-Regulation, and other more Mysterious Mechanisms, Weinert, F.E. & Kluwe, R.H. (eds.), *Metacognition, Motivation, and Understanding*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Bråten, I. (1993). Cognitive Strategies: A Multicomponential Conception of Strategy Use and Strategy Instruction, *Scandinavian Journal of Educational Research*, **37**, 3, s.217-242.

Chi, M., Feltovich, P. & Glaser, R. (1981). Categorization and Representation of Physics Problems by experts & novices, *Cognitive Science*, **5**, s.121-152.

Day, J.D., Cordon, L.A. & Kerwin, M.L. (1989). Informal Instruction and Developement of Cognitive Skills: A Review and Critique of Research, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Dufresne, A. & Kobasigawa, A. (1989). Childrens Utilization of Study Time: Differential and Sufficient Aspects, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Gallani, J.K. (1989). Schema-Based Strategies and Implications for Instructional Design in Strategy Training, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Haylock, D.W. (1987). A Fremework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren, *Educational Studies in Mathematics*, **18**, s.59-74.

Hiebert, J. & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the Major Themes, Hiebert, J. & Behr, M (eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reaston: NCTM, LEA.

Kloosterman, P. & Stage, F.K. (1992). Measuring Beliefs about Mathematical Problem Solving, *School Science and Mathematics*, **92**, 3, s.109-115.

Lester, F., Garofalo, J. & Kroll, D. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes*. Final report of the NSF project MDR 85-50346.

Lopez-Real, F. & Veloo, P. (1993). Childrens Use of Diagrams as a Problem-Solving Strategy, *PME XVII Proceedings*, Japan: University of Tsukuba.

McLeod, D.B. (1992). Research in Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization, Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: NCTM – Macmillan Publishing Company.

Ostad, S.A. (1990). Hvorfor har barn matematikkvansker? Ogden, T. & Solheim, R. (eds.), *Spesialpedagogikk*, s.67-80, Oslo: Universitetsforlaget

Paris, S.G. & Byrnes, J.P. (1989). The Constructivist Approach to Self-Regulation and Learning in Classroom, Zimmerman, B.J. & Schunk, D.H. (eds.), *Self-Regulated Learning and Academic Achievment. Theory, Research and Practice*, New York: Springer-Verlag.

Polya, G. (1957). *How to Solve it* (2. utg.), Princeton N.J.. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*, New York: John Wiley & Sons.

Pressley, M., Goodchild, F., Fleet, J.,Zajchowski R. & Evans, E.D. (1989). The Challenges of Classroom Strategy Instruction, *The Elementary School Journal*, **89**, 3, s.301-342.

Pressley, M. & Harris, K.R. (1990). What We Really Know about Strategy Instruction, *Educational Leadership*, **48**, 1, s.31-34.

Robitaille, D.F. (1990). Achievment Comparisons between the First and Second IEA Studies of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **21**, s. 395-414.

Rohwer Jr., W.D. & Thomas, J.W. (1989). Domain-Specific Knowledge, Metacognition, and the Promise of Instructional Reform, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Royer, J.M., Cisero, C.A. & Carlo, M.S. (1993). Techniques and Procedures for Assessing Cognitive Skills, *Review of Educational Research*, **63**, 2, s.210-243.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: NCTM - Macmillan Publishing Company.

Short, E.J. & Weissberg-Benchell, J.A. (1989). The Triple Alliance for Learning: Cognition, Metacognition, and Motivation, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Swan, M. (1984). *Problems with Patterns and Number*, Manchester: JMB/Shell Center.

Symons, S., Snyder, B.L., Cariglia-Bull, T. & Pressley, M. (1989). Why Be Optimistic About Cognitive Strategy Instruction?, McCormick, C.B., Miller, G. & Pressley, M. (eds.), *Cognitive Strategy Research*, New York: Springer-Verlag.

Instruction in problem solving strategies

Abstract
The article's first part presents a framework which covers central aspects in mathematical thinking. The concepts described are: Knowledge base, strategies, metacognition, and attitudes. The relations between these concepts are also discussed. The second part of the article is devoted to strategy instruction. A model for such instruction is highlighted; how strategies can be taught according to this model, but also how the other parts of the framework should be stimulated to achieve the goal: increased mathematical competence through rational use of strategies. The article's conclusion is that this framework and this model for teaching constitute a plausible theoretical base for empirical studies of strategy instruction.

Author
Bjørnar Alseth is Senior Lecturer at Telemark College.
Address
Department for Teacher Training, Lærerskoleveien 40,
3670 Notodden, Norway.
E-mail: Bjornar.Alseth@not.hit.no