Matematikopfattelser hos 2g'ere: fokus på de 'tre aspekter'

Uffe Thomas Jankvist

Med udgangspunkt i de såkaldte 'tre aspekter' fra den danske gymnasiale bekendtgørelse for matematik anno 1987 analyserer artiklen 2g'eres (17–18 årige) opfattelser af faget matematik. Mere præcist er der tale om faget matematiks historiske udvikling, dets anvendelser i samfundet og dets indre strukturer. Det undersøges i artiklen hvor de 'tre aspekter' oprindelig stammer fra og hvordan de går igen i såvel KOM-rapporten fra 2002 som i 2007-bekendtgørelsen. Endvidere undersøges det med udgangspunkt i en enkelt adspurgt 2g-klasse, hvordan denne klasses elever synes at indfri den ny bekendtgørelses mål svarende til de 'tre aspekter'. Resultaterne af denne undersøgelse sammenlignes med en ældre og i nogen grad tilsvarende undersøgelse fra 1980 og forskelle og ligheder i resultaterne diskuteres.

I foråret og sommeren 2007 foretog jeg som led i min ph.d. et undervisningsforsøg i en 2g-klasse. Forsøget var et studie af, hvorledes man i overenstemmelse med den ny bekendtgørelse for gymnasiet af 2007 kan efterleve kravene om, at eleverne skal udvikle en forståelse for matematikkens udvikling, såvel internalistisk som eksternalistisk, og dens rolle i samfund og kultur til forskellige tider. Kravet om matematikhistoriske elementer i den gymnasiale matematikundervisning er ikke i sig selv et nyt tiltag, det indgik også i den tidligere bekendtgørelse af 1987. Nye er derimod de mere eksplicitte krav som stilles til inddragelsen af de matematikhistoriske elementer og den måde som faget fremlægges på. Eksempelvis hedder det i det indledende afsnit om "identitet" i 2007-bekendtgørelsen:

Uffe Thomas Jankvist
Roskilde Universitet

Jankvist, U. T. (2008). Matematikopfattelser hos 2g'ere: fokus på de 'tre aspekter'. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13 (2), 7–47.

> Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.
>
> (Undervisningsministeriet, 2007)

Som det fremgår er det ikke kun de matematikhistoriske elementer der lægges vægt på, også matematikkens anvendelse inden for andre fagområder, den rolle den spiller for samfundet og dets borgere samt matematikkens abstrakte natur og teoriopbygning er elementer i beskrivelsen af faget matematik. Heller ikke disse elementer er nødvendigvis nye, det nye er igen de mere eksplicitte krav til inddragelsen af dem. Faktisk kan man i den ovenstående beskrivelse fremdrage træk der er nært beslægtede med de såkaldte 'tre aspekter' i de tidligere bekendtgørelser. Disse var nærmere bestemt *det historiske aspekt*, *modelaspektet* og aspektet omhandlende *matematikkens indre strukturer*. Måden hvorpå disse tre aspekter mere præcist figurerer i den ny bekendtgørelse, deres historiske ophav og deres tilstedeværelse i den såkaldte KOM-rapport (Niss & Jensen, 2002) er i sig selv en undersøgelse værdig. Ikke mindst fordi KOM-rapporten formentlig har tjent som inspirationskilde til udformningen af den ny bekendtgørelse.

I undervisningsforsøget i den pågældende 2g-klasse skulle eleverne besvare et spørgeskema og nogle af eleverne skulle efterfølgende interviewes. I forbindelse med udformningen af spørgeskemaet gjorde min ph.d.-vejleder Mogens Niss mig opmærksom på en tidligere undersøgelse (Christensen & Rasmussen, 1980), hvori 2g'ere også var blevet adspurgt om blandt andet deres syn på og forståelse af matematikkens historiske udvikling. Det drejede sig om en studenterrapport på matematikoverbygningen ved Roskilde Universitetscenter fra 1980, hvor ideen var at afdække matematikopfattelserne hos 2g'ere på de forskellige grene som gymnasiet dengang var opdelt i. Spørgsmålene i denne undersøgelse kredsede i høj grad om det der syv år senere skulle blive kendt som de 'tre aspekter' i 1987-bekendtgørelsen. For at kunne sammenligne resultaterne af min undersøgelse med resultaterne fra 1980 besluttede jeg mig for at udvide spørgeskema- og interview-delen af min egen undersøgelse til også at omfatte elementer af hvad der svarer til de to andre aspekter; modelaspektet og matematikkens indre strukturer.

Sigtet med denne del af undersøgelsen blev således dobbelt: For det første er der tale om en undersøgelse af i hvilken grad 2g'erne lader til at 'indfri' den ny bekendtgørelses krav svarende til de 'tre aspekter', eller med andre ord i hvilken grad deres forståelse af matematiks 'identitet' stemmer overens med bekendtgørelsens beskrivelse heraf. For det andet er der tale om en sammenligning af resultaterne fra de to undersøgelser for således, at se om 2g'eres syn på sagen lader til at have ændret sig, nu hvor de 'tre aspekter' i den ene eller den anden form har figureret i det danske gymnasium i henved 20 år.

