

# Matematikdidaktik – nordiskt samarbete i historisk belysning

Bengt Johansson

I denna artikel ges en översiktlig beskrivning av hur nordiskt samarbete i matematikämnets didaktik växt fram, speciellt under de senaste 30 åren. Samarbetet har utvecklats vid matematiklärarmöten och i samband med det omfattande internationella reformarbete som startade kring 1960. Tidskrifter om matematik och matematikundervisning har haft en särskilt viktig roll i denna utveckling. Efter en nedgång under 1970-talet och början av 80-talet har det nordiska samarbetet åter börjat växa i styrka. Senaste exemplen på detta är denna tidskrift och ett allt intensivare samarbete mellan forskare och lärarutbildare i matematikämnets didaktik.

## Från utbildning för ett fåtal till en skola för alla

Redan under renässansen fanns det på många platser i Europa en relativt väl fungerande utbildning i tillämpad aritmetik och geometri för den som hade möjlighet att studera. Den första tryckta räkneläran utkom tex i Italien redan 1478 och i Venedig gavs den första tryckta upplagan av Euklides Elementa ut 1482 (Swetz, 1987). Men det var först i mitten av 1500-talet som vi i Norden fick till stånd en motsvarande utbildning av nämnvärd omfattning (Hollander, 1884; Lindroth, 1975). Det var också då vi fick de första tryckta räkneläror på nordiska språk (Hultman, 1868; Dahlin, 1875; Dahlbo, 1897; Larsen, 1952). De första läroböckerna i decimaltalsräkning och algebra på svenska trycktes i mitten av 1600-talet. De nordbor som tidigt studerade matematik var i de flesta fall hänvisade till arbeten på latin och reste ofta ut i Europa på omfattande studieresor till olika universitet och lärosäten, främst till Tyskland men också till Frankrike, Italien och England.

Under 1600-talet och början av 1700-talet utvecklades matematikundervisningen i Norden vid fler och fler nya läroverk, gymnasier och universitet som en del av ett kulturellt uppbyggnadsarbete utan motstycke i de nordiska ländernas historia. Kunskaper om matemati-

---

**Bengt Johansson** är lektor i matematikämnets didaktik vid Avdelningen för matematik, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet, Sverige.

kens fantastiska utveckling nådde allt snabbare våra universitet. Den pedagogiska debatten och det pedagogiska experimenterandet under upplysningstiden ledde till att kvaliteten på utbildningen förbättrades. Under 1700-talet och början av 1800-talet framträder också de första matematikerna i Norden som kunde mäta sig med de främsta i Europa (Lindroth, 1975; Bekken, 1992).

Med början i 1800-talets första del blev grundläggande utbildning successivt obligatorisk för alla medborgare i Norden. I läroplanerna för de nya folkskolorna bestod matematikämnet av räkning och geometri. Under 1800-talets andra hälft publicerades de första större arbetena i matematikmetodik i Norden – en naturlig följd av den nya och stora utmaningen att försöka lära alla medborgare grundläggande matematik. I denna litteratur finner vi några av rötterna till matematikämnets didaktik som kunskapsområde (Johansson & Wistedt, 1991). Under denna tid utvecklas också den första egentliga lärarutbildningen.

### **Matematiklärarmöten**

Nordiskt samarbete och erfarenhetsutbyte kring folkskolans matematikundervisning växte sakta fram under 1800-talets andra hälft, mycket tack vare föreläsningar och diskussioner vid de allmänna nordiska lärarmötena. Speciella möten för matematiklärare började organiseras betydligt senare. I Sverige bildades t ex Föreningarna för matematisk-naturvetenskaplig undervisning (FMNU – senare LMFK) 1933. På föreningarnas årsmöten fanns ofta deltagare från övriga nordiska länder. Ett mera organiserat samarbete mellan lärare i matematik i Norden startade först på 1950-talet – om man undantar de skandinaviska matematikerkongresserna som startade redan 1909. Den första nordiska kongressen för matematik-, fysik- och kemilärare ägde rum den 7-10 augusti 1951 i Åbo (Lindholm, 1991). De har sedan dess arrangerats regelbundet vart 3:e år. Den 15:e nordiska LMFK-kongressen ägde nyligen rum i Aarhus i Danmark, den 27-31 juli 1993.

