Introduksjon til vektorer i norske lærebøker og i en undervisningsfilm

ANNE BIRGITTE FYHN

Vektorer introduseres andre år på videregående skole i Norge. Denne teksten undersøker hvordan læreverkene og en klatrefilm introduserer dette emnet og hvorvidt filmen kan supplere bøkene. Film og lærebøker undersøkes ut fra samme kriterier. Fordi bøkene bygger på læreplanen, presenteres først en oversikt over vektorers plass i norske læreplaner. Analysene viser at filmen kan supplere lærebøkene ved å utfordre elevenes matematiske tenking i forhold til relasjoner mellom vektor og vinkel. Analysene indikerer også en svakhet ved læreplanen: Læreplanens kompetansemål med hensyn på vektorer fokuserer kun på regning og prosedyrer uten at disse eksplisitt inngår i en sammenheng. Kompetansemålene sier heller ikke noe om forståelse.

Ved et av mine besøk på den lokale klatrehallen snakket jeg med en av de dyktige unge klatrerne om matematikk. Birgit gikk andre året på videregående skole og hun lyktes godt med matematikkfaget på skolen. Jeg ble forundret over at hun syntes vektorer var et vanskelig emne, fordi jeg selv hadde erfart klatring som praktisk arbeid med vektorer. Birgit kunne ikke se at klatring hadde noe med vektorer å gjøre. Samtalen vår førte til at jeg lagde en undervisningsvideo om klatring og vektorer (Fyhn, 2009, 2010) der Birgit og hennes klasse- og klatrekamerat Eirik spiller hovedrollene. Begge er klatrere på svært høyt nivå. Filmen kan lastes ned her http://2010.arkiv.ndla.no/nb/node/46168 fra *Norsk digital læringsarena* (NDLA). I løpet av arbeidet med videoen ble jeg nysgjerrig på hvorfor mange elever opplever vektorer som et vanskelig emne. Jeg fant lite forskning på området. Jeg lurte på hva lærebøker og læreplan sier om vektorer og på hvordan min video kunne supplere skolens undervisning. På den bakgrunn stilte jeg spørsmålet

---

Anne Birgitte Fyhn
University of Tromsø

Fyhn, A. B. (2011). Introduksjon til vektorer i norske lærebøker og i en undervisningsfilm. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (3), 5–24.

> Hvordan introduseres vektorer i norske matematikklærebøker og hvordan kan filmen "Vektorer i klatring" supplere lærebøkene?

Jeg belyser forskningsspørsmålet ved å undersøke hvorvidt læremidlene fokuserer på prosedyrekunnskap, begrepsforståelse eller begge deler. Målet er å bidra til økt innsikt i hvordan vektorer introduseres for norske skoleelever og hvordan denne introduksjonen eventuelt kan forbedres.

Prosedyrekunnskap og begrepsforståelse

Star (2005) påpeker at forholdet mellom prosedyrekunnskap og begrepsforståelse har vært livlig diskutert over tid blant matematikkdidaktikere. De største uenighetene handler om hvorvidt utvikling av ferdigheter knyttet til symbolbruk vil utvikle elevenes forståelse, eller hvorvidt grunnleggende forståelse må komme forut for symbolsk representasjon og ferdighetstrening. Både ferdighetstrening og forståelse er viktig, uenighetene handler om rekkefølgen. Det framgår av en oversikt over tidsskriftartikler og databaser at uenigheter angående viktigheten av prosedyrekunnskap har vært mer ideologisk enn empirisk begrunnet (ibid.).

I følge Fischbein (1994) kan matematikk betraktes på to måter: som formell deduktiv kunnskap slik vi finner den i lærebøker, eller som en menneskelig aktivitet. Han poengterer at idealet om matematikk som strengt sammenhengende og logisk strukturert kunnskap ikke utelukker nødvendigheten av å betrakte matematikk som en kreativ prosess. Det er sentralt at elevene forstår at matematikk er en menneskelig aktivitet, oppfunnet av mennesker. På den bakgrunn viser Fischbein (1994) til tre grunnleggende komponenter: 1) Det *formelle* aspektet. Aksiomer, definisjoner, teoremer og bevis. 2) *Algoritmer*. Ferdigheter er like viktig som forståelse, og ferdigheter oppnås gjennom praktisk og systematisk trening. 3) *Intuisjon*. Intuitiv forståelse, intuitiv kunnskap og intuitive løsninger (ibid.). I samspillet mellom det intuitive og det formelle, vil de intuitive ideene overskygge de formelle. Selv etter at individer er i stand til formell resonnering, så vil elementære intuitive modeller fortsette å påvirke dem (ibid.).

Stein, Smith, Henningsen og Silver (2000) karakteriserer undervisningsopplegg ut fra kognitive krav (referert i Skott, Jess & Hansen, 2008) ut fra hva slags tenking elevene må engasjere seg i. De opererer med to typer lavnivåkrav og to typer høynivåkrav. Lavnivå: å huske resultater (memorering), å gjennomføre prosedyrer uten å forbinde dem med resonnementer eller begreper (prosedyrer uten sammenheng). Høynivå: å forbinde prosedyrer med mening og med relaterte begreper (prosedyrer i sammenheng), å engasjere seg i egentlig matematisk tenking (å gjøre matematikk). Dette støtter Fischbeins (1994) poeng om at de formelle, algoritmiske og intuitive komponentene må henge sammen.

Anvendt på vektorer gir Fischbeins (1995) teori at den formelle komponenten omfatter vektor definert som et linjestykke med retning og definisjonen av nullvektor, mens algoritmekomponenten omhandler regler for addisjon og multiplikasjon av vektorer. Jeg har valgt å betrakte dette som prosedyrekunnskap. Den intuitive forståelsen spiller inn når en elev ber om hjelp til å forstå regelen for å regne ut skalarprodukt, fordi regelen intuitivt virker ulogisk. Hvis elever pugger regneregler de ikke forstår, er det fare for at de blander sammen ulike regler ved slutten av skoleåret. Dette kan skje hvis forståelsen av reglene ikke er knyttet til elevens intuitive idéer. Jeg har derfor valgt å kategorisere dette under begrepsforståelse. Fischbein (ibid.) sitt poeng er at både det formelle, det algoritmiske og det intuitive må henge sammen for at undervisningen skal lykkes.

