Læreres utbytte av kunnskap om hjernen

JAN ROKSVOLD

Konkrete klasseromsanvendelser av hjerneforskning har latt vente på seg. I denne oversiktsartikkelen undersøkes det potensielle utbyttet for lærerstudenter ved å kjenne til ulike temaer knytta til hjernens befatning med tall og aritmetikk – uavhengig av hvorvidt slike en-til-en-anvendelser eksisterer eller kan eksistere. Av potensiell verdi for lærere framheves blant annet kunnskap om hvilke vanskeligheter et assosiativt minne forårsaker i forbindelse med aritmetiske tabeller. Med bakgrunn i moderne hjerneforskning belyses ei tallbehandling som kan deles opp i en medfødt "tallsans" og et kultur- og utdanningsavhengig eksakt tallsystem, hvordan ulike binæroperasjoner behandles på grunnleggende forskjellig vis av hjernen, og hvordan innlæringsstrategi kan påvirke lagringa av aritmetisk kunnskap. Temaer som barnets "logaritmiske indre tallinje" og dyskalkuli blir også belyst. Jeg konkluderer med at denne typen kunnskap om hjernen vil utvide lærerstudentenes forståelse av det lærende barnet, og dermed kunne påvirke deres praksis.

Først fra 1970-tallet av ble det teknologisk gjennomførbart å til en viss grad observere aktiviteten i en intakt hjerne mens den utfører ulike oppgaver (Posner, 2010), som for eksempel fingerbevegelse, sjakk eller aritmetikk. I tilfeller der målet har vært å studere tilegnelsen av kunnskap, har aritmetikk kunnet tilby veldefinerte og lett tilgjengelige indikatorer for læringsinnhold, framskritt og mål (Delazer et al., 2003; Zamarian, Ischebeck & Delazer, 2009).

Dagens hjerneavbildningsteknologi, som hovedsakelig baserer seg på målinger av økt blodtilstrømning (fMRI – functional magnetic resonance imaging) eller elektriske spenningsforskjeller (EEG – electroencephalography), gjør det mulig å visualisere de fysiologiske endringene som understøtter en matematisk tankeprosess (Bear, Connors & Paradiso, 2016).

Jan Roksvold
Universitetet i Tromsø

Roksvold, J. (2018). Læreres utbytte av kunnskap om hjernen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 23 (2), 25–48.

Etter som denne forskninga skjøt fart, utover på 90-tallet, fatta også utdanningsforskere interesse. De mest optimistiske så for seg at den nye kunnskapen om hjernen ville akselerere læringsprosessen og gjøre undervisning til en slags fusjon av kunst og naturvitenskap (Sousa, 2010). Kunne det tenkes et undervisningsopplegg eller ei lærebok i aritmetikk gjennomgående fundert på nevrovitenskapelige nyoppdagelser? Langt fra alle delte optimismen. Tvert imot var det flere som advarte om at "bølgen" med såkalt hjernebaserte undervisningsprogrammer var basert på feiltolkning av nevrovitenskapelige funn (Bruer, 1997). Slik fødes såkalte nevromyter (Goswami, 2006), der kroneksempelet er at vi mennesker kun bruker ti prosent av hjernen. Underforstått i advarslene lå det at undervisere ikke burde forsøke å forstå hjerneforskning, men at de i stedet burde vente til kognitive psykologer har omgjort materien til en lettere fordøyelig form (Sousa, 2010).

På tross av skepsisen har en rekke land og universiteter, deriblant Harvard, oppretta studieprogram tilegna samspillet mellom hjerneforskning og undervisningspraksis (Sousa, 2010). Også i det internasjonale matematikkdidaktikkmiljøet ligger interessen og ulmer, hvilket kan sees fra fjorårets spesialnummer av ZDM (2016), i sin helhet via emnet. At ingen av artiklene utgitt i Nomad, fra 1993 og fram til i dag, omhandler en mulig anvendelse av nevrovitenskapelige funn i matematikkundervisning, tyder på at interessen i Norden har vært mer lunken.

I denne oversiktsartikkelen vil jeg undersøke potensialet til kunnskap om hjernens befatning med tall og aritmetikk som en komponent i lærerutdanninga. Som nevnt er det, i beste fall, delte meninger om hvorvidt hjerneforskning har bidratt med noe konkret til undervisningspraksis, og, for den del, om en konkret anvendelse i det hele tatt er prinsipielt mulig (Bowers, 2016). Jeg mener imidlertid at spørsmålet hvorvidt, og i hvilken grad, lærerstudenter burde introduseres for tematikken, kan og bør diskuteres uavhengig av denne uenigheta. I tilsvaret (Howard-Jones et al., 2016) på Bowers' artikkel fra 2016 hevdes det at resultater fra hjerneforskning kan lede til økt forståelse av læringsprosesser og dermed også bedre læring og undervisning. Poenget er at slik kunnskap vil utvide lærerstudentenes forståelse av det lærende barnet og derfor vil kunne prege deres praksis uansett om det foreligger en en-til-en-anvendelse eller ikke. Formålet her er å presentere temaer relatert til matematikkundervisning der kunnskap om hjernen enten viser en kjent problematikk fra en ny vinkel, eller bringer helt ny og egenarta innsikt.

Jeg vil fokusere på tall og aritmetikk. Ved siden av plasshensyn er det to grunner til det: For det første kan (hel)tall og aritmetikk sies å være selve navet i grunnskolematematikken (og i matematikk generelt).

I skrivende stund foregår det i Norge en gjennomgang og fornying av innholdet i matematikk fellesfag, og et uttalt fokus på dybdelæring (Ludvigsenutvalget, 2015) gjør det vanskelig å tro at den elementære aritmetikken med det vil få mindre plass. For det andre har aritmetikk, med sine lett tilgjengelige indikatorer (se forrige side), fra begynnelsen av vært et ynda undersøkelsesobjekt innen nevrovitenskapen (se f.eks. nybrottsarbeidet til Roland & Friberg, 1985). I de seinere år har riktignok også emner som algebra (Lee et al., 2007) og geometri (Dehaene, Izard, Pica & Spelke, 2006; Izard, Pica, Spelke & Dehaene, 2011) blitt gjenstand for lignende undersøkelser, men foreløpig i et langt mindre omfang.

Kunnskap om hjernens befatning med tall og aritmetikk har jeg valgt å dele inn i følgende undertemaer, som hvert har fått sitt kapittel:

- Det analoge tallsystemet
- Eksakte tall og aritmetikk
- Tabellkunnskap og hukommelse
- Innlæring av aritmetikk
- Tallforståelsen hos barn
- Dyskalkuli
- Emosjoner og matteangst

Disse undertemaene berører ulike aspekter som er sentrale i barns utvikling av tallforståelse og tilegning av regneferdigheter. De to første kapitla omhandler hjernens befatning med tall og aritmetikk i sin alminnelighet, mens de resterende fem kapitla er mer direkte knytta opp mot læring og undervisning. Ved slutten av hvert kapittel vil jeg diskutere det enkelte temaets relevans for lærerstudenter. Helt til slutt følger en generell diskusjon.

Det analoge tallsystemet

Litt forenkla kan man si at hjernen behandler tall på to forskjellige måter, og da ved hjelp av ulike kretser, eller systemer (se f.eks. Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003; Dehaene et al., 1999; Lemer, Dehaene, Spelke & Cohen, 2003). Det ene systemet betegnes gjerne som et omtrentlig eller *analogt tallsystem*, og kalles iblant også for "*tallsansen*". Dette tallsystemet utgjør et kultur- og utdanningsuavhengig system for omtrentlig representasjon av kvantitet, og er noe vi deler med en lang rekke andre dyrearter, fra løver (Mccomb, Packer & Pusey, 1994) til virvelløse dyr som bier (Gross et al., 2009).

