# Elevers svårigheter att formulera matematiska problem

Inger Wistedt

Artikeln syftar till att belysa svårigheter som elever ställs inför när de ska tolka och förstå matematiska skoluppgifter och hur pedagogiska ingripanden kan bidra till att överbrygga dessa svårigheter. Artikeln bygger på material samlat inom projektet ”Vardagskunskaper och skolmatematik”, ett material som består av bandinspelningar av lektionstillfällen då elever och lärare i grupp löser givna uppgifter. I artikeln fokuseras det personliga meningssammanhang – den kognitiva kontext – som elever skapar när de löser matematikuppgifter i skolan. Fyra begrepp introduceras, som karakteriserar kontextualiseringar av olika slag – kontextdominans, kontextuell osäkerhet, kontextuell medvetenhet och kontextpreferens. Med hjälp av dessa begrepp beskrivs hur elever och lärare förhåller sig vid tolkningen av en given uppgift och vad förhållningssättet betyder för deras möjligheter att förstå uppgiftens matematiska innehåll. Resultaten visar att elever, liksom lärare, kan ha svårt att se och acceptera en matematisk tolkning av uppgiften och att en undervisning, som syftar till att hjälpa eleven att nå generaliserbar kunskap, måste beakta elevens förståelse av uppgiften och de regler som eleverna tillämpar vid kontextualiseringen. Dessa regler kan artikuleras och synliggöras i kommunikation med andra och resultaten visar hur elever, som tvingas argumentera för en personlig lösning av en uppgift, kan nå en djupare förståelse av det egna tänkandet.

## Inledning

Under senare år har forskare ägnat stort intresse åt att beskriva den matematiska kompetens som människor använder i olika vardagliga sammanhang och hur den förhåller sig till kunskaper och färdigheter som förvärvas i skolan. Inom ett forskningsfält, etnomatematiken, studeras räknestrategier och tankemodeller som individer utvecklar inom ramen för en bestämd och avgränsad social praktik, t ex inom en yrkeskår (Scribner, 1984; Saxe, 1988) en etnisk grupp (t ex Lancy, 1983) eller inom ramen för en vardaglig syssla (t ex Lave et al, 1984) och ofta har forskarna kunnat visa på det bristande sambandet mellan en informell kompetens och den som efterfrågas och används i formella utbildningssammanhang (Marton, 1986). Inom fackdidaktiken har forskare beskrivit relationen mellan elevers common sense-föreställningar, deras ”uppfattningar” (Marton, 1981) eller

---

**Inger Wistedt** är fil dr och forskarassistent vid Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet, Sverige.

”alternativa referensramar” (Pfundt & Duit, 1991) och begrepp som presenteras i undervisningen (a.a.; se även Hughes, 1986). Forskarna framhåller då ofta värdet av att utgå från elevernas erfarenheter i undervisningen, men visar samtidigt att det informella kunnandet kan vara en bräcklig grund för inlärning i skolan. Människors spontant utvecklade föreställningar skiljer sig inte sällan radikalt från de uppfattningar som läggs fram i undervisningen och föreställningarna visar sig också vara svåra att påverka genom utbildning (se t ex Kahneman & Tversky, 1982; Gentner & Stevens, 1983; Brook et al, 1984). Begrepp och tankemodeller som med framgång används i ett visst tillämpningssammanhang kan inte enkelt generaliseras och överföras till nya situationer; ofta stannar kunskaperna inom gränserna för den ursprungliga lärsituationen; vardag och vetenskap blir skilda kontexter för tänkandet (Solomon, 1986; Säljö, 1989; Halldén, 1991).

Forskningsresultaten har givit upphov till en förnyad teoretisk diskussion om hur formell inlärning förhåller sig till spontan utveckling (se t ex Liben, 1987; Halldén & Caravita, in press). Synen på inlärning som begreppsförändring, där spontant bildade begrepp tänks genomgå en process av förändring eller förädling i utbildningen, har mött kritik. Invändningar har bl a formulerats utifrån en kontextuell syn på lärandet, där föreställningar och uppfattningar ses som funktionella i vissa givna sammanhang (Säljö, 1991; Wistedt, 1987). Enligt en sådan syn skulle inlärning inte innebära att elever överger sina vardagsbegrepp, ”byter upp sig”, när de möter en ny och främmande begreppsvärld. Inlärning skulle istället kunna beskrivas som en decentreringsprocess[1] i vilken elever etablerar en medvetenhet om skilda kunskapsvärldar och utvecklar sin kognitiva repertoar så, att det blir möjligt att överbrygga avståndet mellan dem.

Vilka förutsättningar gäller för att elever ska kunna skapa sådana bryggor mellan kunnandet som de redan har förvärvat och stoffet som de förväntas lära in? Frågan har legat till grund för ett forskningsprojekt, ”Vardagskunskaper och skolmatematik” (Wistedt et al, 1992, 1993), där fyra medarbetare - en pedagog, en lärarutbildare och två matematiker - studerat hur elever och lärare på grundskolans mellanstadium ”vardagsanknyter” matematiken, dvs knyter stoffet

---

[1] Begreppet ”decentrering” är hämtat från Piaget (1975) och ställs i hans teori i motsats till ett ”centrerat” (i tidigare skrifter ”egocentrerat”) tänkande, d v s ett tänkande som inte kan frigöras från ett subjektivt perspektiv. En sådan subjektiv utgångspunkt gör assimilationen snedvriden och någon verklig jämvikt mellan ackommodation och assimilation kan inte uppnås; kunskapen om verkligheten kan därmed inte i grunden förbättras genom att individen tillförs mer information (se Donaldson (1978), Halldén (1991)).