Vanskeligheter ved utvikling av et vektorbegrep

I Norge introduseres elevene for vektorer andre året i videregående skole. I England introduseres vektorer noen år tidligere og i følge Poynter og Tall (2005b) er vektorer et vanskelig begrep for mange elever der. Klassen til Birgit og Eirik hørte til første årskull som fulgte læreplanen av 2006 (KD, 2006a). I det læreverket de benyttet, handlet kapittel én om vektorer. Mange av elevene på kullet opplevde vektorer som vanskelig og som annerledes enn den matematikken de hadde jobbet med tidligere. Dette tok skolens lærere til etterretning da de planla neste skoleår. I følge Birgit og Eirik sin matematikklærer valgte de da å starte med stoff som var kjent og ta vektorregninga når elevene var godt i gang med skoleåret.

Forskning på undervisning i lineær algebra i Frankrike viser at studentene hadde utallige problemer på ulike nivå (Harel & Trgalová, 1996). Blant annet hadde studentene vanskeligheter med å forstå sentrale begreper, spesielt begrepet vektorrom. Funnene indikerer at studenter med suksess i lineær algebra hadde kjennskap til elementær logikk på forhånd. I USA og Canada var undervisningen i lineær algebra lagt opp annerledes, men også her var det store vanskeligheter forbundet med undervisning i lineær algebra (ibid.). Maracci (2006) påpeker at ulike typer universitetsstudenter har felles problemer ved utvikling av grunnleggende begreper innen vektorrom-teori. Studentenes vanskeligheter og feil er knyttet til lineære kombinasjoner, lineær avhengighet/uavhengighet, ”spanning set” og basis (ibid.).

Poynter og Tall (2005a) hevder at i den britiske undervisningskulturen har man praktiske tilnærminger til praktiske problem. Den senere tid har undervisningen om vektorer fått et sterkere fokus på praktiske aktiviteter uten tilknytning til matematisk teori. Vektorer introduseres i praktiske fysikksituasjoner som krefter og hastighet, først senere studerer elevene den rene matematiske teorien rundt vektorer. Denne undervisningen blir ikke betegnet som vellykket (ibid.).

Undervisning om vektorer fokuserer ofte på forflytninger, enten en person trekker en kasse etter seg, eller en orienteringsløper forflytter seg fra post til post. Poynter og Tall (ibid.) viser til at poenget med en forflytning ikke er selve forflytningen, men virkningen av forflytningen. Deres ide er at elever først må erfare virkningen av en forflytning rent kroppslig, deretter kan de begynne å tenke på å representere forflytningen ved en pil som har gitt lengde og retning. Vind opptrer abstrakt i denne sammenhengen fordi der ikke nødvendigvis vil være noen synlig virkning av at luft har flyttet seg. Forskning på undervisning om vinkler viser at elevene begriper vinkler best dersom begge vinkelbeina er synlige (Mitchelmore & White, 2000). Dette kan indikere at vind er en ugunstig kontekst for den første introduksjonen av vektorer.

Dersom startpunkt og sluttpunkt til en vektor er gitt, kalles den for en fastvektor. Dersom vektorens startpunkt ikke er gitt, slik som ved ei vindpil på et værkart, kalles den for en frivektor. Elever som kun refererer til en vektor som ei konkret pil på ei tegning, vil trolig møte problemer med frivektorbegrepet. Berthelot og Salin (1998) hevder at lærere og elever ofte har ulike referanserammer når de diskuterer geometriske figurer som er tegnet på papiret. Lærerne refererer til generelle begreper, mens elevene refererer til det tegnete objektet. Overført til arbeid med vektorer innebærer dette at når læreren tegner en vektor på tavla og referer til den, refererer trolig flere av elevene kun til den konkrete pila.

Målet med undervisningen om vektorer

Vektorer kan introduseres i ulike kontekster og vektorer kan introduseres som forflytning, hastighet, akselerasjon og kraft. Både Fischbein (1995) og Star (2005) påpeker verdien av å vektlegge både prosedyrekunnskap og forståelse i matematikkundervisningen. På den bakgrunn bør undervisningen ha to mål. Det ene er å skape en forståelse for vektorbegrepet, ulike aspekter ved vektorbegrepet og relasjoner mellom vektorer og andre begrep. Det andre målet er at elevene behersker aktuelle prosedyrer, det Fischbein (1995) betegner som definisjoner og algoritmer.

I følge Poynter og Tall (2005b) er målsettingen en begrepsforståelse som inneholder relasjoner mellom begreper og mellom ulike aspekter ved et begrep, i stedet for en prosedyrekunnskap som kun består av en instrumentell forståelse av forskjellige teknikker. De advarer mot prosedyrekunnskap på lavt nivå. Jeg har valgt å se på relasjoner mellom begrepene vektor og skalar og mellom vektor og vinkel. Ulike aspekter ved vektorbegrepet er som Poynter og Tall (ibid.) påpeker, "trekantmetoden" og "parallellogrammetoden" for addisjon av vektorer samt dekomponering av vektorer. Det er viktig at disse tre behandles som ulike aspekter ved et og samme begrep (ibid.).

I følge Poynter og Tall (2005a) er lærerne er klar over at elevene har vanskeligheter med vektorer. Lærerne er opptatt av hva som gikk galt akkurat forrige skoleår, men de søker ikke systematisk og målrettet etter teori som kan forklare hvorfor det gikk galt og hvilke strategier som kan få det hele til å fungere. De vet ikke hvorfor elevene misforstår (ibid.). Denne studien støtter seg på resultatene til Poynter og Tall (2005a, 2005b) fordi de fokuserer på introduksjon til vektorer og ikke på lineær algebra i Universitetenes undervisning. I en oppfølgingsstudie underviser Fyhn (in press) fire tenåringsklatrere om vektorer i en klatrekontekst, dette for å se hvordan klatrere responderer på slik undervisning.

Metode

Utgangspunktet for denne studien er hvorvidt klatrefilmen (Fyhn, 2009) kan være et supplement til lærebøkenes introduksjon til vektorer. Derfor har jeg valgt å undersøke hvordan ulike læreverk introduserer vektorer før jeg analyserer filmen ut fra samme kriterier som lærebøkene. Både bøker og film betraktes som undervisningsmateriell. Analysene tar kun for seg materiellet, jeg har ikke testet noe av dette i undervisning. Det kunne vært nærliggende å undersøke eksamensoppgaver om vektorer. Eksamen har stor innflytelse på undervisningen, fordi lærerne vektlegger det som vektlegges i eksamensoppgavene (Clarke, 1996). Lærebokforfatterne er i hovedsak erfarne lærere fra videregående skole. Innholdet i bøkene er derfor trolig påvirket av tidligere eksamensoppgaver, selv om oppgavene skal lages på bakgrunn av læreplanen og ikke omvendt.