Hos mennesker aktiveres systemet naturlig i situasjoner som innebærer kvantitativ behandling, og især der det er enten umulig eller uhensiktsmessig å telle (Piazza & Izard, 2009), for eksempel ved estimering av antall eller sammenligning av antallet objekter i to mengder. Det analoge tallsystemet er ikke-verbalt, og uavhengig av inntrykksformatet, i den forstand at det aktiveres enten tallet høres, føles med fingertuppene eller leses, og da enten det leses som tallord, arabisk tallsymbol, romersk tallsymbol eller ikke-symbolsk, for eksempel som et sett med prikker (Dehaene, Molko, Cohen & Wilson, 2004; Dehaene et al., 2003; Piazza & Izard, 2009). Systemet er automatisert og kan aktiveres ubevisst, slik at vi ikke engang kan lese et tallord, som "sju", uten at tallet plasseres på ei "indre tallinje" (Dehaene et al., 2003).

Kallenavnet "tallsansen" er vel fortjent. Felles for sanser som syn og hørsel er at fenomener som kan ordnes etter en skala (som f.eks. lyd- og lysstyrke), følger *Webers lov*, en slags psykologiens naturlov som beskriver sammenhengen mellom følt og faktisk intensitet av sanseinntrykk: Den minste merkbare endringa (i f.eks. lysstyrke) er proporsjonal med referanseinntrykket (den opprinnelige lysstyrken). Proporsjonalitetskonstanten w kalles for *Weber-brøken*. En konsekvens av Webers lov er at det opplevde sanseinntrykket blir en logaritmisk funksjon av den faktiske stimulien, slik at "større" stimuli tilegnes "mindre" plass, og dermed blir vagere representert (Nieder & Miller, 2003).

Det analoge tallsystemet vårt har flere særtrekk som vitner om Webers lov. For det første er det gjenstand for en avstandseffekt og en størrelseseffekt. *Avstandseffekten* beskriver det at desto større forskjell det er mellom to antall, desto raskere og riktigere klarer vi å skille to mengder på bakgrunn av antall (Mussolin et al., 2013). Denne regelen gjelder selv for små antall, og faktisk også selv om de er representert ved arabiske tallsymboler. For eksempel bruker vi over 100 ms kortere tid på å avgjøre hva som er størst av 2 og 9, enn av 5 og 6 (Dehaene, 2011). *Størrelseseffekten* beskriver at for en fiksert avstand øker sammenligningsvanskelighetene med størrelsen på mengdene (Nieder, 2013). For eksempel er det vanskeligere å skille en mengde med 23 prikker fra en mengde med 25, enn en mengde med 3 fra en mengde med 5.

Til sammen beskriver disse to effektene et tallsystem der den minste merkbare endringa er proporsjonal med det opprinnelige antallet, nettopp i henhold til Webers lov. Weber-brøken endrer seg gradvis fra spedbarn ($w \approx 1$) til voksne ($w \approx 0.12$) (se f.eks. Halberda & Feigenson, 2008). Den varierer også mye fra individ til individ (Halberda et al., 2012), og evnen til å estimere har vist seg å korrelere med matematiske evner hos barn (Piazza et al., 2010), så vel som hos ungdom og voksne (Agrillo, Piffer & Adriano, 2013; J. Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008).

For det andre kommer Webers lov til syne i vår indre tallinje. Dersom et barn blir bedt om å plassere ulike tallord langs ei linje fra 0 til 100, vil ikke talla bli fordelt jevnt utover. Små tall blir avsett større plass, mens større tall i økende grad blir komprimert, på en måte som gjør den resulterende tallinja logaritmisk. Det samme fenomenet er observert blant voksne hos Mundurucene, en indianerstamme i Amazonas som ikke benytter seg av symbolsk representasjon for antall større enn 5, samt hos vestlige, utdanna voksne som ble presentert ansamlinger av prikker i stedet for tallord (Dehaene, Izard, Spelke & Pica, 2008).

Et stort antall studier støtter teorien om at det analoge tallsystemet har et fysiologisk hovedsete i og umiddelbart omkring hver av hjernehalvdelenes intraparietale sulcus (IPS), en langsgående fure i hjernebarken der issen begynner å helle nedover mot bakhodet (Ansari, 2010; Dehaene et al., 2003). Det var også i nettopp dette området det for første gang lyktes å spore numerisk kognisjon helt ned til nevronnivå, da forskere ved MIT påviste hjerneceller som selektivt responderer på numerisk antall, hos velutdanna rhesusaper (Nieder, 2013; Nieder & Miller, 2003). Rhesusapene, som var trent til å bedømme hvorvidt to antall (prikker) samsvarer, hadde fått et slags mikroskopisk voltmeter plassert i hjernen for å måle den elektriske aktiviteten i enkeltnevroner. Om lag en femtedel av nevronene i apenes IPS viste seg rett og slett å være antallselektive. Disse "tallnevronene" viste maksimal aktivitet (avfyringsfrekvens) for et bestemt antall – nevronets favorittall – og en logaritmisk avtagende aktivitet ettersom talla avvek fra favorittallet. Aktivitetskurven var kort og spiss for små tall, men ble gradvis slakere for større tall. Både avstands- og størrelseseffekten, samt vår logaritmiske indre tallinje, kan forklares ut fra disse tallnevronene (Nieder, 2013).

For lærerstudenter vil det ha en egenverdi å kjenne til hvordan hjernen behandler tall på forskjellige måter, samt hvilke av disse måtene som er allmennmenneskelige og intuitive, og hvilke som er innlærte og kulturavhengige. En slik kunnskap vil kunne berike studentenes syn på matematikkens ontologi og epistemologi, for eksempel ved å belyse spørsmål som "Hva er et tall?" og "Hvordan oppstår barnets kunnskap om tall?" fra en ny vinkel. Spesielt vil de kunne ha nytte av å lære mer om den medfødte tallsansen som barn tar med seg til første skoledag. Som påpekt av Dehaene (2011; se også Dehaene et al., 2008) strider en medfødt kunnskap om tall mot Piaget sin konstruktivistiske teori, der matematikk sees som en mengde kulturelle oppfinnelser som tilegnes stegvis i løpet av barndom- og ungdomstida – en teori lærerstudenter trolig er mer kjent med. Mer konkret kan det tenkes at økt kunnskap om barns medfødte tallsans vil øke læreres bevissthet om og forståelse for hvorfor enkelte ting, som at et heltall kan plasseres på ei linje og at tall kan ordnes i rekkefølge, faller lett og naturlig (Dehaene et al., 2008), mens andre ting, som at en brøk også er et tall, faller vanskeligere (Bjuland, Jakobsen & Munthe, 2014).

Som for de andre temaene er det mulig å innlemme kunnskap om dette i ei lærerutdanning uten å snakke om resultater fra hjerneforskning, men jeg mener at man da går glipp av en viktig dimensjon. At barns indre tallinje ved skolestart er logaritmisk, kan undervises lærerstudenter som et faktum, men forklaringa på nettopp hvorfor det er slik, tar oss, via lærerike omveier, inn i hjernen til en rhesusape i kjelleren på MIT.

Eksakte tall og aritmetikk

”What is a number, that a man may know it, and a man, that he may know a number?”, spurte en av beregningsorientert nevrovitenskaps pionerer (McCulloch, 1960). For riktignok er det mulig å trene opp apekatter til å representere små antall med arabiske tallsymboler (se f.eks. Nieder & Miller, 2003), men innsatsen dette krever, både fra lærer og elev, vitner om at vi her ser unntaket som bekrefter regelen: Det eksakte tallsystemet er noe som hører mennesket til. Vår art har, side om side med det analoge tallsystemet, evnen til å lære oss å finne, navngi og resonnere rundt det eksakte antallet objekter i en mengde.

Det eksakte tallsystemet er en kulturell oppfinnelse, så de tilhørende aktivitetene utføres på forskjellige måter i forskjellige kulturer, og i noen kulturer inngår flere av dem ikke i det hele tatt (Piazza & Izard, 2009). Oppfinnelsen er samtidig av så ny dato at evolusjon vanskelig kan ha rukket å frambringe dedikerte nevrale nettverk. Man må derfor anta at det eksakte tallsystemet har utvida funksjonsområdet til evolusjonært sett eldre kretser, hvis opprinnelige funksjon og organisering passer vårt nyskapte, kulturelle behov (Knops et al., 2009).