[2] För en diskussion av begreppet ”vardagsanknytning”, se Wistedt, et al (1992).

till elevernas erfarenheter[2]. I den här artikeln diskuteras några av resultaten från projektet. Syftet är att belysa vissa svårigheter som elever ställs inför när de ska formulera matematiska problem i skolan och vad pedagogiska ingripanden kan betyda för att överbrygga dessa svårigheter.

## Vardagskunskaper och skolmatematik

Resultaten från projektet ”Vardagskunskaper och skolmatematik” visar att ”vardagsanknytning”, i meningen anknytning till välkända *situationer* där matematiska tillämpningar förekommer, inte självklart hjälper eleverna att nå matematiken. Tvärtom, och litet paradoxalt, tycks det vara så, att om sammanhanget är välbekant för eleverna ökar risken för att de missar just de *matematiska* poängerna i uppgiften. Om de ska utveckla sitt matematikkunnande måste de bortse från en rad bekanta detaljer i skolexemplen för att ägna sin uppmärksamhet åt deras abstrakta innehåll. De behöver, kort sagt, kunna skilja mellan olika perspektiv som kan läggas på en uppgift.

Nu kan vi inte förutsätta att alla elever har utvecklat en sådan medvetenhet om alternativa tolkningsmöjligheter. I slutrapporten från projektet redovisas två empiriska exempel, där elever och lärare löser uppgifter som kan förstås på fler än ett sätt. Exemplen visar hur vissa elever kan fastna i en vardagsnära tolkning av uppgiften; de formulerar praktiska snarare än matematiska syften för sitt arbete. Studien visar att detsamma gäller lärare, som också kan ha svårt att växla mellan olika perspektiv på den givna uppgiften. En svårighet för elever (och lärare) är m a o att se och acceptera en matematiskt relevant tolkning av uppgiften[3].

## Att kontextualisera en uppgift

Hur kan vi förstå att vissa individer har stora svårigheter ge uppgifter en matematisk tolkning medan andra inte har det? Ett sätt att förstå skillnaden är att se den som uttryck för olika grad av förtrogenhet med det sociala sammanhang som skolan utgör. I en serie studier har Säljö och Wyndhamn beskrivit skolan som kontext för det matematiska tänkandet (Säljö & Wyndhamn, 1987, 1988a, 1988b, 1988c, 1990). Undervisningen beskrivs som en specifik social praktik där elever som förstår reglerna för denna praktik också har förutsättningar att förstå uppgifternas institutionella innebörd. Elever som tillämpar sin

---

[3] Elevers svårigheter att kontextualisera en skoluppgift diskuteras också av Halldén (in press) med exempel från ämnet historia.

egen oreflekterade förståelse när de löser skolans uppgifter kan lätt missa de institutionellt relevanta tolkningarna och kommer, något oegentligt, att bedömas som svagpresterande i det ämne som uppgifterna avser (Säljö, 1989).

Ett annat sätt att förstå skillnaden är att beakta de regler som eleverna själva tillämpar när de löser uppgiften, regler som kan fjärma sig mer eller mindre från de institutionella konventionerna. Skillnaderna i förståelse av en given uppgift skulle då ha sin grund i elevers personliga sätt att kontextualisera uppgiften. Med "kontext" avses då inte det sociala eller institutionella sammanhang som eleverna befinner sig i utan den *kognitiva kontext* som de skapar när de löser en given uppgift (jfr Cobb, 1990).

I det förra fallet ger vi en situationell beskrivning av kontexten, i det senare en intentionell. I båda fallen är det *syftet* för verksamheten som begränsar och definierar sammanhanget. Vid en situationell beskrivning är det undervisningssyftet (det institutionella meningssammanhanget) som avgör vad som blir figur och grund när forskaren tolkar data, vid en intentionell är det inlärningssyftet (det personliga meningssammanhanget) som definierar vad som kommer att stå i fokus för beskrivningen. Perspektiven kan sägas vara komplementära i det att de lyfter fram olika aspekter av sambandet mellan kontext och förståelse.

I den här artikeln fokuseras det personliga meningssammanhanget. Jag introducerar några begrepp, som karaktäriserar kognitiva kontexter – *kontextdominans, kontextuell osäkerhet, kontextuell medvetenhet* och *kontextpreferens* – begrepp som jag hoppas kan hjälpa oss att urskilja olika svårigheter som elever har att förstå matematiken.