Johansson (2006) omtaler lærebøkene som den potensielt implementerte læreplanen, som overgangen mellom læreplanen og det som foregår i klasserommet. Læreplanen bestemmer langt på vei innholdet i lærebøkene. Innholdet i læreplanene er utviklet av faggrupper nedsatt av Utdanningsdirektoratet, Udir (2005), og Udir er igjen underlagt Kunnskapsdepartementet, KD. Dette innebærer at politikerne langt på vei kan bestemme innholdet i læreplanene.

Analysene presenterer først en oversikt over hvordan vektorer er inkludert i norske læreplaner over tid. Læreplanene har endret struktur over tid, men analysene i dette arbeidet forholder seg kun til hvilke emner som er inkludert. Arbeidsformer og overordnet mål for fagene er ikke tatt med. De første læreplanene inneholder punktvise lister over aspekter ved vektorer. Reform-94 (KUF, 2000) og LK06 (KD, 2006a) inneholder kompetansemål og siden 1990-tallet har de fleste lærebøkene læreplanens kompetansemål forrest i hvert kapittel.

Fem norske læreverk som omhandler introduksjon til vektorer er basert på læreplanen av 2006 (ibid.) og dette arbeidet omfatter en multippel case studie (Andersen, 1997/2004) av disse fem læreverkene:

Giga – av Andersen, Jasper, Natvig og Viken

Matematikk – av Heir, Erstad, Borgan, Moe og Skrede

Sigma Σ – av Sandvold, Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Dypbukt, Mustaparta, Thorstensen og Thorstensen

Sinus – av Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch og Hals

Paralleller – av Ekren, Guldahl og Holst

I den videre teksten referer jeg til bøkene kun ved boktittel i kursiv. R1-bøkene er undersøkt for fire læreverk, mens *Paralleller* kun har 2T bok.[1] Målet er å belyse hvordan vektorer blir introdusert for norske elever og å undersøke hvordan denne introduksjonen kan forbedres. Dette er ikke en sammenlignende studie med en målsetting om finne ut hvilket læreverk som er best. Case studier gir ofte bred detaljinnsikt (Andersen, 2003) og ett mål med dette studiet er å oppnå detaljinnsikt i hvordan læreverkene introduserer vektorer. Fordi de fem læreverkene utgjør hele utvalget, er de også representative.

Analysene fokuserer først på presentasjonen av hva en vektor er: en formell definisjon, en presentasjon av hva en vektor ikke er, valg av kontekst i eventuelt introduksjonseksempel, på hvordan oppgavene utfordrer elevene på om de kjenner definisjonen av en vektor og relasjoner mellom vektor og skalar.

Det er til dels flytende overganger mellom Fischbeins (1994) tre komponenter formell, algoritmisk og intuitiv. I arbeid med divisjonsalgoritmen kan for eksempel alle tre komponentene gjøre seg gjeldende på samme tid. Jeg har valgt å kategorisere formell og algoritmisk som prosedyrekunnskap. Prosedyrekunnskap blir diskutert ut fra hvorvidt prosedyrene er på lavt eller høyt nivå (Stein m fl, 2000). Der det intuitive knyttes sammen med det formelle har jeg valgt å kategorisere det som høynivå prosedyrekunnskap, prosedyrer i sammenheng (ibid.). Kriteriene for begrepsforståelse bygger på Poynter og Tall (2005b).

a) Relasjoner mellom vektorer og andre begrep som er nært knyttet til forståelsen av vektorer,

b) trekantmetoden, parallellogrammetoden og dekomponering av vektorer som tre aspekter ved samme begrep og

c) frivektorbegrepet.

Videoen er ment å være et supplement til lærebøkene. Dersom den lykkes i dette, innebærer det at den behandler aspekter ved vektorer som lærebøkene vanskelig kan ta opp eller som de kun behandler overflatisk. Selv om en film er et annet medium enn ei bok, blir videoen og lærebøkene analysert ut fra de samme kriteriene.

Introduksjon til vektorer i norske læreplaner

Fra gammelt av møtte elevene vektorer kun i fysikkfaget på videregående skole. Fra 1976 ble vektorer introdusert i matematikkfaget andre året for elever som valgte realfaglig fordyping[2] (KUD, 1976). Læreplanens overskrift er "Vektorregning" og den videre teksten lister opp en rekke grunnleggende aspekter ved vektorer: vektorbegrepet, sum og differens av vektorer, vektor multiplisert med tall, vektorbasis, ortonormert koordinatsystem, projeksjon av en vektor på en annen vektor, skalarproduktet uttrykt ved cosinus og ved koordinatene til vektorene (ibid.). I påfølgende læreplan (KUD, 1985) er avsnittet om vektorer uendret. I prøveutgaven av neste læreplan (KUF, 1991) er avsnittet om vektorer utvidet til å omfatte dekomponering av lineært uavhengige vektorer samt noe mer. Dette er i tråd med Poynter og Tall (2005b) sin oppfordring om at dekomponering og addisjon av vektorer må sees i sammenheng. Disse tre læreplanene gir muligheter for arbeid med prosedyrer på både lavt og høyt nivå ut fra Stein m fl (2000) sine kategorier, fordi både vektorbegrepet og prosedyrer er omfattet av planen.

Etter at vektorer hadde vært med i den videregående skolens matematikkfag i om lag 20 år, kom læreplanen Reform-94 (KUF, 2000). Vektorer introduseres fortsatt i matematikkfaget andre året for elever som velger realfaglig fordyping[3], men vektorer har ikke lengre sitt eget avsnitt. Læreplanen lister opp kompetansemål sammen med verb: Elevene skal være kjent med det geometriske bildet av vektorer som piler i planet, kunne bruke de geometriske definisjonene av operasjonene addisjon, subtraksjon, skalarprodukt og multiplikasjon med en skalar, og de skal kjenne regnereglene for koordinatiserte vektorer i planet (ibid.).

Vektorbegrepet er utelatt i læreplanen fra nå av. Verbet å forstå blir brukt kun tre steder i R-94 under kompetansemålene for 2MX.

Elevene skal forstå

a) en enkel matematisk tekst,

b) hvordan man kan omforme og forenkle ligninger og ulikheter og

c) sammenhengen mellom forløpet til funksjoner og fortegnet til deres første- og annenderiverte.

Sammenhenger mellom vektorbegrepet og relevante prosedyrer er ikke lengre i fokus. Derfor er kravet til prosedyrekunnskap på lavt nivå (Stein m fl, 2000).