Til det eksakte tallsystemet hører også vår evne til eksakt aritmetikk, en aktivitet som hos voksne ofte innebærer gjenkalling av innlærte aritmetiske fakta fra minnet (se f.eks. Dehaene et al., 2003; Jost et al., 2011). En innflytelsesfull teori går ut på at nettopp dette understøttes av den funksjonelt mangfoldige venstre angulære gyrus, som, ifølge teorien, aktiveres i tilfeller der aritmetikken krever verbal koding – men ikke nødvendigvis en kvantitativ behandling – av tall (Grabner et al., 2009; Jost et al., 2011).

Dikotomien eksakt og omtrentlig tallsystem etterlater seg enkelte spørsmål. For det første har vi mer komplekse addisjoner og multiplikasjoner, som de færreste har tabellkunnskap for. Hvordan løses for eksempel 23×48? Her åpner det seg flere mulige strategier, som man må velge mellom. Felles for strategiene er at de går over flere steg, og derfor stiller større krav til både planlegging og arbeidsminne. Dette gjenspeiles også i fMRI, der man ser at komplekse aritmetiske problemer i større grad aktiverer frontale områder (Jost et al., 2009), områder som tradisjonelt forbindes med nettopp planlegging, arbeidsminne og en overordna eksekutiv funksjon (Bear et al., 2016).

Et annet tilfelle er problemer av typen 7×0, $5 + 0$ og $4 + 3 - 3$. Det er rimelig å forvente at slike oppgaver løses på et eget vis, ved bruk av regler. Også denne forskjellen har latt seg spore på fMRI. Multiplikasjon med 0, til forskjell fra multiplikasjoner uten 0, aktiverer ei særskilt ansamling nevroner i basalgangliene som det fra tidligere er kjent at aktiveres nettopp ved bruk av produksjonsregler, for eksempel ved bøying av verb etter et mønster. Et håndfast eksempel på slektskapet mellom språk og matematikk. Økt aktivitet i venstre angulære gyrus forklares med at slike aritmetiske regler trolig lagres i et verbalt format av typen "null ganger hva-som-helst er null" o.l. (Jost et al., 2009).

Et interessant aspekt ved de to systema, det eksakte og det analoge, er graden av dissosiasjon de to imellom. Det er kjent at personer med akalkuli grunna lokal hjerneskade, som følge av for eksempel slag, har mista fullstendig forståelsen for den underliggende betydninga av tall, med andre ord det semantiske aspektet, samtidig som de har ivaretatt en prikkfri og intakt tabellkunnskap (Dehaene & Cohen, 1997). Det omvendte tilfellet forekommer også, og da gjerne sammen med afasi (Zamarian et al., 2009), hvilket støtter teorien om at innlærte aritmetiske fakta lagres i et verbalt format. Likeledes er det heller ikke uvanlig å være enten betraktelig hardere ramma med tanke på subtraksjon, som få har tabellkunnskap for, enn med tanke på multiplikasjon (Lemer et al., 2003), eller omvendt (Lee, 2000). Det at to systemer er dissosierte, umuliggjør naturligvis ikke samspill. Tvert imot, det er enkelt å tenke seg aritmetikkoppgaver som stiller krav til både verbal og kvantitativ behandling.

Det mest sentrale også her, sett fra en lærerstudents perspektiv, vil trolig være dikotomien mellom det analoge og det eksakte tallsystemet, samt eksemplene fra hjerneforskning som tydeliggjør at sistnevnte er en menneskelig og kulturell oppfinnelse, som det tar barn lang tid å mestre. En viktig implikasjon av dissosiasjonen de to systema imellom, som lærere bør være tjent med å kjenne til, er at binæroperasjonene kan understøttes (hovedsakelig) av ulike systemer, slik at det er mulig for eksempel å beherske gangetabellen (verbal koding i et eksakt tallsystem) til fulle, uten å være i stand til å subtrahere to tall (semantisk, kvantitativ behandling i et analogt tallsystem).

Tabellkunnskap og hukommelse

Ensifra multiplikasjon løses hovedsakelig ved minnegjenkalling fra og med fjerde trinn (Cooney, Swanson & Ladd, 1988, studie foretatt i USA), og hos voksne løses om lag 95–98 % på dette viset (Andres, Michaux & Pesenti, 2012). Men hvordan er veien dit? Hvor vanskelig er det å lære seg den lille gangetabellen? Den franske hjerneforskeren Stanislas Dehaene har et tankeeksperiment egna til å kaste lys over spørsmålet (2011). For se bare for deg at du ble bedt om å memorere følgende adresseliste:

Pål Fredriksen bor i Fredriksens gate

Albert Fredriksen bor i Pål Jonsens gate

Bjørn Nilsen bor i Albert Jonsens gate

Henrik Nilsen bor i Fredrik Henriksens gate

Dette er en illustrasjon på de vanskeligheter elever står overfor i sitt møte med aritmetiske tabeller. For poenget til Dehaene er naturligvis at bytter man ut "bor i" med likhetstegnet, og navna Pål, Jon, Fredrik, Albert, Henrik, Bjørn og Nils med talla fra 1 til 7, så danner adresselista et utsnitt av den lille multiplikasjonstabellen. Men hvorfor er det egentlig så vanskelig å huske at Bjørn Nilsen bor i Albert Jonsens gate, mens det er Albert Fredriksen som bor i Pål Jonsens gate? Eller å huske at det er 6×7 som blir 42, mens 48 er 8×6. For en computer er jo dette aldri verre enn Ctrl+S og Ctrl+L.

Det er fortsatt mange ubesvarte spørsmål knytta til hvordan minner lagres og framkalles. Et gjeldende paradigme går i grove trekk ut på at minner lagres som kretsverk av innbyrdes forbundne nevroner. Når så noen av disse nevronene aktiveres, gjør de synaptiske forbindelsene at hele kretsen, og dermed minnet, aktiveres (Bear et al., 2016). I motsetning til computere har vi mennesker altså et minne som fungerer assosiativt. Når vi leser eller hører "6 ganger 7", assosierer vi formodentlig dette med tallet 42. Men var det ikke slik at seks ganger et eller annet ble 48? Kanskje assosierer vi i tillegg gangestykket med tallet 56? Eller 63? Faktaene i aritmetiske tabeller er ikke adskilte, tvert imot, de er filtrert inn i hverandre, og er som sådan velegna til å vekke falske assosiasjoner. Det er ikke tilfeldig hvilke gale svar man får (Dehaene, 2011). For eksempel er $6 \times 7 = 43$ eller $7 \times 6 = 81$, svært usannsynlig. De uriktige svara er som regel av en sannsynlig størrelsesorden, og for voksne er mer enn 90 % av de gale svara riktig svar på andre problemer i multiplikasjonstabellen (Ashcraft, 1992). I mesteparten av menneskets evolusjonære historie har det assosiative minnet vært en styrke. Når våre forfedre støtte på et dyr med skarpe tenner og klør, var det hensiktsmessig at dette straks frambrakte kunnskap og minner fra tidligere erfaringer med skarpe tenner og klør. Men akkurat når det kommer til aritmetiske tabeller, blir altså denne samme egenskapen en svakhet.

Å kjenne til hukommelsen sin assosiative virkemåte og de problema den virkemåten forårsaker i forbindelse med innlæring av aritmetiske tabeller, burde kunne ha en helt konkret og umiddelbart omsettelig verdi for lærerstudenter. I første rekke vil dette hjelpe lærere til ikke bare å identifisere "gjengangsforbryterne" i gangetabellen, slik som 42, 48, 56 og 54, men det vil også gi dem kunnskapen til å forklare, både for seg selv og for elever, hvorfor nettopp disse talla skaper problemer. I tillegg vil det øke bevisstheten hos de framtidige lærerne om at det er viktig å ta seg god tid når multiplikasjon introduseres. Nettopp i denne perioden har man kunnet observere en midlertidig nedgang i elevers addisjonsferdigheter, da $2\times3=5$ og $2+3=6$ blir en slags aritmetikkens "faux amis", og feil som $2+3=6$ sniker seg inn (Miller & Paredes, 1990).