Tre spørgsmål

Omdrejningspunkterne for denne artikel kan således sammenfattes til følgende tre spørgsmål:

1. Hvorfra stammer ideen til de 'tre aspekter' og hvordan går disse aspekter igen i den ny gymnasiebekendtgørelse for matematik?
2. I hvilken grad lader de adspurgte 2g'ere til at 'indfri' kravene svarende til de 'tre aspekter' i den ny gymnasiebekendtgørelse for matematik?
3. Hvilke forskelle og ligheder er der imellem de sammenlignelige besvarelser fra 1980 og svarene som 2g-klassen gav i 2007? Hvis der er bemærkelsesværdige forskelle, hvad kan de da skyldes?

Metodiske overvejelser

Inden besvarelsen af disse spørgsmål er det hensigtsmæssigt at redegøre for nogle af omstændighederne omkring de to spørgeskema- og interview-undersøgelser såvel som det er på sin plads at reflektere lidt over visse af de metodiske valg.

Den i 2007 adspurgte 2g-klasse var en klasse med matematik på højt niveau på den første årgang under den ny gymnasieordning. Undersøgelsen foregik ved at hele klassen bestående af 26 elever udfyldte et spørgeskema. På baggrund af besvarelserne af dette blev der udvalgt 10–12 elever hvis holdninger synes repræsentative for klassen. Disse elever blev efterfølgende interviewet individuelt om deres besvarelser.

Besvarelse af spørgsmål 2, og hvad der skal forstås ved at 'indfri' kravene svarende til de 'tre aspekter', bygger i høj grad på besvarelsen af spørgsmål 1. Hermed tænker jeg specielt på de i KOM-rapporten opstillede normative mål svarende til de 'tre aspekter', idet disse kan tjene som referenceramme for i hvilken grad de faglige mål svarende til de 'tre aspekter' i den ny bekendtgørelse opfyldes i en konkret undervisning.

I 1980-undersøgelsen blev der interviewet cirka 250 elever i grupper af 4–6 fra i alt otte gymnasier (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 7–8). For at kunne sammenligne resultaterne fra 1980 med de fra 2007 skal jeg udelukkende koncentrere mig om de 65 ud af de 250 elever som gik på matematik-fysik linien, da denne minder mest om matematik på højniveau, som 2g-klassen havde i 2007. Sammenligningen af resultaterne fra 1980 og 2007 vil blive foretaget såvel på et overordnet niveau som på helt konkret spørgsmålsniveau, hvilket er muligt da mange af spørgsmålene stort set er ens. Da begge undersøgelser, og specielt den fra 2007, er kvalitative og bygger på et forholdsvist lille udsnit af den samlede population af 2g'ere er det svært at sige noget om i hvilke grad resultaterne fra de to undersøgelser generelt set er repræsentative. Det som undersøgelsen fra 2007 gør er at nedsænke en 'sonde' i en given 2g-klasse for på den måde at se, hvad der er på færde med hensyn til elevernes matematikopfattelser. De fremlagte resultater i denne artikel skal derfor ses i dette lys.

Men lad mig begynde med den faktiske formulering af 'de tre aspekter', da det jo er omkring disse denne artikel roterer.

De 'tre aspekter' og deres ophav

De tre aspekter, som blev introduceret i bekendtgørelsen af 1987 for den gymnasiale matematikundervisning, lød følgende formulering:

> i. Det historiske aspekt
>
> Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.
>
> ii. Modelaspektet
>
> Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.
>
> iii. Matematikkens indre strukturer

> Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.
>
> (Undervisningsministeriet, 1987, § 20)

Behandlingen af aspekterne skulle ske i forbindelse med dækningen af de matematiske hovedemner, som varierede afhængig af niveau, samt igennem nogle særligt tilrettelagt undervisningsforløb omhandlende et eller flere af aspekterne. I de særlige forløb var der også mulighed for at inddrage supplerende stof for på den måde at bringe aspekterne på banen. På obligatorisk niveau hed det sig, at omfanget af sådanne forløb skulle være på mindst 20 lektioner, mens der på højniveau var mulighed for at belyse aspektet igennem et valgfrit forløb som skulle være på cirka 25 lektioner.