I læreplanen fra 2006 (KD, 2006a) inngår ikke verbet "å forstå" noe sted i kompetansemålene for andre klasse realfaglig fordyping, R1. Kompetansemålene om vektorer omhandler kun vektorregning, eleven skal kunne "regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform [...] beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer" (ibid., s. 3). Grunnlagsdokumentet for læreplanen forstår kompetanse som "[...] hva man gjør og får til i møte med utfordringene" (KUF, 2004, s. 31) og kompetanse beskrives som evnen til å møte komplekse utfordringer (ibid.). I forhold til vektorer har læreplanen tolket dette til å ha minimalt med elevenes begrepsforståelse å gjøre. Prosedyrekunnskap på høyt nivå synes unødvendig for å løse komplekse utfordringer.

Mens læreplanene fra 1976, 1986 og 1991 fokuserer eksplisitt på både vektorbegrepet og prosedyrer, fokuserer kompetansemålene i 1994 og 2006 kun på prosedyrer. Dette er i strid med anbefalingene fra Fischbein (1994), Stein m fl (2000), Poynter og Tall (2005b) og Star (2005). Fra 2006 skal elevene bare kunne regne og beregne. Arbeid med prosedyrer på høyt nivå (Stein m fl, 2000) er ikke i fokus i de to nyeste læreplanene. Denne utviklingen samsvarer dårlig med Poynter og Tall (2005b) sin anbefaling om at begrepsforståelse og relasjoner mellom vektorer og andre begrep bør ha en framtredende plass i undervisningen. *Rom–Stoff–Tid* (Øgrim, Ormestad & Lunde, 1968/1976) var det mest utbredte fysikklæreverket gjennom 1970-tallet, den tiden da vektorer kom med i matematikkfaget. Dette læreverket viser arbeid med prosedyrer på høyt nivå: relasjoner mellom trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering.

Funnene til Harel og Trgalová (1996) og Maracci (2006) indikerer at for å lykkes med lineær algebra på universitetet, bør studentene ha utviklet en god forståelse av vektorbegrepet. Fire av lærebøkene i denne studien innleder kapitlene med læreplanens kompetansemål, mens *Matematikk* har målene med i et avsnitt om læreplanen bakerst i boka. Kompetansemålene er førende for undervisningen. Kompetansemålenes manglende fokus på begrepsforståelse indikerer at elevene ikke får det beste utgangspunktet for å lykkes med lineær algebra på universitetet.

Introduksjon til vektorer i nyere matematikklæreverk

I likhet med Wikipedia (2009), hevder flere læreverk at ordet vektor betyr "bærer", men de sier ikke eksplisitt hva som bæres. Kun læreverket, *Sigma Σ*, viser et historisk overblikk over vektorer. Digitale læremidler er innarbeidet i matematikkundervisningen i Norge, men kun én lærebok presenterer et slikt eksempel i introduksjonen av vektorer. Trolig forventer forlagene at lærere behandler dette temaet separat og med treningsoppgaver som er koblet til den programvaren det enkelte fylke har valgt å satse på.

Innledning til vektorkapitlet. Relasjoner mellom vektor og skalar

Matematikk besvarer spørsmålet "Hva er en vektor?" slik: "Når meteorologen skal presentere værmeldingen, bruker han eller hun piler på værkartet for å beskrive vindforholdene. Ved pilene står det gjerne et tall som viser vindstyrken. En fullverdig oversikt krever både vindretning og vindstyrke" (ibid., s. 9). Eksemplet med vind har ingen illustrasjoner der vektorpiler er tegnet inn. Boka sier ikke noe om konsekvenser av at pilene på værkartet blir parallellforskjøvet og at lengden på vindpilene er uavhengige av vindstyrken. Lufta som forflyttes via vind er ikke synlig med det blotte øye. Dermed blir det vanskelig for elevene å tolke vind som forflytning av luft. I følge Poynter og Tall (2005a) er virkningen av en forflytning sentralt. Vindeksemplet i *Matematikk* er derfor trolig lite egnet som elevenes første møte med vektorer.

Lengre ned på siden er der et bilde av to samer med hunder, kjørerein og sleder i lett snøfokk. Personene går til fots, skrått mot vinden. Teksten har ingen hint til hvorvidt eller hvordan bildet har sammenheng med pilene på meteorologenes værkart. Bildet er ledsaget av teksten "Vind er en vektorstørrelse." (ibid.) I følge læreplanens generelle del (KD, 2006b) er samisk språk og kultur en del av vår felles arv som Norge og Norden har et særlig ansvar for å hegne om. Dessverre kan dette bildet lett tolkes som et "samisk alibi" som trolig forvirrer mer enn det forklarer.

Den første regneoppgaven i matematikk lister opp åtte situasjoner og spør i hvilke tilfeller en vektor vil beskrive situasjonen best. Oppgaven utfordrer elevene på om de kjenner definisjonen av en vektor og på relasjoner mellom vektor og skalar.

Perjési (2003) hevder at en kompleks og dyp forståelse av vektorer er påkrevd for å forstå vektorregning. *Giga* ser ut til å tilstrebe dette. Boka innleder med et eksempel der tre snorer er festet i en liten ring. Ole, Marit og Ahmed trekker i hver si snor med lik kraft og i hver sin retning. Teksten er ledsaget av en skisse. Elevene får presentert et problem som de oppfordres til å diskutere, de inviteres til å mene noe kvalifisert om virkningen hva som skjer. På neste side blir vi bedt om å tenke oss at Ole og Marit sine krefter erstattes med en kraft som virker i motsatt retning av Ahmed sin kraft. Stegvis ledes elevene fram til vektorsum, "Resultantkraften faller sammen med diagonalen i parallellogrammet ABCD, både når det gjelder retning og størrelse." (Andersen m fl, 2007,

s. 48). Introduksjonen til vektorer samsvarer her med Fischbeins (1994) poeng, at elevenes intuitive forståelse må kobles til den formelle matematikken for å forebygge misoppfatninger. Eksempelet kategoriseres som høynivå arbeid med prosedyren vektoraddisjon etter parallellogrammetoden. Ingen av de andre lærebøkene har en tilsvarende introduksjon. *Giga* definerer skalar og lister opp noen eksempler. Ingen av oppgavene i boka belyser relasjoner mellom vektor og skalar.

Tittelsiden til vektorkapitlet i *Paralleller* viser to personer som trekker store pulker bortover en stor flate, fotografen er den norske polfareren Børge Ousland. Situasjonen er svært relevant, men teksten refererer ikke til bildet. Innledningsteksten gir eksempler på størrelser som er bestemt av et måltall og en målenhet, for deretter å gi eksempler på størrelser der vi også må oppgi retning. Forskjellen på vektorer og skalarer presiseres klart og greit. Den første øvingsoppgaven spør om hvilke av åtte ulike størrelser som er vektorer og hvilke som er skalarer, oppgaven utfordrer elevene på definisjonen av vektor.