Innlæring av aritmetikk

Rundt midten av forrige tiår begynte forskerne å undersøke de fysiologiske sidene ved innlæring av aritmetisk kunnskap (Menon, 2010). Interessante forskjeller ble funnet binæroperasjoner imellom. For eksempel så man ved både multiplikasjon og subtraksjon en bedring både i responstid og presisjon som følge av trening, men kun for multiplikasjon så forskerne et endra aktivitetsmønster i hjernen, og da i form av en aktivitetsforflytning fra frontale områder bakover til det tidligere beskrevne "matematikksenteret" i isselappen, samt, innad i denne, fra IPS (analoge tallsystemet) til venstre angulære gyrus (verbal koding) (Delazer et al., 2003; Ischebeck et al., 2006). Hva subtraksjon angikk, så det altså ut til at forsøkspersonene fortsatte å bruke de samme strategiene, bare raskere, og dermed unnlot å bytte over til verbal lagring og gjenkalling. Forfatterne spekulerer på om årsaken kan ligge i måten de to operasjonene blir innlært på. Mens multiplikasjon ofte læres inn som verbal memorering av en tabell (Dehaene et al., 2003; Ischebeck et al., 2006), læres subtraksjon for det første gjerne tidligere, og da ofte ved hjelp av tellestrategier.

Mer overraskende er det at innlæringsmetode alene kan gi opphav til ulike aktivitetsmønstre. I studien (Delazer et al., 2005) skulle forsøkspersonene lære seg utenat utsnitt av "tabellene" til to nye binæroperasjoner, # og §. For # måtte de lære seg tabellen ut fra den underliggende algoritmen $x \# y=[(y-x)+1]+y$ (for eksempel $3\#4=[(4-3)+1]+4=6$), mens de for § skulle memorere svaret direkte (for eksempel $5\S7=9$), uten å ha fått innblikk i den bakenforliggende formelen. Begge tabellutsnittene fikk de øve på hver dag i ei uke, til responstid var lik, og lav for begge. Deretter fulgte en test av presisjon og responstid, kombinert med fMRI.

Etter at uka var omme, sa et stort flertall at de hadde gått over fra bruk av algoritmen til direkte gjenkalling fra minnet også når det gjaldt operasjonen #. Dette, samt det høye antallet ($n = 90$) treningsrepetisjoner på hver oppgave gjorde det rimelig å forvente at begge binæroperasjonen hadde nådd en høy grad av automatikk. Det forskerne fant, var derimot at både atferd og hjerneaktivitet tilknytta de to binæroperasjonene fortsatt gjenspeilte innlæringsmetoden. Det var betraktelig lavere feilprosent for de oppgavene som var innlært ved hjelp av strategi (#), og forskerne fant også at de to operasjonene aktiverte til dels ulike hjerneområder.

Jeg har i kapittelet om det eksakte tallsystemet argumentert for lærerstudenters utbytte av å kjenne til hvordan hjernen behandler ulike binæroperasjoner og aritmetiske problemer på forskjellig vis. Likeledes vil det være en fordel å kjenne til at hjernen reagerer ulikt på en og samme undervisningsmetode for forskjellige binæroperasjoner. Denne kunnskapen kan bidra til å nyansere lærerstudenters syn på pugging i forhold til konseptuell undervisning. Selv om pugging kom dårlig ut i studien over, åpner resultatet som viste ulik hjerneaktivitet for like operasjoner ved ulik trening, likevel for at andre aspekter ved aritmetikk *kan* være mest hensiktsmessig å pugge.

Tallforståelsen hos barn

"At all vår erkjennelse begynner med erfaringen, er det slett ingen tvil om", skriver Kant i innledninga til sin "Kritikk av den rene fornuft" (2005, s. 37). Men kanskje er det nettopp tvile vi må. Så å si på dagen 200 år etter at Kant skrev sitt historiske verk, lyktes det oppfinnsomme forskere å løse et diagnostisk problem uten sidestykke. Ved hjelp av nytenkende, dukketeateraktige eksperimenter, for eksempel der gjenstander vekselvis ble tatt bort og tilført en "scene" skjult av et sceneteppe, og varighet av blikkfiksering som indikator, ble det demonstrert at selv spedbarn kan gjenkjenne (Starkey & Cooper, 1980) samt addere og subtrahere (Wynn, 1992) små tall. Eksempelvis så man ei signifikant lengre fokuseringstid dersom "teppefallet" viste at det var kun én ting på scenen etter at spedbarna hadde sett to ting bli tilført i tur og orden. Spedbarna var, med andre ord, overraska. Nyere studier har vist at barns antallsforståelse av mengder går på tvers av inntrykksformat (Barth, La Mont, Lipton & Spelke, 2005), til og med i ei gruppe spedbarn med gjennomsnittsalder på 49 timer (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009), selv om det skal sies at 10 av forsøkspersonene ble ekskludert fra denne studien etter å ha falt i søvn under forsøket.
Barn uten formell skolegang har attpåtil en intuitiv, omtrentlig forståelse av multiplikasjon. I en studie (McCrink & Spelke, 2010) besvarte barn i alderen 5–7 år ikke-symbolske fordoblings- og firedoblingsoppgaver langt bedre enn tilfellet hadde vært ved gjetting. De beherska også skalering med 2.5, og faktisk var suksessprosenten høyere her enn ved

firedobling, hvilket indikerer at den intuitive forståelsen for multiplikasjon ikke baserer seg på gjentatt addisjon, men snarere på multiplikasjon slik dette gir mening for to reelle tall – som ei skalering av et tall med et annet (McCrink & Spelke, 2010). Forfatterne gjentok nylig forsøket, men denne gangen for divisjon, og med tilsvarende resultat. Barna, i alderen 5–6 år, presterte bedre enn ved gjetting på ikke-symbolske halverings- og firedelingsoppgaver, og viste således ei fleksibel evne til å skalere tall (McCrink & Spelke, 2016). I tillegg har studier vist at barn har en intuitiv forståelse for visse aritmetiske prinsipper, som kommutativitet (Baroody, 1999) og inverser (Gilmore & Spelke, 2008).

Tallordas etymologi, tallsymbolas opphav og barns telling på fingrene vitner om at tall og fingrer er knytta sammen fra tidlig av både i menneskehetens og enkeltmenneskets historie. Dette siste ble tydeliggjort i studien (Noel, 2005) der førsteklassinger ble bedt om å putte den ene hånda inn i en boks, hvorpå en eller to fingrer ble berørt, uten at barnet kunne se hvilke. Barna skulle så, etter at boksen var blitt tatt bort, peke på den eller de fingrene som ble berørt. Overraskende nok viste barnas prestasjon på denne testen seg å være den beste indikator på seinere prestasjonsnivå i aritmetikk (Andres et al., 2012; Noel, 2005). Ei mulig forklaring på korrelasjonen mellom aritmetikk og fingergnosi er aktivitetssentre som tilgrenser og overlapper hverandre i isselappen; for eksempel vil en skade som påvirker den ene av disse evnene, også ha en tendens til å påvirke den andre (Dehaene et al., 2003; Noel, 2005). Alternativt kan sammenhengen skyldes den funksjonen fingrer har i utviklinga av en symbolsk representasjon av kvantitet. Argumentet her er at uten fingrene blir det vanskelig for barn å få en normal representasjon av tall (Butterworth, 1999). Ei tredje og nyere forklaring, som foreslås både i (Dehaene, 2011) og (Penner-Wilger & Anderson, 2013), går ut på at korrelasjonen skyldes nevral gjenbruk; kretser som i utgangspunktet er utvikla med henblikk på en oppgave, ender opp med å gjøre noe annet.