### **Ett utvecklat samarbete**

När det offentliga utbildningsväsendet successivt byggdes ut under mellankrigstiden och under tiden efter andra världskriget kom samarbete kring matematikdidaktiska frågor till stånd mellan flera pedagogikforskare i Norden. Studierna gällde bl a elevernas räknefärdigheter och hängde samman med det stora intresset för skolmognad,

begåvning, differentiering, betyg och urval till högre utbildning (se t ex Østlyngen, 1944; Meyer et al, 1951). Det kom att dröja till 1960 innan vi fick ett samnordiskt utvecklingsarbete i matematikdidaktik av någon större omfattning. Men då blev det också desto större! Impulsen kom från den berömda OEEC-konferensen *New thinking in school mathematics* 1959 på Royaumont utanför Paris där representanter från de nordiska länderna deltog.

Samarbetet kom främst att gälla mål- och metodfrågor och en omfattande utveckling och utprövning av elev- och lärartexter. Det berörde matematikämnet i hela det offentliga skolväsendet och var som mest intensivt under de första 5-6 åren men pågick i olika former och med delvis förändrad målsättning under större delen av 70-talet. Arbetet utfördes i huvudsak inom ramen för Nordiska rådet och Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete – först i form av Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen (NKMM), därefter i Matematikundervisningens nordiska kommitté (MUNK) och slutligen med hjälp av sakkunniga och olika refererens- och arbetsgrupper. (Nordisk utredningsserie 1967:9; Mellin-Olsen, 1970; Nordisk utredningsserie 1971:2; Nordisk utredningsserie 1973:17; Gjone, 1985). Denna intensiva fas av nordiskt samarbete avslutades 1977-78 (Nordisk utredningsserie 1977:20; Nämnaren Temanummer: Individualisering av matematikundervisningen, 1978). Även inom det svenska IMU-projektet utvecklades ett nära samarbete över nationsgränserna vilket så småningom fick stora konsekvenser på läromedelssidan (Larsson, 1973).

För att försöka hålla liv i det nordiska samarbetet när det successivt avtog under 70-talet anordnades på danskt och svenskt initiativ en nordisk konferens om matematikundervisning i Kungälv 1975. Den har sedan upprepats med jämna mellanrum. Den 6:e i ordningen, Nordisk konferens om matematikdidaktik, hölls nyligen i Åbo i Finland, den 9-12 augusti 1993. Från och med den tredje konferensen, som ägde rum i Island 1983, fick arrangörerna inte som tidigare stöd från Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete (Kristjánsdóttir, 1983). Konferenserna har sedan dess arrangerats helt på initiativ från enskilda matematikdidaktiker.

## **Tidskrifter om matematik och matematikundervisning**

Tidskrifter som behandlade den elementära matematiken och tillhörande undervisningsfrågor grundades tidigt i Norden. Den danska *Matematisk Tidsskrift* kom redan 1859, de svenska *Tidskrift för Matematik och Fysik*, 1868 och *Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi - Elementa*, 1917, den norska *Norsk Matematisk Tid-*

*skrift*, 1919 samt de finska *Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja*, 1936 och *Arkhimedes*, 1949. Ingen av dessa var emellertid någon samnordisk tidskrift. Efter beslut i de nationella föreningarna för matematik och matematikundervisning i Norden grundades 1953 två nya samnordiska tidskrifter i matematik, *Mathematica Scandinavica* för vetenskapliga arbeten i matematik och *Nordisk Matematisk Tidsskrift* för elementär matematik och tillhörande undervisningsfrågor. Samtidigt upphörde de ovan nämnda danska (som bytte namn ett flertal gånger) och norska tidskrifterna. Den svenska tidskriften från 1868 upphörde redan 1874. Övriga tidskrifter ges fortfarande ut.