"Vektor og skalar" er overskriften i *Sinus*. Her er mye tekst. Først ramser boka opp flere ulike eksempler, deretter går den litt nærmere inn på et konkret praktisk eksempel, kreftene som virker når to personer trekker en kasse i hver sin retning. De fleste elevene har trolig intuitive ideer om hva som vil skje. Avsnittet "Vektor og skalar" gjør først oppmerksom på at det fins mange størrelser som ikke har noen retning. Deretter står det at en vektor har to egenskaper: lengde og retning. "Derfor kan vi ikke sette vektoren lik lengden, som bare er den ene egenskapen." (ibid., s. 154). Den første oppgaven i dette læreverket oppgir fem størrelser og spør deretter hvilke av dem som er vektorer og hvilke som er skalarer.

Sigma Σ viser til hastighet på en båt som eksempel på vektor, begrunnelsen er at både størrelse og retning er nødvendig. *Sigma Σ* presenterer dessuten hva en vektor ikke er, "Det er meningsløst å spørre om retningen til en temperatur på 17 °. Altså er temperatur ingen vektor, men et eksempel på det vi kaller skalarer" (ibid., s. 78). Euklid brukte begrepet "mangel" i sine begrepsavklaringer, han sa at en overflate mangler tykkelse, mens ei linje mangler bredde (Lakoff & Núñez, 2000). I følge Euklids terminologi er en skalar en størrelse som mangler retning. Den første oppgaven i dette læreverket utfordrer elevene på om de kjenner definisjonen av vektor ved at de må avgjøre hvorvidt tre ulike størrelser er en vektor eller en skalar.

De fleste bøkene innleder med relevante eksempler på vektorer og de har oppgaver som utfordrer elevene på om de kjenner definisjonen av en vektor og om de kan skille mellom vektor og skalar. Kun *Sinus* og *Giga* påpeker eksplisitt at lengden til en vektor er en skalar.

Trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering

En målsetting med undervisningen om vektorer bør være at trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering av vektorer framstår som tre aspekter ved vektorer (Poynter & Tall, 2005b). Dette åpner for arbeid med prosedyrer på høyt nivå (Stein m fl, 2000), at prosedyrer knyttes sammen med mening og med relaterte begreper.

Kun *Matematikk* presenterer parallellogram-metoden og trekantmetoden som to metoder for å addere vektorer og oppgavene følger opp dette ved at elevene selv må velge metode for å addere vektorer. Dekomponering av vektorer blir kun presentert i *Giga*, som også viser at dekomponering henger sammen med parallellogram–metoden. Denne boka omtaler trekantmetoden i en definisjon under overskriften ”Regneregler for vektorer”. Det står ikke noe om parallellogrammetoden der, til tross for at den ble grundig beskrevet innledningsvis. I oppgavene kan elevene velge mellom trekantmetoden og parallellogrammetoden.

Paralleller illustrerer vektorsum ved et praktisk eksempel, en orienteringsløper som først løper fra A til B og deretter fra B til C. Teksten slår fast at den totale forflytningen er fra A til C. Elevene kan intuitivt være med på dette eksemplet. Fokus er virkningen av to forflytninger, slik Poynter og Tall (2005b) vektlegger. Eksemplet kategoriseres som høynivå arbeid med prosedyren vektorsum etter trekantmetoden. Parallellogrammetoden nevnes, men det framgår ikke at dette er en annen metode for addisjon av vektorer.

Sinus presenterer vektorsum som trekantmetoden under overskriften ”Sum av vektorer”. De velger å presentere vektor som forflytning og det hele er illustrert ved en figur. Parallellogram-metoden inngår kun i et bevis for at den kommutative lov gjelder for addisjon av vektorer. *Sigma Σ* presenterer addisjon av vektorer som trekantmetoden, uten noen separat overskrift. Boka slår fast at den kommutative loven gjelder for vektoraddisjon og parallellogram-metoden er eneste begrunnelse for denne loven. Det er relativt få oppgaver i dette læreverket.

Gjennomgående viser lærebøkene mange eksempler på prosedyrer uten sammenheng, men det finnes ett og annet eksempel som viser høynivå prosedyrekunnskap. Fire av fem læreverk opplyser kun implisitt at trekantmetoden og parallellogram–metoden er to uttrykksformer for vektorsum. Fire av fem læreverk utelater dekomponering av vektorer. En mulig årsak til disse svakhetene er at lærebøkene fokuserer på kompetansemålene i læreplanen, dette kan i så fall tyde på en svakhet ved LK06 (KD, 2006a). I følge LK06 skal elevene kunne regne med vektorer i planet, men addisjon, subtraksjon og dekomponering er ikke eksplisitt nevnt. I lærebøkene er dette i stor grad blitt til arbeid med prosedyrer på lavt nivå, prosedyrer uten sammenhenger (Stein m fl, 2000). En forklaring kan være at læreplanens kompetansemål kun har fokus på prosedyrer og ikke på at prosedyrene skal inngå i en sammenheng. En annen forklaring kan være at ingen begrepsforståelse gjenfinnes i kompetansemålene.

Frivektor

Ordet frivektor finnes verken i læreverkene eller i LK06. Dette kan indikere at norsk matematikkundervisning ikke vektlegger begrepet. En annen forklaring er at bøkene heller har valgt å legge vekt på parallellforskyving av vektorer. Det er ikke uten videre opplagt at to vektorer kan betraktes som ekvivalente, selv om de er lokalisert ulike steder. Man må ha en viss forståelse av dette for at parallellforskyving av vektorer skal gi mening. *Matematikk* refererer til meteorologenes vindpiler, men elevene vet intuitivt at man ikke uten videre kan flytte ei vindpil fra Trøndelag til Øst–Finnmark. Den største bøygen for lærere som underviser om vektorer, ligger i å få elevene til å konstruere det fleksible begrepet frivektor (Poynter & Tall, 2005b).

Fire læreverk presenterer parallellforskyving av vektorer som noe man per definisjon har lov til, noe man foretar seg for å kunne addere vektorer. Ingen av læreverkene tar opp utfordringen som ligger i at dette kan kollidere med elevenes intuitive oppfatning av hva man har lov til i matematikken. Fischbein (1994) hevder at elevenes intuitive ideer vil overskygge de formelle reglene elevene har lært. Derfor er det grunn til å anta at når læreverkene uten videre slår fast at vektorer kan parallellforskyves uten å endre seg, så legger de ikke opp til brobygging mellom formelle regler og elevenes intuitive idéer. Dette kategoriseres som prosedyrekunnskap på lavt nivå (Stein m fl, 2000).