De tre aspekter kan spores tilbage til slutningen af 1970'erne, nærmere bestemt 1979 hvor de blev fremlagt af Mogens Niss på to efteruddannelseskurser, i Magleås og Ry, for gymnasielærere i matematik. Året efter blev de beskrevet i en artikel i Normat ved navn *Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990* (Niss, 1980). Her optræder de tre aspekter som tre af i alt fire genstande:

> Genstand nr. 1. Matematikundervisningens tilstedeværelse i skolen, dens indretning, rammer og baggrund. [...]
>
> Genstand nr. 2. Matematiske modeller og modelbygning for konkrete ikke-matematiske problemstillinger, herunder samspillet mellem disses egenskaber og modellens egenskaber og mulighederne, og begrænsningerne i disse, for ud fra modellen at udsige noget om virkeligheden. [...]
>
> Genstand nr. 3. Matematikkens begreber, metoder og opbygning, undersøgt med henblik på fagets sammenhæng. [...]
>
> Genstand nr. 4. Matematikkens udvikling og samfundsmæssige placering, anskuet under historiske synsvinkler.
>
> (Niss, 1980, s. 55–56)

Det historiske aspekt svarer således til genstand nr. 4. Motivationen for indførelsen af denne genstand er ifølge (Niss, 1980, s. 56), at den traditionelle matematikundervisning ofte formidler matematik som værende "et udviklingsløst, færdigt fag, løsrevet fra tid og rum og samfund, bestående af et sæt begreber, resultater og metoder, eventuelt ledsaget af eksempler på anvendelser", hvilket udstyrer eleverne med "et matematikbillede uden fylde i form af bindinger til kulturelle, samfundsmæssige og historiske omgivelser, matematikken bliver 'flad' og statisk". Niss påpeger, at det er vigtigt overfor eleverne at illustrere såvel den indre som den ydre påvirkning af matematikkens udvikling. Selve begrundelsen for genstand nr. 4 formulerer han som følger:

> [M]atematikken har gennemløbet og gennemløber stadig forskellige former for udvikling. Gøres disse udviklinger ikke til genstand for undervisning, induceres et forvrænget matematikbillede; ikke at jeg mener, at der eksisterer et færdigt, korrekt matematikbillede, som skal serveres, men en bortskæring af disse aspekter reducerer matematikken til en én- eller to-dimensional projektion af den flerdimensionale organisme, den faktisk er. (Niss, 1980, s. 56)

Modelaspektet svarer åbenlyst til genstand nr. 2. Indførelsen af denne genstand knytter sig til det af Niss formulerede ny tre-delte formål med den gymnasiale matematikundervisning – et formål der skulle gøre op med det ældre og ofte benyttede 'personudviklende' formål – hvori det hed:

> [1.] at eleverne skal erhverve *kendskab* til og *forståelse* af matematikkens anvendelse, og baggrunden for den i ikke-matematiske forbindelser.
>
> De skal herunder opnå forståelse af hvilke faktorer, såvel ved matematikkens tankegange, begreber og opbygning, som uden for matematikken selv, der spiller en rolle for denne anvendelse, dens muligheder og begrænsninger.
>
> [2.] at eleverne skal kunne foretage *kritiske analyser og bedømmelser* af gjorte anvendelser af matematik i ikke-matematiske forbindelser.
>
> [3.] at eleverne skal opnå erfaring med *selvstændigt* og på ikke-receptagtig måde at *anvende* matematik som middel ved behandlingen af ikke-matematiske problemstillinger. (Niss, 1980, s. 54)

Begrundelsen for genstand nr. 2 er således "kontakten mellem matematik og 'virkelighed'", hvorved forstås alt hvad der ligger uden for matematikken selv, en kontrakt der netop kommer i stand via matematiske modeller (Niss, 1980, s. 55).

Matematikkens indre strukturer, det tredje aspekt, svarer til genstand nr. 3. Argumentationen for denne genstand grunder ifølge Niss i den gennemslagskraft som matematikken har overfor ikke-matematiske problemstillinger og specielt matematikkens deduktive væsen som er et afgørende og fundamentalt moment i denne sammenhæng. Niss fortsætter:

> Dette moment må tages i betragtning af en matematikundervisning, der skal tilgodese de ovenfor opstillede formål, og dette kan ikke ske på rimelig måde, hvis de matematiske begreber og resultater fremstår og formidles som isolerede enkeltbrokker uden et vist minimum af teoretisk sammenhæng. (Niss, 1980, s. 55)

Af denne årsag gøres kravet om indblik i og forståelse af fagets sammenhæng til en genstand for den gymnasiale matematikundervisning. Niss (1980) påpeger dog, at fagets sammenhæng selvfølgelig ikke kan belyses i sin fulde helhed og at man derfor må belave sig på at illustrere sammenhængen 'regionalt' frem for 'globalt', men stadig på en sådan vis at behandlingen af de enkelte 'regioner' er eksemplarisk.