De senaste 20 åren har flera nya tidskrifter startats i Norden. Målgruppen är i första hand lärare och lärarutbildare i matematik: Den danska *Matematik* (1973 -), den svenska *Nämnnaren* (1974 -), den finska *Dimensio* (1986 -) (en fortsättning på *Matemaattisten Ainedeiden Aikakauskirja*), den norska *Tangenten* (1990 -) och helt nyligen den isländska *Flatar mál* (1993-). Dessa tidskrifter är inte uttalat samnordiska men speciellt *Nämnnaren* och *Tangenten* innehåller ofta flera bidrag och ibland hela temanummer om nordisk skolmatematik (se t ex *Nämnnaren* Årg 10, nr 2, Tema: *Nordiska bilder*).

För forskningen i matematik i Norden betydde grundandet av tidskriften *Acta Mathematica* 1882 nya möjligheter till samarbete och utveckling. I detta sammanhang vill jag också nämna *Bibliotheca Mathematica*, det bibliografiska appendix till *Acta Mathematica* som Gustaf Hjalmar Eneström grundade 1884. Appendixet blev 1887 en fristående tidskrift och kom att utges i sammanlagt 30 volymer (Hagstroem, 1953). Den behandlade matematikens kulturhistoria och det matematiska tänkandets utveckling. Intresset för Eneströms tidskrift var dock mycket svagt i Norden och han fick mycket lite stöd i sina försök att införa matematikens kulturhistoria i universitetens grundkurser i matematik.

De många lärartidningar som kommit ut i våra nordiska länder sedan andra halvan av 1800-talet har säkert också spelat en viktig roll för matematikundervisningens utveckling i Norden. Vid en genomgång som jag gjort av svenska lärartidningar från 1881 och framåt fann jag drygt 3000 artiklar och notiser om matematikundervisning!

### **Nytt liv i det nordiska samarbetet**

Med hjälp av aktiviteter som t ex de svenska matematikbiennalerna har kontakterna mellan lärare, lärarutbildare och didaktiker i matematik i Norden ökat igen under 80-talet. Samtidigt deltar fler och fler matematikdidaktiker allt flitigare i ett vidare internationellt samarbete.

Under de allra senaste åren har också kontakterna stärkts mellan nordiska forskare och forskarstuderande i matematikämnets didaktik. Detta har skett parallellt med att matematikämnets didaktik börjat etablera sig vid våra universitet och högskolor som ett självständigt kunskaps- och forskningsfält med egna ämnesföreträdare. Här har det danska *Statens Humanistiske Forskningsråd*, *Initiativet Matematikundervisning og Demokrati* haft särskilt stor betydelse. Under ledning av den danska projektgruppen och med hjälp av kontaktpersoner från de övriga nordiska länderna har ett nordiskt forskarnätverk byggts upp (se Nissen i detta nummer). Det fungerar nu som stöd för intresserade master- och forskarstuderande i matematikämnets didaktik. Flera seminarier och forskarkurser har hållits och flera står på tur. (Information om nätverkets olika aktiviteter publiceras i ett särskilt Nyhetsbrev som kan beställas från Morten Blomhøj, IMFUFA, Roskilde universitetcenter, Postbox 260, DK-4000 Roskilde, Danmark). Genom den starka ställning som danska matematikdidaktiker sedan länge haft i internationella intresseorganisationer och projekt har det danska initiativet blivit särskilt värdefullt för matematikdidaktiker i de övriga nordiska länderna.

### **Aktuell forskning i matematikämnets didaktik**

De senaste åren har matematikdidaktiker i flera olika länder tagit fram beskrivningar av pågående forskning i matematikämnets didaktik. (se t ex Barra, 1992; Kieran, 1992). En kartläggning av svenskt forsknings- och utvecklingsarbete genomfördes för ett par år sedan (Johansson, 1991). En första version av en sammanställning av aktuell matematikdidaktisk forskning i Norden presenterades nyligen av Johansson (1993).