Sinus bruker en del plass på et eksempel der Mette ror over ei elv. Eksemplet er ledsaget av to oversiktlige figurer. Mette starter med kurs rett mot et mål som ligger oppstrøms på motsatt elvebredd, og figurene viser startsted, hvor hun landet og hvor hun hadde tenkt seg. Strømmen i elva er representert ved en rød vektor midt i ei blå elv, og forflytninga er representert ved vektorer. Her kan strømmen danne grunnlag for et intuitivt frivektorbegrep, eksemplet kategoriseres som høynivå prosedyrekunnskap (Stein m fl, 2000). Eksemplet presenteres imidlertid på slutten av avsnittet om sum av vektorer, fem sider etter at boka har slått fast at to vektorer er like hvis de har samme retning og samme lengde. Neste avsnitt i boka heter vektordifferanse og her brukes robåteksemplet en gang til. Her presenteres sum og differanse av vektorer som to sider av samme sak.

Filmen *Vektorer i klatring*

I følge Perjési (2003) er det vanskelig å illustrere vektorregningens begreper kun ved hjelp av tavle og kritt. En klatrefilm har andre muligheter enn læreboka for å illustrere begrepet vektor. Klatring er en fysisk aktivitet der hvert flytt handler om problemløsning: hvordan skal kroppen posisjoneres, slik at hender og føtter ikke glir av hånd- og fottak? Klatrere flest tenker ikke geometri når de klatrer. Det er ikke uten videre opplagt at disse situasjonene kan utgjøre et velegnet grunnlag for undervisning om vektorer. Klatrekonteksten henvender seg primært til elever med klatreerfaring. Fra de første innendørs klatreveggene i Norge dukket opp på 1980-tallet, har slike vegger blitt stadig mer vanlig. Mange ungdommer har forsøkt klatring på skolen eller i lag med kamerater.

Læreboka forventes å inneholde eksempler fra ulike kontekster og et representativt utvalg av oppgaver. Filmen går i dybden på en bestemt kontekst og der fins ingen regneoppgaver. Filmen blir analysert ut fra samme kriterier som læreverkene.

Filmen er organisert på det viset at den først viser hva som skjer i tre ulike klatreepisoder og deretter søker den å forklare hvorfor det gikk som det gikk. Videoen fryser levende bilder og tegner i neste omgang vektorer på disse stillbildene. Her bruker filmen en annen tilnærming til vektorer enn lærebøkene. Elever uten klatreerfaring får filmen presentert som en demonstrasjon av hva som kan skje når man klatrer. Et slikt demonstrasjonsforsøk vil ikke ha samme verdi som hvis elevene fikk utføre eksperimentet selv. Fordelen med filmen er at elevene kan se den om igjen i eget tempo og så mange ganger de selv vil. Valdermo (1989) diskuterer naturfagundervisning. Han hevder at læringsutbyttet av demonstrasjoner kan økes ved å legges nær opp mot intensjonene med elevforsøk. Dette fordi en stor fordel ved demonstrasjoner er lærerens mulighet for å styre og kontrollere det som skjer. Filmen styrer oppmerksomheten mot tre utvalgte situasjoner og styrer videre oppmerksomheten mot ulike måter å se disse situasjonene på.

Definisjon av vektor. Relasjoner mellom vektor og skalar

Ungdommene presenter en definisjon etterfulgt av to praktiske eksempler. En vektor er definert som et linjestykke med retning, og på værmeldinga er vindstyrken og vindretninga alltid illustrert ved vektorer. En årsak til at ungdommene valgte vind som eksempel, kan være at deres skole bruker læreverket *Matematikk*. Vi får vite at kraft også er vektor og at du finner det når du klatrer. De utdyper dette ved å si at tyngdekrafta trekker deg nedover, mens du holder deg mot veggen ved kraft. I likhet med flere av lærebøkene forteller heller ikke filmen at lengden av en vektor er en skalar.

Filmens *fokus 1* er at vektorer har retning. I en av sekvensene faller klatreren fra et overheng, og pendler deretter fra side til side. Ved andre gangs visning av denne sekvensen fryser bildet og tilskueren blir spurt "Da hun falt, hvorfor falt hun ikke rett ned?" Både her og i flere andre sekvenser er vektorpiler tegnet inn på bildene. Den formelle matematikken som filmen presenterer, bygger på at tilskueren er innforstått med hva som skjer. Her er det sammenheng mellom den formelle matematikken og tilskuernes intuitive ideer, i tråd med Fischbein (1994).

Trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering

Fokus 2 er parallellogram-metoden, etterfulgt av *fokus 3*, trekantmetoden og *fokus 4*, dekomponering. Dette blir behandlet som tre aspekter ved samme sak slik Poynter og Tall (2005b) anbefaler. Situasjonene blir presentert flere ganger, men med ulikt fokus.

Parallellogram-metoden presenteres først. Krafta fra tauet og tyngdekraften blir tegnet opp og lagt sammen, og tilskueren er innforstått med resultatet på forhånd. I denne konteksten stiller ikke parallellogram-metoden krav til akseptering av at vektorer kan parallellforskyves. Eksemplet kategoriseres som arbeid med prosedyren vektoraddisjon etter parallellogrammetoden på høyt nivå (Stein m fl, 2000). Deretter presenteres trekantmetoden som en annen måte å tegne opp parallellogrammetoden på. Ved å parallellforskyve vektorer får vi samme resultat som ved parallellogram-metoden. På det viset kan trekantmetoden til en viss grad samsvare med elevenes intuitive ideer om resultatet av en parallellforskyving. Dekomponering presenteres ved horisontale og vertikale komponenter av krefter, der seeren intuitivt vet hva som skjer.

Relasjoner mellom vektor og vinkel

Fokus 5 behandler relasjoner mellom vektor og vinkel. *Fokus 5* bygger videre på relasjoner mellom dekomponering og parallellogram-metoden. Virkningen av at en vinkel endres blir problematisert, og filmen stiller noen spørsmål som går på forståelsen av vektorer. En vektors retning relateres til begrepet vinkel. Dette samsvarer med Poynter og Tall (2005b) sitt poeng at en målsetting med undervisningen må være å skape en forståelse av relasjoner mellom begreper. Mitchelmore og White (2000) hevder at vinkler der begge vinkelbein er synlige, er lettest å begripe. I en klatrekontekst fins det mange vinkler der begge vinkelbeina er synlige, men i noen situasjoner er kun ett vinkelbein synlig. Når filmen fokuserer på en bestemt vinkel, blir bildet frosset og vinkelen tegnet opp, slik at vinklene får to synlige og tydelige vinkelbein. Her benytter filmen seg av muligheter som læreverkene ikke har.