Den daværende debat om præmisserne for matematikundervisningen i gymnasiet og måden denne skulle forvaltes på, herunder de tre aspekter, udsprang blandt andet af det faktum, at gymnasiet havde "ændret sig fra at være et elitegymnasium til at være en masseuddannelsesskole" samt at matematikundervisningen ikke længere kun blev givet til elever "for hvem gymnasiet er en forgård til videregående studier i naturvidenskab og teknik" (Niss, 1980, s. 58). På daværende tidspunkt stammede den aktuelle bekendtgørelse for gymnasiet fra 1971. I 1984 kom der en ny bekendtgørelse. For matematisk linie var der ikke de store forskelle fra 1971 udover, at der blev indført en musikfaglig gren samt at lommeregneren fik sit indtog (Pilemann, 1996). For sproglig linies vedkommende kan der imidlertid spores en mindre drejning i retning af en af Niss' fire genstande, idet det hed, at eleverne skulle erhverve sig "kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller" (Undervisningsministeriet, 1984). Ifølge Pilemann (1996) er dette den første gang, at begrebet matematisk model optræder i en bekendtgørelse uden at være direkte koblet til sandsynlighedsregning. Men med gymnasiereformen og bekendtgørelsen for matematik af 4. november 1987 blev tre af de fire genstande, i form af de 'tre aspekter' som allerede omtalt, en del af matematikundervisningen i gymnasiet. Genstand nr. 1 blev imidlertid udeladt. Om dette skyldtes manglende interesse og/eller forståelse for denne genstand i det nedsatte kommissorium er ikke umiddelbart til at sige. Man kan ligeså vel i dag som dengang hævde, at elever har ret til at få at vide, hvorfor de skal lade sig udsætte for en given undervisning, hvorfor matematikundervisningen netop dækker det kernestof den gør, hvorfor den gældende bekendtgørelse ser ud som den gør, om den kunne se anderledes ud, etc. Som Niss selv påpeger er dette tilmed en måde at opfylde formålene, som formuleret af Niss ovenfor, med selve matematikundervisningen på:

> Jo flere lag og nuancer der indgår i elevernes matematikopfattelse, jo mere reflekteret og brugbar for dem selv bliver den. Endelig mener jeg, at lærerne bør vænnes til, i højere grad end det normalt ses, at argumentere med kortene på bordet og offensivt om deres fag.
>
> (Niss, 1980, s. 55)

Omkring 2004 gennemgik gymnasiet imidlertid en ny reform, og for matematiks vedkommende var ændringerne i nogen grad afstedkommet af afrapporteringen fra det af Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet financierede projekt om *Kompetencer og matematiklæring* – KOM-projektet.

KOM-rapporten og bekendtgørelsen af 2007

I 2002 blev KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002), KOM-projektets afsluttende rapport, udfærdiget (kan findes på http://nyfaglighed.emu.dk/kom/ eller http://pub.uvm.dk/2002/kom/). De tre aspekter, eller de tre af de fire genstande, er i forskellige sammenhænge at genfinde i KOM-rapporten.

KOM-rapporten opremser i alt otte væsensforskellige "matematiske kompetencer" samt tre former for "overblik og dømmekraft" vedrørende matematik som fagområde. Disse er undertiden også blevet omtalt som de otte førsteordens kompetencer og de tre andenordens kompetencer (Niss, 1999). De tre former for overblik og dømmekraft ligner til forveksling de 'tre aspekter' som disse kendes fra 1987-bekendtgørelsen. For det almene gymnasiums vedkommende henvises der da også direkte til de tre aspekter i den dengang gældende bekendtgørelse (Niss & Jensen, 2002, s. 267–269). Om den form for overblik og dømmekraft der omhandler "matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning" hedder det:

> Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.
>
> [...]
>
> Den form for overblik og dømmekraft, der her er tale om, må ikke forveksles med kendskab til 'matematikkens historie' anskuet som et selvstændigt emne. Fokus er på selve det forhold, at matematikken har udviklet sig, i kulturelle og samfundsmæssigt betingede

> miljøer, og på de drivkræfter og mekanismer som er ansvarlige for denne udvikling. På den anden side er det oplagt, at hvis overblik og dømmekraft vedrørende denne udvikling skal have soliditet, må de hvile på konkrete matematikhistoriske eksempler.
>
> (Niss & Jensen, 2002, s. 68)

Den her ovennævnte form for overblik og dømmekraft ligner altså i alt væsentligt det historiske aspekt. Modelaspektets pendant hedder i KOM-rapporten "matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder" og herom hedder det:

> Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.
>
> (Niss & Jensen, 2002, s. 67)

Selve det at være i stand til selv at modellere er del af en selvstændig kompetence, men det skal jeg vende tilbage til senere. Først skal vi se sidestykket til aspektet om matematikkens indre strukturer kaldet "matematikkens karakter som fagområde":

> Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.
>
> (Niss & Jensen, 2002, s. 69)

Som ovenfor antydet udgør de tre former for overblik og dømmekraft ikke i sig selv kompetencer, til dette formål er de for generelle og retter sig i modsætning til kompetencerne snarere mod matematikken som fagområde end mod matematiske situationer. Niss og Jensen (2002, s. 66) formulerer det selv som, at der er tale om en "type 'aktive indsigter' vedrørende matematikkens karakter og rolle i samfundet" og at "disse indsigter udstyrer de, der besidder dem, med et sæt synsmåder, som giver overblik og dømmekraft over for matematikkens forbindelse til forhold og tilskikkelser i natur, samfund og kultur". Matematiske kompetencer derimod "består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå" eller med andre ord en slags "indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer" (Niss & Jensen, 2002, s. 43).