En annen god indikator på seinere prestasjoner i matematikk er den såkalte tallinjetesten, der barnet blir bedt om å plassere forskjellige tall på ei linje med endepunkter 0 og 100 (eller 1000) (Berteletti, Man & Booth, 2015). Som jeg skrev i kapittelet om det analoge tallsystemet, beskrives den indre mentale tallinja hos barn trolig best som logaritmisk. Parallelt med innlæring av et eksakt tallsystem rettes denne logaritmiske funksjonen gradvis ut (Berteletti et al., 2015; Dehaene et al., 2008), i det minste for symbolske tall, inntil den for utdanna voksne nærmer seg grafen til $y = x$.Men hva er det egentlig som skjer i barns hode når tallinja rettes ut? Eller, mer generelt, hva er sammenhengen mellom det analoge tallsystemet vi (etter alt å dømme) blir født med, og den kulturelt betinga symbolske representasjonen av kvantitet? Hva er det som skjer når et barn knytter symboler opp mot numeriske størrelser? Det er nettopp denne abstraksjonen som gjør det mulig å løse aritmetiske problemer.

Den historisk sett mest innflytelsesrike (Ansari, 2008) teorien er at utviklinga av evnen til å representere og behandle ulike symboler for tall involverer en prosess der symbolske representasjoner knytter seg til allerede tilstedeværende, ikke-symbolske representasjoner. Denne teorien underbygges av det som trolig var verdens første fMRI-studie av friske barn, der forskerne fant at mekanismene i isselappen som tenkes å understøtte det analoge tallsystemet, er til stede allerede hos fireåringer (Cantlon, Brannon, Carter & Pelphrey, 2006). Likeledes ble det i en EEG-studie avdekket en distinkt elektrisk respons i isselappen på endring i antall allerede hos tre måneder gamle spedbarn (Izard, Dehaene-Lambertz & Dehaene, 2008). Denne teorien impliserer også noe om hvordan barn lærer symbolsk representasjon, nemlig ved samtidig å bli presentert for både den ikke-symbolske representasjonen (fire klosser) og den symbolske (tallsymbolet 4 eller lyden av ordet "fire") (Ansari, 2008).

Verdien for lærerstudenter av å kjenne til barns medfødte tallsans, hvilket stadium denne er i ved skolestart, og hvordan den utvikler seg i løpet av barndoms- og ungdomstida, har jeg alt vært inne på. Resultata knytta til barns medfødte evne til multiplikasjon og divisjon er tankevekkende, og bør kunne danne et godt bakteppe for videre diskusjon med lærerstudenter. Det er jo unektelig et slags paradoks med så mange problemer knytta til noe vi har en intuitiv forståelse for. Spesielt den intuitive forståelsen barn har av multiplikasjon som skalering, bør formidles lærerstudenter som skal undervise i de fire regneartene. Det er flere studier som antyder at multiplikasjon ikke læres best som gjentatt addisjon (se f.eks. Park & Nunes, 2001). Sammenhengen mellom fingergnosi og seinere prestasjoner i matematikk kan bidra til refleksjon og diskusjon rundt hvorvidt barn burde oppfordres til eller frarådes å telle på fingrene (se f.eks. Moeller et al., 2011).

Dyskalkuli

Utviklingsmessig dyskalkuli er den neglisjerte stebroren til dysleksi. Det gjelder forskningsinnsatsen, og det gjelder kunnskapen og bevisstheten i befolkninga generelt (Ansari, 2010; Bishop, 2010). Ettersom forskjellige studier har benytta seg av ulike inklusjonskriterier (Butterworth & Varma, 2013) er det vanskelig å si noe helt sikkert om utbredelsen, men det anslås gjerne at om lag 3–6 % av barn i grunnskolealder har lidelsen (Ansari, 2010; Dehaene, 2010; Reigosa-Crespo et al., 2012). I Norge vil dette tilsvare omtrent én elev per klasserom. Utviklingsforstyrrelsen er medfødt og arvelig, og defineres gjerne som en sterkt nedsatt prestasjonsevne i matematikk, og spesielt i aritmetikk, på tross av ellers normal intelligens og tilgang på utdanning (Ansari, 2010; Butterworth & Varma, 2013). Evnen til umiddelbart å bestemme antallet til en mengde bestående av opptil tre-fire objekter (såkalt subitering) er nedsatt hos individer med dyskalkuli (Dehaene, 2011), og det samme er evnen til å representere og behandle antall i sin alminnelighet (Landerl, Bevan & Butterworth, 2004). I tillegg virker den indre mentale tallinja unormal, ettersom barn med dyskalkuli gjerne mangler avstandseffekten ved sammenligning av to antall, slik denne effekten gjenspeiler seg i fMRI (De Smedt, Holloway & Ansari, 2011; Price et al., 2007). Dette bildet tyder på en atypisk fungerende IPS, selv for de mest grunnleggende numeriske oppgaver, og i den første fMRI-studien av dyskalkuli ble det funnet nedsatt aktivitet (Kucian et al., 2006), og seinere også en reduksjon i mengden grå materie (Rotzer et al., 2008), nettopp i dette området av isselappen. Samtidig advares det (Rapin, 2016) mot å tro at en kompleks lidelse som dyskalkuli har én enkelt underliggende nevrologisk årsak, felles hos alle med tilstanden.

Hva dysleksi angår, er det påvist at hjernens plastisitet tillater en viss grad av omstrukturering. Etter målretta, fonetiske øvelser, minner hjernen til dyslektikere mer om hjernen til normalt lesende, både i struktur og funksjon (Eden et al., 2004; Shaywitz et al., 2004). For eksempel hadde elevene i (Shaywitz et al., 2004) etter åtte måneder med daglig, skreddersydd øvelse i å matche lyder til bokstaver både bedre leseferdighet og mer normalt aktiveringsmønster i områder sentrale for fonologisk prosessering, enn kontrollgruppa, som ble gjenstand for mer konvensjonell form for intervensjon. Den eneste tilsvarende studien innen dyskalkuli tyder på at det samme gjelder for denne lidelsen. Ei gruppe med barn (8–10 år) ble satt til daglig trening av den indre mentale tallinja, i form av et dataspill der man skal lande et romskip med nummer på sida på rett plass på ei tallinje fra 0 til 100. To fMRI, én før og én etter treningsperioden, viste at de av barna som på forhånd var diagnostisert med dyskalkuli, hadde endra både prestasjon og hjerneaktivitet i retning av det normale (Kucian et al., 2011).

Bare en felles innsats fra matematikklærere og hjerneforskere kan lede til bedre forståelse av dyskalkuli, og bedre framtidsutsikter for de som lider av det (Susac & Braeutigam, 2014). I et par av studiene av lærere og lærerstudenters kunnskaper om hjernen fant forfatterne at mindre enn halvparten av de spurte britiske (Howard-Jones, Franey, Mashmoushi & Liao, 2009) og kinesiske (Pei et al., 2015) lærerstudentene var uenige i påstanden "Learning problems associated with developmental differences in brain function cannot be remediated by education". Dette er altså i strid med virkeligheten, og dersom lærerstudenter i Norge og

Norden har lignende misoppfatninger, vil det ha ei negativ innvirkning på det som statistisk sett er et sannsynlig møte med dyskalkuli hos elever. Å inkludere ei riktig framstilling av hjernens plastisitet i lærerutdanninga vil ifølge (Howard-Jones et al., 2016) kunne øke de framtidige lærernes motstandskraft overfor misoppfatninger og nevromyter, tilknytta for eksempel dyskalkuli.

Emosjoner og matteangst

Også emosjonelle faktorer påvirker naturligvis prestasjonsnivået i matematikk. En sterk følelse av stress og ubehag knytta til situasjoner som innebærer matematikk, har fått sin egen navnelapp: matteangst. Selve årsaksforholdet mellom prestasjonsnivå i matematikk og matteangst er foreløpig uavklart, men sikkert er at tilstanden går ut over behandlinga av tall spesielt og løsninga av matematikkoppgaver generelt (Ashkenazi & Danan, 2017). Innen aritmetikk er det hovedsakelig mer kompliserte aritmetikkoppgaver som rammes (Ashcraft & Faust, 1994). Denne typen oppgaver (for eksempel 8×14) krever gjerne verbal koding, samt planlegging og gjennomføring av opptil flere mellomregninger. En studie fra inneværende år gir oss kanskje forklaringa: Det er hovedsakelig den verbale komponenten av arbeidsminnet som påvirkes av matteangst, kan hende som en følge av forstyrrende og negativt betont "indre monolog" (Ashkenazi & Danan, 2017).