Oppsummering og konklusjon

De fem læreverkene introduserer vektorer via eksempler, enten vektor som forflytning eller vektor som kraft. Alle gir eksempler på vektorer og skalarer og relasjoner mellom de to begrepene. En av bøkene gir et konkret eksempel på hva en vektor ikke er. To bøker påpeker eksplisitt at lengden til en vektor er en skalar. *Giga* skiller seg fra øvrige bøker og filmen ved at de tar utgangspunkt i et problem som elevene inviteres til å mene noe kvalifisert om. De starter ikke med en definisjon, men med å spørre hva som skjer i en gitt situasjon. Dette tolkes som arbeid med prosedyrer på høyt nivå.

Klatrekonteksten er egnet til å vise vektor som kraft eller vektorsum ved parallellogram-metoden. Den gir ikke samme muligheter for å vise trekantmetoden som resultat av to forflytninger slik som for eksempel orienteringsløperen i *Paralleller* eller robåteksemplet i *Sinus*. Filmen belyser heller ikke frivektor.

De fleste bøkene inneholder oppgaver som handler om definisjon av vektor og om elevene kan skille mellom vektor og skalar. Oppgavene i *Matematikk* oppmuntrer til diskusjon rundt relasjoner mellom begrepene vektor og skalar. Dette samsvarer med Poynter og Tall (2005b) sitt mål at undervisningen bør skape en forståelse av relasjoner mellom begrep.

Introduksjonseksemplet i *Giga* og robåteksemplet i *Sinus* er svært velegnet til å vise henholdsvis parallellogram-metoden og trekantmetoden/frivektor. En styrke ved de to eksemplene er at de ikke forutsetter at elevene har akseptert at vektorer kan parallellforskyves. Elevenes intuitive ideer knyttes til grunnleggende forståelse av prosedyrer for addisjon av vektorer. Bøkene kunne gjort mer ut av disse to eksemplene. De fem lærebøkene har det til felles at de mer eller mindre slår fast at vektorer kan parallellforskyves uten å utdype dette nærmere der og da.

Kun *Matematikk* presenterer trekantmetoden og parallellogram-metoden eksplisitt som to metoder for addisjon av vektorer og kun *Giga* tar opp dekomponering. Ingen av bøkene presenterer relasjoner mellom trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering. En målsetting med undervisningen bør være å skape en begrepsforståelse som inneholder forståelse av disse tre aspektene ved vektorbegrepet (Poynter & Tall, 2005b). Årsaken er trolig at lærebokforfatterne har fokusert på kompetansemålene i læreplanen. Det er rimelig å anta at forfatterne har hatt en intuitiv oppfatning av at dette er viktig, selv om det ikke står oppført eksplisitt som læreplanmål. Det kan forklare hvorfor det synes tilfeldig hvilken bok som har lyktes med hva.

Klatrefilmen viser dynamiske framstillinger av vektorer i en bestemt kontekst. Ei bok kan ikke gi tilsvarende dynamiske framstillinger. Filmen går i dybden på noen få situasjoner, mens lærebøkene viser en rekke eksempler fra ulike kontekster. Eksemplene fra klatrekonteksten inngår i den daglige virkeligheten til flere elever. Filmen bygger på elevenes intuitive ideer fordi publikum er innforstått med hva som skjer. Her blir matematikk brukt som redskap for å beskrive, begrunne og analysere det som foregår.

En styrke ved filmen er at den viser relasjoner mellom parallellogram-metoden og dekomponering, i tillegg til at trekantmetoden blir presentert som en variant av parallellogrammetoden. Sammenhenger mellom begrepene vektor og vinkel blir grundig belyst i *fokus 5*, relasjoner mellom begreper er viktig i følge Poynter og Tall (2005b). Virkningen av at en vinkel endrer størrelse blir problematisert, og elevene blir oppfordret til å finne ut hva som skjer. Elevene blir her utfordret til matematisk tenking med utgangspunkt i sine intuitive ideer. De kan ikke uten videre anvende en standardprosedyre for å finne løsningen. Ingen lærebøker viser relasjoner mellom vinkel og vektor, og på dette området ser det ut til at filmen kan supplere lærebøkene. Dersom relasjoner mellom begrepet vektor og begrepene skalar og vinkel inngår i læreplanens kompetansemål, vil trolig elevene lykkes bedre med å utvikle et vektorbegrep.

LK06 (KD, 2006c) presenterer måling av vinkler som læringsmål i fjerde klasse, uten at elevene har lært noe om hva en vinkel er (Fyhn, 2007). Det kan være vanskelig å måle noe man ikke vet hva er. Trolig finnes en tilsvarende svakhet i læreplanmålene med hensyn til vektorer: Det kan være vanskelig å regne med vektorer uten å ha forstått at der er sammenheng mellom de tre prosedyrene trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering. Et forslag til forbedring av introduksjonen til vektorer er at fokus på sammenhenger mellom disse tre prosedyrene inngår i læreplanens kompetansemål. Forståelse for slike sammenhenger er prosedyrekunnskap på høyt nivå. I følge Star (2005) mangler vi imidlertid forskningsresultater på hvordan fokus på ulike aspekter ved prosedyrekunnskap vil slå ut.

Fire av fem lærebøker starter kapitlene med en oversikt over aktuelle kompetansemål i læreplanen. Kompetansemålene i forhold til vektorer dreier seg først og fremst om regneferdigheter, der står ingen ting om elevenes utvikling av et vektorbegrep. Læreplanens snevre fokus på vektorregning kan være årsaken til at læreverkene ikke forholder seg systematisk til at prosedyrer må settes i en sammenheng. Dette kan forklare hvorfor det er så stort sprik mellom hva de ulike læreverkene vektlegger. Dersom læreplanen også fokuserer på at elevene skal utvikle et vektorbegrep, vil trolig norske elever få en bedre introduksjon til vektorer. Kompetansemålene i læreplanen har kanskje behov for revisjon.

Takk

Jeg vil takke Odd Valdermo og Marit Johnsen-Høines og diverse reviewere for konstruktive innspill i arbeidet med denne teksten. Gunnar Kristiansen og flere andre i matematikkgruppa på mitt institutt har gitt nyttige innspill på slutten.