KOM-rapporten inddeler de otte kompetencer i to grupper eller to kapaciteter som elever ønskes at skulle besidde; (1) "at spørge og svare i og med matematik"[1] og (2) "at omgås sprog og redskaber i matematik". Gruppe 1 går ud på og indeholder følgende fire kompetencer:

> (a) at kunne stille sådanne [i- og med-matematik] spørgsmål og have blik for typen af svar, som kan opnås (tankegangskompetence),
>
> (b) at være i stand til selv at svare på sådanne spørgsmål, både i og med matematik (henholdsvis problembehandlingskompetence og modelleringskompetence), samt
>
> (c) at kunne forstå, bedømme og frembringe argumenter for svar på matematiske spørgsmål (ræsonnementskompetence).
>
> (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

Gruppe 2 indeholder de øvrige kompetencer og går ud på:

> (a) at være i stand til at omgås forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold (repræsentationskompetence),
>
> (b) at kunne håndtere de særlige repræsentationer som udgøres af matematisk symbolsprog og formalisme (symbol- og formalismekompetence),
>
> (c) at kunne kommunikere i, med og om matematik (kommunikationskompetence), samt
>
> (d) at kunne betjene sig af og forholde sig til diverse tekniske hjælpemidler for matematisk virksomhed (hjælpemiddelkompetence). (Niss & Jensen, 2002, s. 46)

Det er vigtigt at forstå at selv om der er tale om otte kompetencer og disse er forholdsvis velafgrænsede i forhold til hinanden, så betyder det ikke, at kompetencerne er uden forbindelse til hinanden. Faktisk er situationen ofte den lige modsatte, nemlig at en kompetence ikke kan opnås og besiddes i isolation fra andre kompetencer (Niss & Jensen, 2002). Eksempelvis vil de fire kompetencer i gruppe 1 formentlig i en eller forstand være tilstede i en given modelbygger-situation.

Jeg beskriver ikke samtlige otte kompetencer i detaljer, men skal istedet fokusere på dem der spiller sammen med de tre former for overblik og dømmekraft, det vil sige hvad der svarer til de 'tre aspekter'. Matematikkens karakter som fagområde er ifølge Niss og Jensen (2002, s. 69) den form for overblik og dømmekraft som ligger mest i forlængelse af kompetencerne, imidlertid er pointen, "at kun hvis matematikkens særlige karakter som fagområde i sig selv gøres til genstand for belysning og overvejelser, skabes bevidst og artikuleret overblik og dømmekraft". Niss og Jensen fortsætter med at udpege tankegangs-, ræsonnements- og symbol- og formalismekompetencerne som værende de kompetencer der i særlig grad bidrager til at skabe fundamentet for en sådan artikuleret form for overblik og dømmekraft. Overblikket og dømmekraften angående matematikkens faktiske anvendelse går helt naturligt hånd i hånd med modelleringskompetencen, og i nogen grad også de øvrige kompetencer i gruppe 1. Kompetencen og formen for overblik og dømmekraft er dog ikke at forveksle med hinanden. Hvor der med kompetencen er tale om at kunne agere matematisk i en ikke-matematisk situation er der med hensyn til overblik og dømmekraft tale om at kunne forholde sig såvel sociologisk som videnskabsteoretisk til en given anvendelse af matematik. Med hensyn til overblik og dømmekraft angående matematikkens historiske udvikling, så er det ikke oplagt hvilke modstykker denne form for overblik og dømmekraft har iblandt kompetencerne, idet der ikke opereres med en "matematikhistorisk kompetence" (Niss & Jensen, 2002, s. 68). På den anden side kan man jo hævde, at udvalgte matematikhistoriske eksempler kan trække på en hvilken som helst af de otte kompetencer eller et vilkårligt samspil mellem disse.

Bekendtgørelsen af 2007 baserer sig i nogen grad på KOM-rapporten, om ikke andet så i al fald med hensyn til retorikken, og derfor også på nogle af de tre formål og de fire genstande som formuleret af Niss (1980). Under "formål" i 2007-bekendtgørelsen hedder det således:

> Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår. (Undervisningsministeriet, 2007)

Ovenstående indledende beskrivelse er fælles for samtlige niveauer i matematik i det ny gymnasium. Valget af ordet "kompetencer" i den sidste sætning i citatet skyldes formentlig KOM-rapporten. Under punkterne "faglige mål" og "supplerende stof" er der variationer niveauerne imellem omend mest på en sådan vis, at sværhedsgraden forøges i forhold til niveau. Lad os derfor nøjes med at se på disse punkter for højniveau. Under punktet "faglige mål" ses følgende tre ud af i alt ni mål, hvis ophav såvel som retorik må siges at kunne spores tilbage til Niss (1980):

> – redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
>
> – demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
>
> – demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
>
> (Undervisningsministeriet, 2007)

Det første mål her ovenfor svarer i nogen grad til aspektet omhandlende matematikkens indre strukturer, det andet mål til modelaspektet og det tredje til det historiske aspekt. De faglige mål forventes ikke at kunne opfyldes alene ved hjælp af kernestoffet, hvorfor supplerende stof skal inddrages for således at "perspektivere og uddybe kernestoffet". Det hedder at det supplerende stof skal udfylde cirka en tredjedel af undervisningen og blandt andet kan omfatte:

> [1.] ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning samt deduktive forløb over udvalgte emner
>
> [2.] differentialligningsmodeller, herunder både opstilling, anvendelse og løsning af differentialligninger
>
> [3.] anvendelse af mindst to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller, indsamling og bearbejdning af data til belysning af en opstillet hypotese
>
> [4.] matematik-historiske forløb.
>
> (Undervisningsministeriet, 2007, nummereringen er tilføjet)

Her ovenfor kan 1 ses som en eksemplificering af aspektet om matematikkens indre strukturer, 2 og 3 som eksempler på modelaspektet og 4 som en måde at indløse hvad der svarer til det historiske aspekt på. Det skal hertil pointeres, at modellering faktisk også indgår som en del af "kernestoffet", idet der herunder nævnes "principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering" (Undervisningsministeriet, 2007).

Man kan altså med god ret sige, at de 'tre aspekter', eksplicit eller implicit, nu har været eksisterende i det danske gymnasium i henved tyve år og formentlig også vil være det i nogle år fremover. Spørgsmålet der melder sig, er dog i hvilken grad og på hvilken vis disse aspekter er blevet forvaltet igennem disse tyve år. I og med at der er mange forskellige gymnasier, endnu flere forskellige matematiklærere på disse samt et antal forskellige lærebogssystemer er dette spørgsmål ganske givet helt umuligt at besvare generelt. Dette betyder imidlertid ikke, at en enkelt 'stikprøve' med hensyn til elevernes forståelse af indholdet af de 'tre aspekter' i sig selv ikke kan være interessant.

Og det bringer mig til resultaterne af den spørgeskemaundersøgelse og de opfølgende interviews, som jeg foretog i en 2g-klasse i foråret og sommeren 2007. De følgende tre afsnit i denne artikel giver en redegørelse for resultaterne af denne undersøgelse for hvert af 'de tre aspekter'. De stillede spørgsmål og elevernes svar vil blive præsenteret enkeltvist. Umiddelbart efter vil følge et bud på et 'rigtigt' svar (i de tilfælde hvor det giver mening at tale om et sådant) samt eventuelt en mindre diskussion af elevernes svar i forhold til dette. Ideen i denne præsentationsrækkefølge af resultater og 'rigtige' svar er at give læseren mulighed for at drage egne konklusioner på baggrund af elevernes svar inden disse diskuteres i forhold til de 'rigtige'. Herefter følger en samlet diskussion som også indeholder en præsentation af og sammenligning med resultaterne fra 1980-undersøgelsen.

Matematikkens historiske udvikling og drivkræfterne bag

Belysningen af elevernes syn på matematikkens historiske udvikling og de kræfter der gennem tiderne har drevet denne bygger på fire forskellige, omend dog relaterede, spørgsmål. De tre første spørgsmål går på, hvordan eleverne forestiller sig at matematikken i deres lærebøger er blevet til, hvornår den er blevet til og hvorfor den er blevet det. Det fjerde spørgsmål går på, om de mener at matematik er noget der opdages eller opfindes. For at konkretisere dette spørgsmål en smule blev eleverne også spurgt om de mente de negative tal var opdaget eller opfundet. Disse to sidste spørgsmål gives der selv sagt ikke noget rigtigt eller forkert svar på, men i forhold til formuleringen i KOM-rapporten er de relevante. Tilmed udgjorde spørgsmålene et godt udgangspunkt for yderligere diskussion og reflektion i de opfølgende interviews.

Matematikkens tilblivelse

1 *Hvordan* forestiller du dig, at den matematik som står i lærebøgerne er blevet til? (Du må gerne nøjes med at tænke på konkrete dele af matematikken.)

En overvejende del mener, at matematikken skyldes folk som gennem tiden har undret sig og været nysgerrige og derfor har forsøgt at forklare, hvad de så. Ud af denne del er mange af den opfattelse, at folkene bag matematikken er nogle specielle, kloge mennesker og store "ide-tænkere", Pythagoras nævnes af enkelte. En foreslår, at der er tale om "nogle meget tålmodige, halv-autistiske mennesker der har undret sig over om der er sammenhæng, regler, osv. mellem forskellige ting. F.eks. trekanters vinkler, sidelængder osv". Nogle mener matematikkens tilblivelse skyldes en ophobning af erfaringer, observationer og eksperimenter, eventuelt forankret i naturen. Enkelte af disse lægger vægt på udviklingen af matematikken som værende kumulativ. Andre mener, at matematikken er blevet til grundet et behov, eventuelt i forbindelse med handel eller "for at kunne gøre ting mere overskuelige". De opfølgende interviews bragte ikke noget nyt for dagen med hensyn til dette spørgsmål.