På tross av denne problematikken knytta til matteangst blir det helt feil å tenke på emosjoner som noe som først og fremst forstyrrer læring. Snarere tvert imot, og også dette bringer hjerneforskninga oss stadig nye eksempler på. En studie (Immordino-Yang & Faeth, 2010) av pasienter med nedsatt funksjon i pannelappen, et område av avgjørende betydning for personlighet og emosjoner, viser at dersom undervisning ikke stimulerer en emosjonell respons hos elevene, er sjansen mindre for at lærdommen vil påvirke beslutningstaking og atferd.

Selv den kreative sida av matematikk kan belyses av funn fra hjerneforskning. En problemløsningsstrategi mange lærerstudenter lærer å kjenne gjennom Pólya, er den metodiske og bevisste. På den andre sida har vi den plutselige innskytelse, med en umiddelbar erkjennelse av løsninga. Et "Eureka!" i badekaret. Det kan se ut til at hvilken av disse to strategiene man velger, kan leses ut fra aktivitetsmønsteret i hjernen når man gjør absolutt ingenting (Kounios et al., 2008). Hjerneaktivitet i hviletilstand er noe som varierer lite over tid for en og samme person (Kounios et al., 2008), slik at dette resultatet kan tolkes i retning av at forskjellige personer er disponert for forskjellige måter å angripe et problem på. For ikke å så frøet til en ny nevromyte vil jeg skynde meg å understreke at problema som her skulle løses, kun var anagrammer.

Når det er sagt, er det ikke utenkelig at lærerstudenter vil ha utbytte av å få se følelser og kreativitet i matematikk også fra et mer naturvitenskapelig laboratoriumsperspektiv, for slik å få en ny og større forståelse av fenomener av typen matteangst – og hvordan disse gir seg utslag.

Avsluttende diskusjon

Det er, så vidt jeg vet, ingen studier som sier noe hverken om norske eller nordiske lærerstudenters kunnskaper om hjernens befatning med matematikk, eller om deres holdninger til den eventuelle verdien av å ha slik kunnskap. Det nærmeste man kommer, er en større kartleggingsstudie av befolkninga i Brasil sine kunnskaper om hjernen og deres forhold til nevromyter (Herculano-Houzel, 2002), samt en rekke nyere, mindre studier av lærerstudenter og lærere i Storbritannia (Dekker, Lee, Howard-Jones & Jolles, 2012; Howard-Jones et al., 2009), Nederland (Dekker et al., 2012), Hellas (Deligiannidi & Howard-Jones, 2015), Kina (Pei et al., 2015), Spania (Ferrero, Garaizar & Vadillo, 2016) og Argentina (Hermida, Segretin, Soni García & Lipina, 2016), utført over samme lest som studien fra Brasil, men med mer fokus på læring. I studien fra Spania oppga 98.5 % av de spurte lærerne at de var interessert i hjernens rolle i læring, og 95.4 % betrakta vitenskapelig kunnskap om hjernen som veldig viktig for deres praksis. Samtidig mente 44 % av de samme lærerne at vi kun bruker 10 % av hjernen (ytterligere 23.2 % var usikre).

I fravær av slike studier her til lands virker det rimelig å anta at de færreste innen nevrovitenskap får skolering i matematikkdidaktikk, mens norske lærerstudenter ikke får noen systematisk introduksjon til hjernens befatning med matematikk. Dette skyldes ikke bare at nevrovitenskapen og didaktikken har til dels ulike definisjoner for og forståelse av hva læring består i (Howard-Jones, 2010). Hjerneforskning er på mange vis fortsatt en vitenskap i startgropa, og en-til-en-anvendelser av nevrovitenskapelige funn i matematikkundervisning lar vente på seg. Bruers innflytelsesfulle advarsel (1997) om at den påbegynte brua mellom nevrovitenskap og klasserom var av det vaklevorne slaget, har på sett og vis holdt stikk. Forskere har ikke kunnet tilby håndfaste bevis for hvordan utdanning kan gjøres mer effektiv ved hjelp av hjerneforskning (Bowers, 2016; Zamarian et al., 2009). I et nylig tilbakeblikk poengterte Bruer at utdanningsretta nevrovitenskap har blitt en slags metavitenskap, der brorparten av litteraturen består av enten framtidsløfter om eller advarsler mot anvendelse av hjerneforskning i klasserommet, i stedet for beskrivelser av faktiske anvendelser av hjerneforskning i klasserommet. Som han sier: "If bridges are built, there will be no need to argue about whether they can be built" (2016, s. 10).

Men argumentet mitt hviler hverken på at slike en-til-en-anvendelser eksisterer, eller at de i det hele tatt kan eksistere. Å lære om hjernens befatning med matematikk mener jeg vil ha en egenverdi for framtidige lærere, uavhengig av muligheten for nevrovitenskapelig funderte lærebøker og undervisningsopplegg. Resultater fra hjerneforskning belyser matematikkfaget fra ei ny og egenarta side. *Uten* dette perspektivet, som kun nylig er blitt mulig, går lærerstudenter glipp av ei viktig side ved matematikken som menneskelig aktivitet, og *med* dette perspektivet skapes en mer helhetlig forståelse for fagets epistemologi (hvordan lærer barn addisjon?) og ontologi (hva er et tall?). Slik sett burde lærerstudenter lære om hjernen dels av samme grunn som at de burde lære matematikkhistorie: Det setter matematikken i sammenheng. Både kunnskap om hjernens befatning med matematikk og kunnskap om de gamle grekernes tallbegrep vil bidra til å skape en mer komplett matematikklærer.

De siste tiårs resultater innen nevrovitenskap bekrefter i mange tilfeller læringsteoriene til Vygotsky og Piaget (Willis, 2010), så det å innlemme funn fra hjerneforskning i lærerutdanninga trenger på ingen måte å stå for et radikalt skifte i utdanningsfilosofi. I likhet med Ansari (2010) mener jeg at den beste og mest effektive måten å bringe nevrovitenskap inn i klasserommet på, er å utstyre lærere og framtidige lærere med tilgang til den kunnskapen som nevrovitenskapelige studier produserer. Denne kunnskapen vil utvide lærerstudentenes forståelse av det lærende barnet, og dermed prege deres pedagogiske tilnærming og praksis. Kan hende er det en overdrivelse når Dehaene skriver at "Just like a mechanic can diagnose an engine problem by visualizing the engine's operation, educators who can visualize how the child's brain works will, spontaneously, conceive better ways of teaching" (2011, s. 26), men det er min oppfatning at et studium av læring, som en lærerutdannelse er, burde øke forståelsen av det organet vi lærer med.

Innsikt i hjernens befatning med matematikk vil i tillegg gi lærerstudenter nye muligheter dersom de seinere vil skrive lærebøker eller utvikle spill, programvare eller lignende. Dette burde spesielt være relevant for lærerutdanninga i Norge, som i år går over fra ei fireårig lærerutdanning til en femårig master i utdanningsvitenskap.

Referenser

Agrillo, C., Piffer, L. & Adriano, A. (2013). Individual differences in non-symbolic numerical abilities predict mathematical achievements but contradict ATOM. *Behavioral and Brain Functions*, 9 (1), 26. doi:10.1186/1744-9081-9-26

Andres, M., Michaux, N. & Pesenti, M. (2012). Common substrate for mental arithmetic and finger representation in the parietal cortex. *Neuroimage,* 62 (3), 1520–1528. doi:10.1016/j.neuroimage.2012.05.047

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews: Neuroscience,* 9 (4), 278–291. doi:10.1038/nrn2334

Ansari, D. (2010). The computing brain. In D. A. Souza et al. (red.), *Mind, brain and education: neuroscience implications for the classroom* (pp. 200–225). Bloomington: Solution Tree Press.