Referanser

Andersen, S. S. (2003). *Case-studier og generalisering. Forskningsstrategi og design.* Oslo: Fagbokforlaget.

Andersen, T., Jasper, P., Natvig, B. & Viken F. (2007). *Giga. Matematikk R1. Programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram.* Oslo: N.W. Damm & søn AS.

Berthelot, R. & Salin, M.H. (1998). The role of pupil's spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (s. 71–78). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clarke, D. (1996). Assessment. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 327–370). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ekren, T., Guldahl, Ø. & Holst, E. (2007). *Paralleller. Vg2T.* Bekkestua: NKI-forlaget.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Red.) *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (s. 231–245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fyhn, A. B. (in press). The footwork experiment – vectors in climbing. *Proceedings from NORMA 11, The sixth Nordic conference on mathematics education.*

Fyhn, A. B. (2010). Vectors in climbing. *The Montana Mathematics Enthusiast,* 7 (2 & 3), s. 295–306.

Fyhn, A. B. (2009). Vektorer i klatring. *NDLA (Norsk digital læringsarena).* Lastet ned 10.11.2010 fra http://2010.arkiv.ndla.no/nb/node/46168

Fyhn, A. B. (2007). *Angles as tool for grasping space: teaching of angles based on students' experiences with physical activities and body movement* (PhD thesis). Department of mathematics and statistics, University of Tromsø.

Harel, G. & Trgalová,J. (1996). Higher mathematics education. I A. B. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 675–700). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H. & Skrede, P.A. (2007). *Matematikk R1*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective* (PhD thesis). Department of mathematics, Luleå University of Technology.

KD, Kunnskapsdepartementet (2006a). Matematikk for realfag – programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram. I *Kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Lastet ned 26.5.2010 fra http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Studieforberedende/Studiespesialiserende/Programomrade_for_realfag/matematikk_for_realfag.rtf

KD, Kunnskapsdepartementet (2006b). *Læreplan for grunnskole, videregående opplæring og voksenopplæring. Generell del*. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Lastet ned 26.5.2010 fra http://udir.no/upload/larerplaner/generell_del/generell_del_lareplanen_bm.pdf

KD, Kunnskapsdepartementet (2006c). Læreplan i matematikk fellesfag. Kompetansemål. I *Kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Lastet ned 26.5.2010 fra http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=994153&visning=5.

KUD, Kirke- og undervisningsdepartementet (1976). *Læreplan for videregående skole. Del 3A. Studieretning for allmenne fag*. Oslo: KUD og Gyldendal Norsk Forlag.

KUD, Kirke- og undervisningsdepartementet (1985). *Læreplan for videregående skole. Del 3A. Studieretning for allmenne fag*. Oslo: KUD og Gyldendal Norsk Forlag.

KUF, Det kongelige kirke- utdannings- og forskningsdepartement (1991). *Læreplan for videregående skole. Del 3A. Studieretning for allmenne fag. Prøveutgave*. Oslo: KUF og Gyldendal Norsk Forlag.

KUF, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (2000). *Læreplan for videregående opplæring. Matematikk. Studieretningsfag i studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag*. Oslo: KUF.

KUF, Det kongelige utdannings- og forskningsdepartement (2004). St.meld. nr. 30 (2003–2004). *Kultur for læring*. Lastet ned 26.9.2011 fra http://www.regjeringen.no/Rpub/STM/20032004/030/PDFS/STM200320040030000DDDPDFS.pdf

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Red.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education* (Vol 4, s. 129–136). Prague: PME.

Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, s. 209–238.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2007). *Sinus R1. Grunnbok i Matematikk Studiespesialiserende program.* Oslo: Cappelen.

Perjési, I. H. (2003). Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 35 (2), s. 43–47.

Poynter, A. & Tall, D. (2005a). *Relating theories to practice in the teaching of mathematics*. Paper presentert ved CERME 4, Spania.

Poynter, A. & Tall, D. (2005b). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. I D. Hewitt & A. Noyes (Red.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education*, *University of Warwick* (s 128–135). Lastet ned 26.5.2010 fra http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip25-1/BSRLM-IP-25-1-17.pdf

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W. et al. (2007). *Sigma Σ R1. Matematikk.* Oslo: Gyldendal Undervisning.

Skott, J. Hess, K. & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende. Delta Fagdidaktik.* Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), s. 404–411.

Stein, K. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction. A casebook for professional development.* Reston: NCTM.

Utdanningsdirektoratet, Udir (2005). *Hva er Utdanningsdirektoratet?* Lastet ned 15.6.2011 fra http://www.udir.no/Artikler/_toppmeny/Om-direktoratet/

Valdermo, O. (1989). Demonstrasjoner i naturfagundervisningen. I A. Kvam, I. O. Størkersen & O. Valdermo (Red.), *Metodisk veiledning i naturfag.* Oslo: Gyldendal norsk forlag A/S og Rådet for videregående opplæring.

Wikipedia (2009). *Vektor.* Lastet ned 26.5.2010 fra http://no.wikipedia.org/wiki/Vektor

Øgrim, O., Ormestad, H. & Lunde, K. (1976). *Rom – Stoff – Tid. Fysikk for gymnaset. Bind 1 Mekanikk* (5. opplag). Oslo: J. W. Cappelens forlag A-S.

Notes

1 Læreplanen for studieforberedende realfag kalles R1 andre år på videregående skole i læreplanen av 2006. Realfag er en særnorsk betegnelse på fag som matematikk, naturvitenskap og informatikk. 2T er en kortere versjon av R1 og er lite brukt. Læreplanen for 2T og R1 har identiske kompetansemål mht vektorer.

2 Matematikk for elever som velger fordyping i matematikk og naturfag andre året på videregående skole, blir kalt 2MN i læreplanene av 1976 og 1985.

3 Matematikk for elever som velger fordyping i realfag andre år på videregående skole, blir kalt 2MX i læreplanen av 1994.

Anne Birgitte Fyhn

Anne Birgitte Fyhn har PhD i matematikkdidaktikk fra *det matematisk-naturvitenskapelige fakultet* (nå: NT-fakultetet) ved Universitetet i Tromsø, Norge. Hun er tilsatt som førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Universitetet i Tromsø. Hun leder forskningsprosjektet *Strukturer og mønstre i samisk ornamentikk som basis for undervisning i matematikk på ungdomstrinnet*. Prosjektet er finansiert av Norges Forskningsråd.

anne.fyhn@uit.no