2 *Hvornår* tror du den er blevet til?

En langt overvejende del mener, at matematikken i lærebøgerne er blevet til "engang for længe siden". Buddene på præcist hvornår er dog mange og forskellige: "helt fra før da Vincis tid!", "da tallene blev opfundet", "da vi begyndte med arabertal" og "langt før end der står i bøgerne". Nogle peger på oldtiden eller antikken og giver som argument, at "konstruktionen af f.eks. pyramiderne må have krævet bare lidt matematik". Et af de mere interessante svar lyder: "For længe, længe siden startede det og siden da er det blevet ved. Men jeg er da sikker på at udviklingen går langsommere og langsommere, fordi man efterhånden ved en del".

Ud af denne langt overvejende del er der nogle der er fælles om den opfattelse, at matematikken stort set har eksisteret altid, eller i det mindste lige så længe som der har fandtes mennesker. Eksempelvis lyder et svar: "Matematik generelt har vel eksisteret siden tidernes morgen, men højt udviklet er kommet inden for de sidste 200–100 år". Kun en enkelt mener, at matematikken i lærebøgerne er af nyere dato, og han er heller ikke bleg for at fastsætte denne til for "40 år siden".

I de opfølgende interviews er der faktisk et par elever der er i stand til at fastsætte tidspunkter i matematikkens historie med nogenlunde nøjagtighed: matematikkens begyndelse til for 4000–5000 år siden, Pythagoras til de første par hundrede år og Fermats sidste sætning til "middelalderen eller et eller andet". En af eleverne virker forholdsvis stærk i sin tro på, at det har været næsten umuligt at praktisere matematik uden arabertallene. På spørgsmålet om hvorfor ikke, svarer hun: "[D]et matematik man laver i dag, det ville man jo ikke kunne lave ...".

3 *Hvorfor* tror du den er blevet til?

En langt overvejende del mener, at det har skyldtes et behov for at have matematik til sin rådighed. Enkelte er inde på at det ligefrem har været en nødvendighed: "Ved f.eks. konstruktioner har det været vigtigt at kunne forudsige/beregne om f.eks. væggene kan holde taget osv. Hellere finde fejl på tegnebrættet end ved den færdige konstruktion når den falder sammen. Mange nævner udviklingen af samfundet og relaterede aspekter som årsagen. Igen nævner mange det faktum, at folk har undret sig, været nysgerrige og fulgt deres ideer. En enkelt anfører årsagen til at være "Guds vilje – big bang, om du vil". I de opfølgende interviews foreslår en elev yderligere en årsag: "[F]ordi folk har haft for meget tid f.eks., så har man sat dem til at være matematikere".

Den matematik som eleverne i 1g og 2g udsættes for er som oftest ganske gammel: Pythagoras' sætning fra cirka 500 f.v.t., logaritmer (1614), analytisk geometri hvis begyndelse regnes til 1637, sandsynlighedsregning ligeledes med begyndelse i 1600-tallet, infinitisimalregningen med begyndelse i cirka 1670, osv. – 40 år, som en af eleverne byder på, er ganske givet i underkanten. Elementer af mængdelæren er noget af det nyeste matematik der indgår i gymnasieelevernes pensum og selv dette har en 100–150 år på bagen. At udviklingen af matematikken går langsommere og langsommere, som en anden elev påpeger, er der ikke noget der tyder på, men det skal jeg komme tilbage til i forbindelse med spørgsmål 6. Det vigtige at lægge mærke til i forbindelse med spørgsmål 3, *hvorfor* matematikken er blevet til, er at der er tale om såvel ydre som indre påvirkninger. For eksempel er astronomien og fysikken klart en ydre påvirkning i forhold til Newtons og Leibniz' udvikling af infinitesimalregningen. Men når denne teori engang er opstillet synes det i højre grad at være forhold inden for selve matematikken som driver folk som Weierstrass, Cauchy og Riemann til at videreudvikle denne. I det 19. og 20. århundrede var der også en del ydre omstændigheder der syntes at drive sandsynlighedsregningen og statistikken, som eksempelvis biologiske fænomener som arvelighedslæren og anvendelse af statistik inden for landbrug og kemisk produktion, men det var næppe disse ydre omstændigheder der fik Kolmogorov til at aksiomatisere sandsynlighedsregningen i 1933.

Jeg skal afholde mig fra videre besvarelse af spørgsmål 1, 2 og 3, da en sådan vil blive for lang. Istedet henvises de interesserede læsere til oversigtsbøger om matematikkens historie som for eksempel Boyer (1991) og Katz (1998).