## Kontextdominans

I vardagen innebär kontextualisering normalt inget problem. Där rör vi oss i kända miljöer bland objekt som vi kan benämna och vars egenskaper vi väl känner till. I en sådan verklighet kan vi oftast ta våra syften för givna; det är självklart att vi gör inköp i affären, att vi sköter våra ekonomiska transaktioner på post och bank o s v. Om vi ska skicka ett brev till en vän gör vi det i syfte att brevet ska nå fram; vi är intresserade av att sätta rätt porto på brevet för att försäkra oss om att det verkligen når adressaten och vill vi ta reda på portot kan vi gå tillväga på en mängd sätt: vi kan fråga i postluckan, vi kan sätta på ett rabattfrimärke eller väga brevet och läsa av portot i en tabell. Om vi skulle behöva utföra beräkningar på vägen så har de endast ett instrumentellt värde. Beräkningarna i sig är inte i fokus för vår uppmärksamhet.

Men vi skulle också kunna närma oss situationen med ett intresse för beräkningarna eller för de strategier som vi kan tillämpa när vi löser uppgiften. Då skulle den konkreta händelsen med alla dess detaljer ha ett instrumentellt värde; postandet av brevet utgör endast ett *exempel* bland flera som kan hjälpa oss att upptäcka något av generellt matematiskt intresse.

Nu händer det att elever (och lärare) närmar sig den senare situationen utan att reflektera över att syftet kan vara ett annat än det praktiska och för-givet-tagna. Begreppet *kontextdominans* får beskriva ett förhållningssätt hos en individ som tolkar en uppgift utan att reflektera över att tolkningen är relativ ett visst syfte. När syftet tas för givet blir kontextualiseringen oproblematisk liksom de principer som styr avgränsningen av uppgiften. Individen är konsekvent i sin tillämpning av vissa tolkningsregler men reflekterar inte närmare över vilka dessa är.

Att tolkningen av en uppgift präglas av kontextdominans är inget negativt i sig. Tvärtom är detta funktionellt i många situationer. Om vi t ex skulle ifrågasätta våra tolkningar av vardagens många utmaningar skulle det förmodligen resultera i ett ineffektivt praktiskt handlande. Genom att ta våra syften för givna kan vi etablera rutiner och tumregler som hjälper oss att snabbt hantera komplexa situationer. Däremot är kontextdominans ett bekymmer i inlärningssammanhang, där syftet för våra handlingar oftast förväntas vara ett annat än i vardagen. Ett av fallen i projektet ”Vardagskunskaper och skolmatematik” beskriver hur elever och lärare löser en uppgift där två barn springer ikapp:

> Johan och Eva sprang i kapp hundra meter. Eva sprang över mållinjen när Johan passerade märket för 95 meter, så hon vann loppet. Vid en ny kapplöpning startade Eva fem meter bakom startlinjen. Johan fick alltså ett försprång på precis de fem meter han kom efter. Om nu båda springer lika snabbt hela vägen och med samma hastighet som i det föregående loppet, vem vinner då i det andra loppet.

I ett exempel som redovisas i rapporten (Wistedt et al, 1992, s 37ff) löser fyra barn i årskurs fem på mellanstadiet uppgiften i grupp. Tre av eleverna för ett logiskt resonemang och håller sig noga till de givna premisserna. En av eleverna ser dock en annan väg att besvara den ställda frågan:

– Det beror ju på”, säger hon, ”om dom blir trötta. Till exempel om de springer...

En av kamraterna invänder att det inte står något om det i uppgiften, men eleven fortsätter:

– Då kanske hon kommer i kapp på mitten då. Så kanske Eva blir trött, för hon har sprungit fem meter mera än den där Johan. Kanske hon sackar av.

Tolkningen är rimlig om uppgiften tänks handla om en verklig kapplöpning mellan Eva och Johan. Flickans utsagor blir begripliga om vi tillskriver henne syftet att avgöra utfallet av en konkret händelse där två barn springer i kapp. Men exemplet ger för litet information för att hon ska kunna säga något om resultatet. Det rimliga är då att hon försöker ta reda på mer om vad som faktiskt hände. Eftersom hon här bara kan gissa sig till förloppet (om någon blev trött, snubblade o s v) måste svaret på den ställda frågan bli att resultatet av kapplöpningen ”beror på...”.

## Kontextuell osäkerhet

När vi säger att flickan i exemplet inte reflekterar över sin tolkning är vi bundna till den information vi har om hennes handlande. Det kan ju hända att hon faktiskt funderar över tolkningen trots att hennes tankar aldrig kommer till uttryck i gruppdiskussionen. Låt oss t ex anta, att hon mött den här typen av logiska kluringar förr. Då vet hon förmodligen att de ibland kan vara av typen ”kuggfrågor”[4] och att den som försöker sig på en logisk lösning av gåtan lätt kan hamna i bekymmer. Kamraterna ger henne inte heller något större utrymme att reflektera. De har formulerat ett annat syfte för arbetet och finner hennes förslag till lösning orimligt.

Vissa tecken tyder dock på att kamraternas avvisande attityder får flickan att fundera över uppgiften. Så t ex möter hon deras invändningar genom att återgå till texten:

– Det kanske inte stod något om vilka som sprang hela vägen, säger hon.