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: a review of data and theory. *Cognition,* 44 (1–2), 75–106.

Ashcraft, M. H. & Faust, M. W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance – an exploratory investigation. *Cognition & Emotion,* 8 (2), 97–125. doi:Doi 10.1080/02699939408408931

Ashkenazi, S. & Danan, Y. (2017). The role of mathematical anxiety and working memory on the performance of different types of arithmetic tasks. *Trends in neuroscience and education,* 7, 1–10.

Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology,* 74 (3), 157–193. doi:10.1006/jecp.1999.2524

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J. & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* 102 (39), 14116–14121. doi:10.1073/pnas.0505512102

Bear, M. F., Connors, B. W. & Paradiso, M. A. (2016). *Neuroscience: exploring the brain* (Fourth edition. ed.). Philadelphia: Wolters Kluwer.

Berteletti, I., Man, G. & Booth, J. R. (2015). How number line estimation skills relate to neural activations in single digit subtraction problems. *Neuroimage,* 107, 198–206. doi:10.1016/j.neuroimage.2014.12.011

Bishop, D. V. (2010). Which neurodevelopmental disorders get researched and why? *PloS One,* 5 (11), e15112. doi:10.1371/journal.pone.0015112

Bjuland, R., Jakobsen, A. & Munthe, E. (2014). Muligheter og begrensninger for studenters læring i praksisopplæring – eksempel fra en førveiledningsdialog i matematikk. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 19 (1), 20.

Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review,* 123 (5), 600–612. doi:10.1037/rev0000025

Bruer, J. T. (1997). Education and the brain: a bridge too far. *Educational Researcher,* 26 (8), 4–16. doi:10.2307/1176301

Bruer, J. T. (2016). Where Is Educational Neuroscience? *Educational Neuroscience,* 1, 237761611561803. doi:10.1177/2377616115618036

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain.* London: Macmillan.

Butterworth, B. & Varma, S. (2013). Mathematical development. I D. Maureschal, B. Butterworth & A. Tolmie (red.), *Educational neuroscience* (pp. 201–236). Oxford: Wiley Blackwell.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J. & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biology*, 4 (5), e125. doi:10.1371/journal.pbio.0040125

Cooney, J. B., Swanson, H. L. & Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill – evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition and Instruction*, 5 (4), 323–345. doi:DOI 10.1207/s1532690xci0504_5

De Smedt, B. & Grabner, R. (red.). (2016). *Cognitive neuroscience and mathematics learning*. Berlin Heidelberg: Springer.

De Smedt, B., Holloway, I. D. & Ansari, D. (2011). Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency. *Neuroimage*, 57 (3), 771–781. doi:10.1016/j.neuroimage.2010.12.037

Dehaene , S. (2010). The calculating brain. I D. Sousa (Ed.), *Mind, brain, and education* (pp. 179_200). Bloomington: Solution Tree Press.

Dehaene, S. (2011). *The massive impact of literacy on the brain and its consequences for education*. Paper presented at the Pontifical Academy of Sciences, Vatican City.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics* (Rev. and updated ed.). New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33 (2), 219–250. doi:Doi 10.1016/S0010-9452(08)70002-9

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. & Spelke, E. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311 (5759), 381–384. doi:10.1126/science.1121739

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E. & Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, 320 (5880), 1217–1220. doi:10.1126/science.1156540

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14 (2), 218–224. doi:10.1016/j.conb.2004.03.008

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20 (3), 487–506. doi:10.1080/02643290244000239

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R. & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284 (5416), 970–974.

Dekker, S., Lee, N., Howard-Jones, P. & Jolles, J. (2012). Neuromyths in education: prevalence and predictors of misconceptions among teachers. *Frontiers in Psychology*, 3 (429). doi:10.3389/fpsyg.2012.00429

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A. et al., (2003). Learning complex arithmetic – an fMRI study. *Cognitive Brain Research*, 18 (1), 76–88. doi:10.1016/j.cogbraines.2003.09.005

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F. et al. (2005). Learning by strategies and learning by drill – evidence from an fMRI study. *Neuroimage*, 25 (3), 838–849. doi:10.1016/j.neuroimage.2004.12.009

Deligiannidi, K. & Howard-Jones, P. A. (2015). The neuroscience literacy of teachers in Greece. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 174, 3909–3915. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.1133

Eden, G. F., Jones, K. M., Cappell, K., Gareau, L., Wood, F. B. et al. (2004). Neural changes following remediation in adult developmental dyslexia. *Neuron*, 44 (3), 411–422. doi:10.1016/j.neuron.2004.10.019

Ferrero, M., Garaizar, P. & Vadillo, M. A. (2016). Neuromyths in education: prevalence among Spanish teachers and an exploration of cross-cultural variation. *Frontiers in Human Neuroscience*, 10 (496). doi:10.3389/fnhum.2016.00496

Gilmore, C. K. & Spelke, E. S. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107 (3), 932–945. doi:10.1016/j.cognition.2007.12.007

Goswami, U. (2006). Neuroscience and education: From research to practice? *Nature Reviews: Neuroscience*, 7 (5), 406–411. doi:10.1038/nrn1907

Grabner, R. H., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F. & Neuper, C. (2009). To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia*, 47 (2), 604–608. doi:10.1016/j.neuropsychologia.2008.10.013

Gross, H. J., Pahl, M., Si, A., Zhu, H., Tautz, J. & Zhang, S. W. (2009). Number-based visual generalisation in the honeybee. *PloS One*, 4 (1), e4263. doi:ARTN e426310.1371/journal.pone.0004263

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., Naiman, D. Q. & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 109 (28), 11116–11120. doi:10.1073/pnas.1200196109

Halberda, J., Mazzocco, M. M. M. & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths aschievement. *Nature*, 455 (7213), 665–U662. doi:10.1038/nature07246

Halberda, J. & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "number sense": the approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44 (5), 1457–1465. doi:http://dx.doi.org/10.1037/a0012682

Herculano-Houzel, S. (2002). Do you know your brain? A survey on public neuroscience literacy at the closing of the decade of the brain. *Neuroscientist*, 8 (2), 98–110. doi:10.1177/107385840200800206

Hermida, M. J., Segretin, M. S., Soni García, A. & Lipina, S. J. (2016). Conceptions and misconceptions about neuroscience in preschool teachers: a study from Argentina. *Educational Research*, 58 (4), 457–472. doi:10.1080/00131881.2016.1238585

Howard-Jones, P. (2010). *Introducing neuroeducational research: neuroscience, education and the brain from contexts to practice.* London: Routledge.

Howard-Jones, P., Franey, L., Mashmoushi, R. & Liao, Y. (2009, September). *The neuroscience literacy of trainee teachers.* Paper presented at the British Educational Research Association Annual Conference.

Howard-Jones, P. A., Varma, S., Ansari, D., Butterworth, B., De Smedt, B. et al. (2016). The principles and practices of educational neuroscience: comment on Bowers (2016). *Psychological Review*, 123 (5), 620–627. doi:10.1037/rev0000036

Immordino-Yang, M. H. & Faeth, M. (2010). The role of emotion and skilled intuition in learning. I D. A. Souza et al. (red.), *Mind, brain and education: neuroscience implications for the classroom* (pp. 69–84). Bloomington: Solution Tree Press.

Ischebeck, A., Zamarian, L., Siedentopf, C., Koppelstatter, F., Benke, T. et al. (2006). How specifically do we learn? Imaging the learning of multiplication and subtraction. *Neuroimage*, 30 (4), 1365–1375. doi:10.1016/j.neuroimage.2005.11.016

Izard, V., Dehaene-Lambertz, G. & Dehaene, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS Biology*, 6 (2), e11. doi:10.1371/journal.pbio.0060011

Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S. & Dehaene, S. (2011). Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 108 (24), 9782–9787. doi:10.1073/pnas.1016686108

Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S. & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 106 (25), 10382–10385. doi:10.1073/pnas.0812142106

Jost, K., Khader, P., Burke, M., Bien, S. & Rosler, F. (2009). Dissociating the solution processes of small, large, and zero multiplications by means of fMRI. *Neuroimage*, 46 (1), 308–318. doi:10.1016/j.neuroimage.2009.01.044

Jost, K., Khader, P. H., Burke, M., Bien, S. & Rosler, F. (2011). Frontal and parietal contributions to arithmetic fact retrieval: a parametric analysis of the problem-size effect. *Human Brain Mapping*, 32 (1), 51–59. doi:10.1002/hbm.21002

Kant, I., Serck-Hanssen, C., Mathisen, S. & Skar, Ø. (2005). *Kritikk av den rene fornuft*. Oslo: Boklubben.