I Danmark har det t ex utvecklats en stark tradition kring studier av relationer mellan matematikundervisningens teori och praktik. Den har bl a tagit sig uttryck i forskning om tillämpad matematik och modellering i matematikundervisningen. Under de senaste åren har man också studerat matematikens och matematikundervisningens ställning i samhället, motiven för undervisning i matematik i historisk belysning och grundläggande frågor om matematikämnets didaktik som akademisk disciplin; dess avgränsning, vetenskapsteoretiska karaktär och samhällsmässiga funktioner.

I Finland har flera forskare intresserat sig för vilka konsekvenser som konstruktivismen kan och bör få för matematikundervisningens innehåll och praktik och för olika aktiviteter och arbetsformer som t ex projektarbete. Man har vidare studerat lärares och elevers

uppfattningar och tänkande inom ämnesområden som geometri och funktionslära men också elevernas känslor, attityder och tilltro till sin egen förmåga att lära matematik i olika utbildningssituationer. Flera projekt arbetar med utvärdering, bl a kring effekten av kursplaneförändringar i matematik.

I Island har man bedrivit studier kring den nya teknologins konsekvenser för matematikinläring och komparativa studier av elevers och vuxnas matematikkunskaper och attityder. Man har också studerat nya former för lärarutbildning i matematik.

I Norge har forskningen omfattat studier av skolmatematik och matematikutbildning i ett skolpolitiskt perspektiv. Man har också intresserat sig för lärares uppfattningar av matematik och matematikundervisning och vad som styr lärarens arbete i klassrummet. Flera projekt har berört norskt kursplanearbete och utvärdering i matematik, grundläggande begreppsbyggnad i matematik och vad som händer när eleverna får ett ökat ansvar för sin egen matematikinläring.

I Sverige har flera projekt studerat olika sidor av elevernas komplexa kunskaper och färdigheter i matematik med betoning på begreppsbyggnad, uppfattningar och tänkande i grundläggande aritmetik. Man har också studerat elever med särskilda inlärningssvårigheter i matematik, de tekniska hjälpmedlens konsekvenser för matematikundervisningens innehåll och praktik samt det matematiska sympolspråkets form och funktion. Under de senaste åren har det bedrivits omfattande studier kring kunskapsbyggnadens villkor i skolan som lärmiljö och kring problemlösning utifrån ett kommunikationsteoretiskt perspektiv.

Det är vår ambition att återkomma i senare nummer av denna tidskrift med mera utförliga beskrivningar av den pågående forskningen i matematikämnets didaktik i Norden.

Artikeln bygger på ett bidrag presenterat vid den 6:e Nordiska konferensen om matematikdidaktik, Åbo, Finland, 9-12 augusti 1993. För värdefulla synpunkter på tidigare versioner av denna artikel tackar jag Göran Emanuelsson.

## Referenser

- Barra, M., Ferrari, M., Furinghetti, F., Malara, N., & Speranza, F. (Eds.) (1992). *The Italian research in mathematics education: Common roots and present trends*. Modena, Italy: Dipartimento di Matematica, Università Modena.
- Bekken, O. (1992). Niels Henrik Abel (1802-1829): A tribute. In O. Bekken, J. Fauvel, B. Johansson, & F. Swetz (Eds.), *Learn from the masters! Proceeding of the Kristiansand conference on the history of mathematics and its place in teaching*. Kristiansand, Norway, August, 1988. Harrisburg, PA: The Pennsylvania State University.
- Dahlbo, J. (1897). *Upprättning till matematikens historia i Finland från äldsta tider till stora ofreden*. Akademisk avhandling. Nikolaistad: Kejsarliga Alexanders-Universitetet.