Vi kan se hur hon försöker omtolka den givna informationen och det är möjligt att hon också förstår att hennes egen tolkning inte duger, men vi finner inga tecken som tyder på att hon prövar en alternativ kontextualisering av uppgiften. Istället tystnar hon och under en stor del av gruppdiskussionen deltar hon inte alls i samtalet. Mot slutet återkommer hon emellertid och hennes handlande kan då inte längre

---

[4] Fundera en stund över följande exempel: En båt ligger i en sluss. Från relingen hänger en lejdare med 12 steg på 50 cm avstånd från varandra och med det nedersta trappsteget precis vid vattenbrynet. Vattnet i slussen stiger med 0,75 m per minut. Hur många trappsteg är ovanför vattenbrynet efter 4 minuter?

Frågan som ställs till läsaren antyder att något händer med lejdaren när vattnet stiger och sifferuppgifterna förleder lätt läsaren att kasta sig över beräkningarna utan att använda sitt sunda förnuft. Men, om ingen allvarlig olycka inträffar flyter båten (med sin lejdare) även när vattennivån stiger, något som de flesta av oss känner till.

förstås i ljuset av det praktiska syftet. På observatörens uppmaning ritar hon en skiss över loppet. Hennes skiss innehåller de numeriska fakta som förekommer i gruppdiskussionen och hon ger också ett förslag till lösning av problemet; Eva kommer "en 25 meter före" Johan i mål, säger hon, ett resultat som ansluter sig till gruppens mening om vem som vinner loppet, men som ligger långt från det förslag som gruppen slutligen accepterar, nämligen att Eva vinner med 5 meter. Flickans agerande blir här rimligt om vi ser det i ljuset av det syfte som övriga gruppmedlemmar formulerat. Även om hon inte lyckas, gör hon trots allt vissa försök att lösa uppgiften på logisk väg.

När en elev på det sättet växlar mellan tolkningar, där visst handlande kan förstås i ljuset av ett bestämt syfte, annat agerande i relation till en avvikande intention, kan vi tala om kontextuell osäkerhet. Eleven kan då inte särskilja syftena eller relatera dem till varandra utan tillämpar regler för tolkningen på ett inkonsekvent sätt.

## Kontextuell medvetenhet

Om kontextualiseringen däremot sker genom reflektion över både data och tolkningsram kan vi tala om *kontextuell medvetenhet* vid tolkningen. Individen ser möjlighet att formulera olika syften som kan jämföras och värderas i relation till den aktuella problemsituationen.

I slutrapporten från projektet "Vardagskunskaper och skolmatematik" beskrivs hur en grupp lärare, två från lågstadiet (Lena och Lisa) och två från högstadiet (Harriet och Hertha), löser kapplöpningsuppgiften (se Wistedt et al, 1992, s 57ff). I gruppdiskussionen uppstår frågan om hur uppgiften kan förstås:

– Ja, det är litet dubbelt, säger Lena. Om nu båda springer lika snabbt hela vägen, då ligger hon ju 5 meter efter, om dom springer lika snabbt.
– Neej, lika snabbt som dom gjorde i *förra loppet* förtydligar Harriet.
– Ja, om man läser vidare. Men stannar man till så tänker man först att då kommer hon ju 5 meter efter, eftersom dom springer exakt lika snabbt. Hon springer ju inte lika fort de sista fem metrarna på ett lopp som hon gör de första fem, fortsätter Lena.
– Nej, säger Harriet, men det måste man förutsätta för att kunna lösa det här.
– Det är så många men, men, men, invänder Lena, så fungerar det inte.
– Vem kommer först i mål då? frågar Harriet.
– Då kan hon ha honom som hare där i början, så hon kommer att springa fortare än i första loppet, säger Lena och gruppen skrattar.

Sedan Lena konstaterat att högstadielärarna säkert mött problemtypen förr och därför vet hur svaret ska bli, och att hennes egen lösning nog inte duger ("Det förstår man, att så kan det ju inte vara") gör Hertha ett försök att beskriva problemet i konkreta termer:

– Om hon springer lika snabbt hela vägen, då har vi alltså jämn fart, låtsas man alltså. Likadant har dom nån slags flygande start då, låtsas vi. Om det står att det ska vara lika snabbt hela tiden får man alltså lov att låtsas en massa saker.
– Man ska låtsas så mycket, säger Lena. Det är inget bra problem.

Lena argumenterar mot Harriets tolkning av uppgiften.

– Man räknar med att eleverna sväljer allt det här. Att dom skippar det där med haren. Den som har skrivit problemet vill att dom ska komma till matten i det.
– Då är det på matte och inte på riktigt, säger Hertha.

Eleverna protesterar, säger Lena:

– Så här kan det inte vara, kan dom säga. Det blir inte så här. Jag har sprungit 100 meter många gånger. Jag vet att det skulle vara mycket bättre med en hare.

Harriet är av en annan mening. Man måste ta hänsyn till förutsättningarna som ges i texten:

– Sen utgår man från det. Och man får inte sluta läsa innan man är färdig med sista meningen. Där står det att det är samma hastighet som i det föregående loppet. Det får man ha klart för sig, alla dom förutsättningarna, för att det ska bli ett matematiskt problem.
– Men vill vi att ungarna ska koppla bort vardagen när dom kommer till högstadiet? undrar Lena. Det tycker inte jag, säger hon.