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V. & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science*, 324 (5934), 1583–1585. doi:10.1126/science.1171599

Kounios, J., Fleck, J. I., Green, D. L., Payne, L., Stevenson, J. L. et al. (2008). The origins of insight in resting-state brain activity. *Neuropsychologia*, 46 (1), 281–291. doi:10.1016/j.neuropsychologia.2007.07.013

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schonmann, C. et al, (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, 5 (3), 782–795. doi:10.1016/j.neuroimage.2011.01.070

Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Dosch, M., Martin, E. & von Aster, M. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: a functional MRI study. *Behavioral and Brain Functions*, 2, 31. doi:10.1186/1744-9081-2-31

Landerl, K., Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition*, 93 (2), 99–125. doi:10.1016/j.cognition.2003.11.004

Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V. & Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: neuroanatomical correlates. *Brain Research*, 1155, 163–171. doi:10.1016/j.brainres.2007.04.040

Lee, K. M. (2000). Cortical areas differentially involved in multiplication and subtraction: a functional magnetic resonance imaging study and correlation with a case of selective acalculia. *Annals of Neurology*, 48 (4), 657–661.

Lemer, C., Dehaene, S., Spelke, E. & Cohen, L. (2003). Approximate quantities and exact number words: dissociable systems. *Neuropsychologia*, 41 (14), 1942–1958.

Ludvigsenutvalget. (2015). *NOU 2015:8 Fremtidens skole – fornyelse av fag og kompetanser.* Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

McCrink, K. & Spelke, E. S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition*, 116 (2), 204–216. doi:10.1016/j.cognition.2010.05.003

McCrink, K. & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, 142, 66–82. doi:10.1016/j.jecp.2015.09.015

McCulloch, W. S. (1960). What is a number, that a man may know it, and a man, that he may know a number? *General Semantics Bulletin*, 26/27, 7–18.

Menon, V. (2010). Developmental cognitive neuroscience of arithmetic: implications for learning and education. *ZDM*, 42 (6), 515–525. doi:10.1007/s11858-010-0242-0

Miller, K. F. & Paredes, D. R. (1990). Starting to add worse: effects of learning to multiply on children's addition. *Cognition*, 37 (3), 213–242.

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J. & Nuerk, H.-C. (2011). Effects of finger counting on numerical development – the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, 2, 328. doi:10.3389/fpsyg.2011.00328

Mussolin, C., Noël, M.-P., Pesenti, M., Grandin, C. & De Volder, A. G. (2013). Neural correlates of the numerical distance effect in children. *Frontiers in Psychology*, 4, 663. doi:10.3389/fpsyg.2013.00663

Nieder, A. (2013). Coding of abstract quantity by "number neurons" of the primate brain. *Journal of Comparative Physiology a-Neuroethology Sensory Neural and Behavioral Physiology*, 199 (1), 1–16. doi:10.1007/s00359-012-0763-9

Nieder, A. & Miller, E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude: compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37 (1), 149–157.

Noel, M. P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11 (5), 413–430. doi:10.1080/09297040590951550

Park, J. H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16 (3), 763–773. doi:Doi 10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Pei, X., Howard-Jones, P. A., Zhang, S., Liu, X. & Jin, Y. (2015). Teachers' understanding about the brain in East China. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 174, 3681–3688. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.1091

Penner-Wilger, M. & Anderson, M. L. (2013). The relation between finger gnosis and mathematical ability: why redeployment of neural circuits best explains the finding. *Frontiers in Psychology*, 4, 1–9. doi:ARTN 877 10.3389/fpsyg.2013.00877

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S. et al. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116 (1), 33–41. doi:10.1016/j.cognition.2010.03.012

Piazza, M. & Izard, V. (2009). How humans count: numerosity and the Parietal Cortex. *Neuroscientist*, 15 (3), 261–273. doi:10.1177/1073858409333073

Posner, M. I. (2010). Neuroimaging tools and the evolution of educational neuroscience. I D. A. Souza et al. (red.), *Mind, brain and education: neuroscience implications for the classroom* (pp. 27–44). Bloomington: Solution Tree Press.

Price, G. R., Holloway, I., Rasanen, P., Vesterinen, M. & Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, 17 (24), R1042–1043. doi:10.1016/j.cub.2007.10.013

Rapin, I. (2016). Dyscalculia and the calculating brain. *Pediatric Neurology*, 61, 11–20. doi:10.1016/j.pediatrneurol.2016.02.007

Reigosa-Crespo, V., Valdes-Sosa, M., Butterworth, B., Estevez, N., Rodriguez, M. et al. (2012). Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: the Havana survey. *Developmental Psychology*, 48 (1), 123–135. doi:10.1037/a0025356

Roland, P. E. & Friberg, L. (1985). Localization of cortical areas activated by thinking. *Journal of Neurophysiology*, 53 (5), 1219–1243.

Rotzer, S., Kucian, K., Martin, E., von Aster, M., Klaver, P. & Loenneker, T. (2008). Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, 39 (1), 417–422. doi:10.1016/j.neuroimage.2007.08.045

Shaywitz, B. A., Shaywitz, S. E., Blachman, B. A., Pugh, K. R., Fulbright, R. K. et al. (2004). Development of left occipitotemporal systems for skilled reading in children after a phonologically-based intervention. *Biological Psychiatry*, 55 (9), 926–933. doi:10.1016/j.biopsych.2003.12.019

Sousa, D. (2010). How science met pedagogy. I D. A. Souza et al. (red.), *Mind, brain and education: neuroscience implications for the classroom* (pp. 9–26). Bloomington: Solution Tree Press.

Starkey, P. & Cooper, R. G., Jr. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210 (4473), 1033–1035.

Susac, A. & Braeutigam, S. (2014). A case for neuroscience in mathematics education. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 314. doi:10.3389/fnhum.2014.00314

Willis, J. (2010). The current impact of neuroscience on teaching and learning. I D. A. Souza et al. (red.), *Mind, brain and education: neuroscience implications for the classroom* (pp. 45–68). Bloomington: Solution Tree Press.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358 (6389), 749–750. doi:10.1038/358749a0

Zamarian, L., Ischebeck, A. & Delazer, M. (2009). Neuroscience of learning arithmetic – evidence from brain imaging studies. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 33 (6), 909–925. doi:10.1016/j.neubiorev.2009.03.005

Jan Roksvold

Jan Roksvold er førsteamanuens i matematikkdidaktikk ved UiT Norges arktiske universitet. Hans forskningsinteresser omfatter anvendelse av funn fra kognitiv psykologi i matematikkundervisning, hjernens befatning med matematikk, samt bruk av matematikkhistorie og historiefortelling i undervisning.

jan.n.roksvold@uit.no

Abstract

Concrete applications of neuroscience to the classroom are yet to be confirmed. The topic of this research article is the potential gains to be had for trainee teachers in knowing about various topics concerning the brain's processing of numbers and arithmetic – regardless of whether one-to-one applications exist or can exist. Highlighted as potentially valuable to teachers, is knowledge about: the dichotomy between an inborn "number sense" and a culturally and educationally dependant exact number system; how different binary operations are processed; how learning strategy can affect the encoding of arithmetic facts; the difficulties caused by an associative memory in relation to arithmetic tables; the child's "logarithmic inner number line"; dyscalculia, and the neuromyth pertaining to it. I conclude that this type of knowledge will expand trainee teachers' understanding of the learning child, and thereby possibly influence their practice.