- Dahlin, E.M. (1875). *Bidrag till de matematiska vetenskapernas historia i Sverige före 1679*. Akademisk avhandling: Uppsala: Uppsala Universitet.
- Gjone, G. (1985). "Moderne matematikk" i skolen. *Internasjonale reformbestrebelse og nasjonalt læreplanarbeid. Bind I och II*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Hagstroem, K-G. (1953). Gustaf Eneström. Till hundraårsminnet av hans födelse. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, **10**, 145-155.
- Hollander, A. G. (1884). *Svenska undervisningens historia*. Uppsala: Samson & Wallin
- Hultman, F. (1868-71, 1874). Svenska aritmetikens historia. I G. Dillner, F. Hultman, & T. Thalén (Red), *Tidskrift för matematik och fysik*.
- Johansson, B. (1991). Forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik i Sverige. *Nämnamnaren*, **18** (3/4), 47-53.
- Johansson, B., & Wistedt, I. (1991). Undervisning om tal och räkning - ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson, & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 1* (s 28-44). Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, B. (1993). *Nordisk matematikdidaktisk forskning i dag. En kartläggning mot en historisk bakgrund*. Bidrag presenterat vid den 6:e Nordiska konferensen om matematikdidaktik, Åbo, Finland, 9-12 augusti, 1993.
- Kieran, C., & Dawson, A.J. (Eds.) (1992). *Current research on the teaching and learning of mathematics in Canada*. Quebec: Canadian Mathematics Education Study Group.
- Kristjánsdóttir, A. (1983). Matematik som et selvstændigt fag og integreret i en større helhed. Rapport från en nordisk konferens om matematik i Fludir, Island, 19-24 juni 1983. *Nämnamnaren*, **10**(2)Tema: Nordiska bilder, 6-8.
- Larsen, L. (1952). Træk af regnekunstens historie i Danmark. *Matematisk Tidsskrift* **A**(1-21).
- Larsson, I. (Red) (1973). *Individualiserad matematikundervisning: En bok om IMU-projektet* (Pedagogisk orientering och debatt 43). Malmö: Hermods.
- Lindholm, H. (1991). Föreningarna för matematik-naturvetenskaplig undervisning. *Årsböcker i svensk undervisningshistoria nr 167*. Uppsala: Föreningen för svensk undervisningshistoria.
- Lindroth, S. (1975 - 81). *Svensk lärdomshistoria 1-4*. Stockholm: Norstedts.
- Mellin-Olsen, S. (1970). *Undervisningsprosjekter i matematikk*. (Rapport til Matematikundervisningens Nordiske Komité). Oslo: Universitetsforlaget.
- Mellin-Olsen, S. (1993). Et nordisk forskningstidskrift for matematikk fagdidaktikk. *Tangenten*, **4**(2), 18.
- Meyer, H., & Gregersen, T. (Red) (1951). Skolemodenhedsproblemer. 15 artikler av nordiske forfattere. *Psykologisk-Pædagogisk Bibliotek. Bind XIII*. København: Ejnar Munksgaard.
- Nissen, G. (1993). Nordisk forskernetværk. *Nordisk matematikdidaktik*, **1**(1), 59-62.
- Nordisk utredningsserie 1967:9*. Nordisk skolmatematik. København: Nordiska rådet och Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete.
- Nordisk utredningsserie 1971:02*. Harmonisering av matematikundervisningen i åk. 1-6 i de nordiska länderna. København: Nordiska rådet och Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete.
- Nordisk utredningsserie 1973:17*. Harmonisering av den obligatoriska undervisningen i matematik i de nordiska länderna. København: Nordiska rådet och Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete.
- Nordisk utredningsserie 1977:20*. Individualisering av matematikundervisningen. København: Nordiska rådet och Sekretariatet för nordiskt kulturellt samarbete.
- Nämnamnaren* **38**, (1978). Temanummer: Individualisering av matematikundervisningen.
- Swetz, F. (1987). *Capitalism & Arithmetic. The New Math of the 15th Century*. La Salle, Illinois: Open Court.
- Østlyngen, E. (1944). Standpunktmåling i regning i de nordiske land. *Serprent av Norsk Pedagogisk Årbok for 1943-44*.

---

Bengt Johansson, lektor  
 Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik  
 Box 1010  
 S-431 26 Mölndal, Sverige