Två tolkningar står mot varandra. Lena försöker ta reda på vem av två konkreta barn som kommer först i mål, Harriet menar att uppgiften handlar om vem som vinner, givet vissa premisser för lösningen. Lenas agerande präglas inledningsvis av kontextuell osäkerhet. Hon använder premisser som ges i texten men inte fullt ut. Logiken bryts när hon kommer att tänka på, att verkliga människor inte uppför sig så som premisserna säger. Harriet däremot ser båda tolkningsmöjligheterna och argumenterar för sin egen: om uppgiften ska gå att lösa måste man ta hänsyn till de givna förutsättningarna.

Lena invänder då, att problemet inte är bra. Det är oklart vad hon menar, men möjligen prövar hon tolkningsramen mot problemet och finner att de stämmer dåligt. Författaren vill ”att man ska komma till matten” men uppgiften lämpar sig inte för en sådan tolkning. Det förefaller emellertid som om hon tänker sig att tolkningsramen ges av texten och hennes agerande skulle då ge stöd för att hon handlar utifrån en kontextuell osäkerhet. Harriet ger då ett annat argument för sin tolkning: om uppgiften ska bli ett *matematiskt problem* måste man ta hänsyn till de givna förutsättningarna.

Möjligen är det Herthas förtydligande (”Då är det på matte och inte på riktigt") som hjälper Lena att reflektera över den egna tolkningen som relativ ett syfte. Hon fogar in uppgiften i ett undervisningssammanhang och värderar Harriets och sin egen tolkning utifrån ett undervisningsmål. Enligt Lena är inte målet för matematikundervisningen att lära elever handskas med en matematisk "låtsasvärld" utan att lära dem hantera sin egen omvärld och i det sammanhanget ser hon inte värdet av den abstrakta matematiken.

Exemplet visar hur en kontextuell medvetenhet förutsätter reflektion på flera nivåer samtidigt. Att enbart reflektera över informationen som ges i texten räcker inte. Det kan visserligen finnas ledtrådar i uppgiften som visar hän till författarens avsedda tolkning. Här har t ex författaren poängterat två premisser genom att ställa dem sist (om nu båda springer lika snabbt hela vägen...). Men det finns inget i texten som säger att vi är bundna av den tolkningen eller att vi ska hålla oss till den givna informationsmängden. Om vi ska nöja oss med det givna eller om vi ska se informationen som otillräcklig beror på vilka principer vi tillämpar vid tolkningen. Valet av principer är relativt en intention som den tolkande formulerar i ett bestämt sammanhang. Om syftet omformuleras lyfts andra aspekter av sammanhanget fram. De givna premisserna i kapplöpningsuppgiften får olika betydelse om uppgiften tolkas utifrån ett matematiskt och ett praktiskt syfte. Kontextuell medvetenhet innebär att individen kan relativisera sitt syfte och se data och tolkningsram som ömsesidigt beroende av varandra, något som inte gäller när tolkningen präglas av kontextdominans eller kontextuell osäkerhet.

## Kontextpreferens

Att individer ser möjlighet att formulera olika syften när de ställs inför en uppgift betyder inte att dessa syften värderas lika. Vi kan tala om *kontextpreferens* när individen föredrar en tolkning av uppgiften. Så t ex hävdar Harriet att den logiska tolkningen av kapplöpningsuppgiften är den enda som duger om problemet ska bli matematiskt intressant eller relevant i matematikundervisningen, medan Lena menar att samma tolkning saknar intresse i det sammanhanget eftersom den förutsätter att eleven ställer sina egna erfarenheter och intuitioner åt sidan. Tolkningen bedöms här i två skilda sammanhang, även om både Harriet och Lena skulle kunna benämna dem "matematikundervisning". Tolkningens relevans är m a o en viktig aspekt av kontextpreferensen. En annan är dess begriplighet[5]. Den

[5] Se Dahlgren (1990), 11. Dahlgren menar att relevans och begriplighet är två aspekter av begreppet "meningsfullhet". Om ett undervisningsinnehåll ska bli meningsfullt för eleven måste det vara både relevant och begripligt för individen.

som formulerar ett mål för sitt arbete måste också ha en rimlig chans att nå det. När Lena argumenterar mot den matematiska tolkningen av kapplöpningsuppgiften kan det bero på att hon har en annan syn än Harriet på vad skolmatematik är, men det kan också bero på att hon inte tror sig om att kunna ro det matematiska problemet i land, särskilt inte när två högstadielärare sitter som facit i gruppen. Kontextualiseringen hänger m a o inte bara samman med variationer i hur individer tolkar situationen utan också med skillnader i deras kunskaper och färdigheter.

Kontextpreferens kan bara uppträda när individen är kontextuellt medveten. Vid kontextdominans aktualiseras bara en tolkning och vi kan därför inte tala om att den prefereras. Vid kontextuell osäkerhet har de alternativa tolkningarna mycket olika status. Den för-givettagna tolkningen kan inte relativiseras och andra tolkningar framträder därför inte som tydliga alternativ. Individer kan agera *som om* de prefererade en viss tolkning; de kan, med hjälp och stöd från omgivningen, inrikta sig mot information som andra bedömer som väsentlig, men de förmår inte själva göra urvalet, eftersom de inte känner till urvalsgrunden[6].

## Vägen till en medveten kontextualisering

”Vägen från oreflekterad, kontextberoende kunskap till kontextfri, generaliserad kunskap torde gå över medveten kontextbehärskning”, skriver Wyndhamn i sin licentiatavhandling (Wyndhamn, 1988). I avhandlingen beskrivs hur handlingar i t ex skolan och snabbköpet ingår i olika verksamheter, där de situationella förutsättningarna skiljer sig åt och där målen för aktiviterna är olika. Med ”kontext” förstås då en viss situation, ett givet sammanhang för en uppgift, och ”kontextberoende” kunskap är då sådan kunskap som är knuten till förhållanden som råder i en viss situation. Det omedelbara sammanhanget för en uppgift påverkar elevens målformulering och därmed lösningen av uppgiften. Att kunskapen är ”kontextfri” skulle då innebära att kunnandet kan frigöras från den faktiska situationen, att eleven förmår utnyttja information som ger stöd vid problemlösningen men samtidigt bortse från sådan som stör och vilseleder, i korthet att eleven behärskar relationen ”mellan problem och kommunikativ kontext” (a.a. s 19).

---

[6] Fenomenet är vanligt i inlärningssammanhang. Så t ex beskriver Miller & Parlett (1974) ett fenomen som de kallar ”cue-seeking”, där elever lär sig sådant som lärare bedömer som ”viktigt”, genom att notera vad lärare poängterar i undervisningen, skriver på tavlan, stryker under i litteraturen o s v. Eleverna kan då lära sig ”väsentligheter” utan att vara helt klara över vad det är som gör dessa fakta väsentliga. (se även Wistedt 1987).

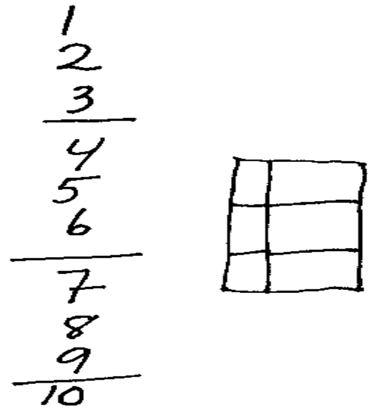
En, i den meningen, ”kontextfri”, generaliserad kunskap är ofta målet för undervisningen, inte minst i ämnet matematik, och undervisningen bör därför hjälpa eleven att gradvis frigöra sig från ett situationsbundet tänkande. I en rapport föreslår Unenge och Wyndhamn (1991) att matematikundervisningen tar sin utgångspunkt i en ”kontext som eleven känner igen” d v s i ”en för eleven känd och/eller intressant situation” (a.a. s 8), där uppgiften har en speciell och kanske helt personlig relevans:

> Utifrån den speciella relevansen kan frågor av typen ”Vad händer om..?” leda fram till en generell relevans (s 8).

Ur ett intentionellt perspektiv däremot, finns inte något sådant som ”kontextfri” kunskap. Varje förståelse av omvärlden innebär en kontextualisering varav en matematiskt generaliserande är en av flera möjliga. Eftersom det slaget av kontextualisering inte har någon given plats i vår vardag behöver det matematiska perspektivet presenteras och tydliggöras i undervisning. Resultaten från projektet ”Vardagskunskaper och skolmatematik” visar, att generaliserande frågor inte alltid räcker för att bryta den kontextdominans som kända situationer kan aktualisera. Ett exempel i slutrapporten från projektet beskriver hur en lärare handleder en grupp elever som löser kapplöpningsuppgiften (Wistedt et al, 1992, s 55). Eleverna uppmuntras av läraren att förklara hur de tänker och eleverna använder sitt kunnande om vad som allmänt kan hända i kapplöpningar. De kommer fram till att man inte kan avgöra vem som vinner. Många faktorer spelar in: löparna kan bli diskade, de kan snubbla, bli trötta eller de kan ha använt anabola steroider. Samtalet mellan läraren och eleverna innehåller generaliserande frågor och eleverna generaliserar också, men de gör det inom en praktiskt kontext.

Unenge och Wyndhamn väger emellertid också in begripligheten i sin diskussion av undervisningens utformning (Unenge & Wyndhamn, 1991, s 7). Genom att variera lösningsnivå i undervisningen och låta elever möta krav på att ”göra”, ”berätta”, ”förklara” och inte minst ”argumentera” när de löser uppgifter kan förståelsen för innehållet fördjupas (jfr Malmer, 1990, s 16ff).

Resultaten från projektet ”Vardagskunskaper och skolmatematik” ger visst stöd för en sådan tanke. I ett av fallen som redovisas i slutrapporten från projektet genomför fyra elever en laborativ övning med klossar, där syftet är att de ska upptäcka olika faktoriseringar av talen 1-5. Eleverna lämnar snart heltalsfaktorerna och hamnar i bryderi över hur fyra klossar kan delas i tre lika stora delar. Eftersom de föredrar att använda decimalform när de skriver ner sina lösningar kommer resultatet att bli 3 x 1,333... där en av faktorerna har en oändlig decimalutveckling. Två av eleverna har svårt att acceptera lösningen och kräver att delningen ska få ett slut (se vidare nedan; se även Wistedt et al, 1992, s 73ff). En av eleverna presenterar då ett argument för den oändliga delningen genom att tillämpa en idé som hon hämtar från decimalsystemet:




*Figur 1 Två skisser till problemet 4/3*

– Ja, men du, säger hon, om man gör så här att man tar en sån här (kloss) som *tio*. Om man delar där (här den fjärde klossen, som ska fördelas på de övriga tre klossarna), så blir det tre (delar) och så är det en liten kvar.

Den resterande delen fördelas åter på övriga tre:

– Det här blir ju en tredjedel. Då blir det en liten kvar. Då måste man dela den, sen måste man dela den...

Men kamraterna invänder:

– Tänk själv, säger en av dem, om man delar den här. Då måste man sätta den i mikroskop. Dela atomer.
– Men du, fortsätter eleven, vi *delar* aldrig den här. Tänk om den är så *här* stor då. Då är det mycket lättare att dela.

Kamraterna förstår fortfarande inte och eleven hittar då ett sätt att förtydliga sin lösning:

– Jo! Nu kom jag på det! Jag kom på det! Jag hade så här säger hon och ritar en skiss:

  1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. För varje sån är det tio kom vi fram till. Och så ska vi dela den där med tre. Här är en liten bit:1,2,3, säger hon och drar ett streck, en liten bit: 1,2,3...så blir den lilla över.

För eleven själv är lösningen begriplig men det är den inte för kamraterna. De lyckas emellertid klara ut problemet genom att tillämpa andra principer vid lösningen. En av dem accepterar resonemanget när han inser att biten som blir över hela tiden ”minskar i värde”. För varje ny decimal kommer man allt närmare det rätta värdet 1 1/3 utan att någonsin nå ända fram. Den tredje eleven tillämpar också ett slags ”gränsvärdestänkande”; han konstaterar att det hela tiden är samma kloss man delar, och slår man ihop de oändligt många delarna blir klossen hel igen.

Exemplet visar hur reglerna för tolkningen av uppgiften behöver ha ett visst mått av subjektiv begriplighet, för att bli användbara vid lösningen av problemet. De kan därför inte enkelt ges eleven av en lärare eller en kamrat. Kamraters och lärares frågor kan däremot stimulera eleven att tänka vidare, att berätta, förklara och argumentera för sin personliga lösning. Av exemplet ovan framgår att detta också kan hjälpa eleven till fördjupad förståelse av det egna lösningsförslaget.

## Kontextualiseringens betydelse i undervisningen

Resultatet, som presenterats ovan, ger stöd för tanken, att en lösningsmetod måste ha sin grund i elevens egen kognitiva repertoar, för att bli ett instrument vid struktureringen av en given uppgift. Repertoaren är resultat av en personlig lärprocess och omfattar därför inte bara begrepp, modeller och lösningsstrategier i slutlig och statiskt form; dessa bär också spår av processen genom vilken de har etablerats (jfr Dörfler, 1991, s 70ff), vilket betyder att de kan vara idiosynkratiska i varierande utsträckning beroende på uppkomsthistoria. Så länge lärprocessen förblir oartikulerad kan begreppen och modellerna också förbli personliga och informella. Men om en tanke ska bli just en *matematisk* tanke krävs att den ges ett uttryck som hör hemma i ett teoretiskt sammanhang. Det är i undervisningen som en sådan konventionalisering av tänkandet kan ske. Det är där eleven kan möta matematiken, som ett kulturellt redskap för tänkandet, och exemplet ovan, liksom kapplöpningsexemplet, illustrerar hur elever måste använda sig av eller införa vissa konventioner när de vill förmedla sina tankar till andra[7].

Frågan är emellertid vad av lärprocessen som kräver artikulering för att eleven ska lyckas formulera matematiska problem. Unenge och Wyndhamn lägger tonvikten vid logiken i lösningsmetoden och motiven för valet av denna [8]. Bruner (1966, sid 69ff), som också framhåller artikuleringens betydelse, lägger tonvikten vid de mentala representationerna och barnets användning av symboler för att uttrycka sina tankar. Flickan, som beskriver sin förståelse av 1 1/3 i exemplet ovan, tydliggör den kontext hon själv skapar vid förståelsen av uppgiften och lyfter då fram regler som hon utgår ifrån när hon konstruerar sin egen modell. Bruner, liksom Unenge och Wyndhamn, ger främst teoretiska argument för sin beskrivning av begriplighetens olika nivåer. Vad jag här har försökt visa, är att frågan också kan ges en empirisk belysning. Vidare forskning med en sådan inriktning skulle

---

[7] Flickan i exemplet säger bl a ”För varje sån (kloss) är det tio, kom vi fram till”. Hon hänvisar därmed till en överenskommelse, en konvention.

[8] Unenge & Wyndhamn (1991). Tonvikten läggs vid beskrivningen av begriplighetens olika nivåer. I rapporten som helhet ges inlärningsproblematiken en betydligt bredare belysning.

kunna ge svar på frågan om vad elever själva försöker uttrycka när de löser uppgifter i skolan och hur kommunikation kan hjälpa dem att nå en djupare förståelse av matematiken.

## *Referenser*


Brook, A., Briggs, H., & Driver, R. (1984). *Aspects of secondary students' understanding of the particular nature of matter*. Children's Learning in Science Project. Leeds: University of Leeds.

Bruner, J.S. (1966). *På väg mot en undervisningsteori*. Lund: Gleerups.

Cobb, P. (1990) Multiple perspectives. In L. P. Steffe, & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education. International perspectives* (pp. 200-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dahlgren, L-O. (1990) *Undervisningen och det meningsfulla lärandet*. (Skapande vetande, rapport nr 16). Linköping: Linköpings universitet.

Donaldson, M. (1978). *Hur barn tänker*. Stockholm: Liber.

Dörfler, W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gentner, D., & Stevens, A.L. (Eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Halldén, O. (1991, August). *Conceptual change, conceptual rigidity, or different domains of understanding*. Paper presented at the Fourth European Conference on Learning and Instruction, Turku , Finland.

Halldén, O. (in press). On the paradox of understanding history in an educational setting. In I. Beck, & G. Leinhardt (Eds.), *Learning and teaching history*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Halldén, O., & Caravita, S. (in press). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction.*.

Hughes, M. (1986). *Children and number*. Oxford: Basil Blackwell.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). On the study of statistical intuitions. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lancy, D.F. (1983). *Cross-cultural studies in cognition and mathematics*. New York: Academic Press.

Lave, J., Murtaugh, M., & de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff, & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition. Its development in social context*. Cambridge (pp. 67-94), MA: Harvard University Press.

Liben, L.S. (Ed.) (1987). *Development and learning. Conflict or congruence?* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik*. Solna: Ekelunds förlag.

Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science,* **10,** 177-200.

Marton, F. (Red.) (1986). *Fackdidaktik, vol I-III*. Lund: Studentlitteratur.

Miller, C.M.L., & Parlett, M. (1974). *Up to the mark: A study of the examination game*. London: Society of Research Into Higher Education.

Pfundt, H., & Duit, R. (1991). *Bibliography. Students' alternative frameworks and science education* (Third Edition). Kiel: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, Universität der Kiel.

Piaget, J. (1975).*The development of thought. Equilibration of cognitive structures*. Oxford: Basil Blackwell.

Saxe, G. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Researcher, Aug-Sept.*, 14-21.

Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. In B. Rogoff, & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition. Its development in social context* (pp. 9-40). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Solomon, J. (1986). Children's explanations. *Oxford Review of Education,* **12,** 41-52.

Säljö, R. (1989). Kommunikativ praktik och institutionaliserad inlärning. I R. Säljö mfl. (Red), *Som vi uppfattar det. Elva bidrag om inlärning och omvärldsuppfattning* (s 1-17). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (1991). Learning and mediation: Fitting reality into a table. *Learning and Instruction,* **1**, 261-272.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1987). *Solving everyday problems in the formal setting.* Linköping: Department of Communication Studies, University of Linköping.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988a). A week has seven days. Or does it? On bridging linguistic openness and mathematical precision. *For the Learning of Mathematics,* **8**(3), 16-19.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988b). Cognitive operations and educational framing of tasks. School as context for arithmetic thought. *Scandinavian Journal of Educational Research,* **32,** 61-71.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988c). The formal setting as a context for cognitive activities. An empirical study of arithmetic operations under conflicting premisses for communication. *European Journal of Psychology of Education,* **2**, 233-245.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1990). Problem solving, academic performance, and situated reasoning. A study of joint cognitive activity in the formal setting. *British Journal of Educational Psychology,* **60**, 245-254.

Unenge, J., & Wyndhamn, J. (1991). *Från räkning till matematisk klokskap.* ALM-rapport nr 6. Jönköping: Högskolan i Jönköping.

Wistedt, I. (1987). *Rum för lärande. Om elevers studier på gymnasiet.* Stockholm: Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

Wistedt, I., i samarbete med Brattström, G., & Jacobsson, C., under medverkan av Källgården, E-S. (19-92). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen.* Stockholm: Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

Wistedt, I., i samarbete med Brattström, G., & Jacobsson, C. (1993). *Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen.* Stockholm: Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö. Skolan som kontext för tänkande i elementär matematik* (Studies In Communication 26). Linköping: University of Linköping.

## Pupils' difficulties in contextualizing mathematical tasks

### *Abstract*

The aim of the article is to shed light upon obstacles that pupils face when interpreting mathematical tasks at school and to discuss how teaching can help children to overcome such obstacles. The observations reported draw on data gathered within a research project, "Everyday Common Sense and School Mathematics", comprising tape recorded instances of group work, where children at the intermediate level of compulsory school and teachers in in-service training solve mathematical tasks. The article focuses on the cognizing subject's interpretation of the task at hand – the cognitive context created. Four concepts are introduced characterising contextualizations of different kinds: contextual dominance, contextual indeterminacy, contextual awareness and context preference. These concepts direct attention towards the subject's attitude when interpreting a given task and the impact such attitudes have on the understanding of the mathematical content of the task. The results indicate that pupils, as well as teachers, have difficulties in attending to and accepting a mathematical interpretation of given tasks. Teachers who set out to help pupils to obtain generalizable knowledge, must take into account the pupils' interpretations of assignments and the rules that pupils use when contextualizing given tasks. In communication with others such rules can be made explicit and the results reveal how pupils, who are encouraged to argue for their solutions to a task can reach a deeper understanding of their own personal and idiosyncratic ways of thinking.