Opdagelse eller opfindelse

4 Er de negative tal opdaget eller opfundet? Hvorfor?

I besvarelsen af dette spørgsmål deler klassen sig stort set lige, den ene halvdel mener de negative tal er opdaget, den anden at de er opfundet.

Argumenterne for hvorfor er dog forholdsvis forskellige. Enkelte er inde på, at de negative tal er opdaget i forbindelse med eller umiddelbart efter de positive tal. Andre mener, at de altid har været der, men at det måske har taget noget tid at "lære at udtrykke dem" eller at man "har kunnet se det, men måske haft svært ved at forklare det". Af argumenter for opfindelse forekommer blandt andet følgende: "De er opfundet tror jeg, da man ville få noget forkert hvis de ikke var der". "Umiddelbart opfundet, for man kan jo ikke have noget der ikke er der". "De er opfundet, da man havde brug for mindre værdier end 0". "Tror de er opfundet, da det virker mærkeligt at et tal pludselig skulle falde ned fra himlen eller noget". Undertiden benyttes også de samme argumenter for både opdagelse og opfindelse: "Opdaget. Hvis vi forestiller os en mand der har købt en ko men ikke har penge nok, så han skylder penge væk, altså et negativt tal". "Opfundet. Hvis man stod i gæld til nogen, måske". En enkelt helgarderer sig: "Jeg vil tro de er opfundet for næsten al matematik er opfundet, men samtidig også opdaget".

5 Tror du generelt, at matematik er noget man opdager eller noget man opfinder?

En overvejende del mener, at matematik generelt er noget man opdager. Kun få mener det er noget man opfinder. Flere mener dog, at der kan være tale om en blanding. Af de der mente, at negative tal var noget man opdagede holder mange fast i at også matematikken generelt er opdaget. Blandt andet lyder et par af svarene: "Opdager. Jeg tror ikke man kan opfinde matematik – det er noget 'abstrakt' man finder ved allerede eksisterende ting". "Opdager. For matematikken er allerede opfundet. Det er kun det, at man opdager nye elementer i det, som gør sig gældende i dag". Mange af de der mente, at negative tal var opdaget og få af de der mente de var opfundet mener nu både og: "Mange ting starter måske som noget opfundet men bliver dernæst udforsket og folk opdager nye perspektiver i den pågældende 'opfindelse'". "Begge dele, tror man opdager et problem og så løser man det ved at opfinde en løsning eller bruge allerede kendte regneregler". "Man opfinder formler efter man har opdaget sammenhænge". Nogle af de der mente at negative tal var opfundet mener nu, at matematikken generelt er noget man opdager: "Matematikken er overalt – i vor samfund, vor omgivelser og ved de ting vi foretager os. Derfor mener jeg ikke at matematik er noget man opfinder, men derimod noget man opdager hen ad vejen. Det kan selvfølgelig være svært helt præcist at udtale sig om det, for hvor går grænsen mellem opdagelse og opfindelse?" Et af svarene berører også spørgsmålet om, hvad matematik i det hele taget er for noget: "Godt spørgsmål ... meget filosofisk. Det tror jeg der er mange forskellige holdninger til. *Jeg* tror personligt, at det er noget man opdager. Tal og alle de opdagelser man allerede *har* gjort sig hænger jo sammen. Så for mig er det mere som en verden man træder ind i, end en man laver".

Ovenstående kommentar blev af eleven fulgt op af følgende bemærkning i interviewene:

> Altså jeg ser det som om at matematik ligesom er der, ligesom alt naturvidenskab, altså for eksempel rummet. Rummet er der, og nu er vi bare ved at opdage det og finde ud af hvad det er for noget. Sådan synes jeg, det er det samme med matematik.

Når de øvrige elever der i de opfølgende interviews hældte til 'opdagelse' blev spurgt om udforskningen af matematikken svarede til udforskningen af universet, svarede de alle bekræftende. Matematikken har altså alle dage eksisteret, eller som en anden af eleverne formulerede det: "Matematikken har altid været der. I form af kemi og sådan noget ved jordens skabelse. Og så har vi først fundet ud af det senere". Eller en tredje: "Jeg tror altid det har været der, men jeg tror bare, at mennesket udforsker matematikken mere og mere og opdager flere ting". En af eleverne der mente, at matematik generelt er opdaget mente, at de negative tal var opfundet: "Det er nogen man har fundet på, fordi at det blev man nødt til. Altså det er jo ikke noget der står skrevet nogen steder fra al evighed eller fra Gud, som bare har været. Det er jo noget du opfinder fordi at det er et behov. Hvis man opfinder en stol ikk', så er det fordi man har behov for at sidde ned". Et svar der tilmed linker til det tidligere spørgsmål om, hvorfor matematikken er blevet til.

Men eksisterer matematiske begreber, objekter og teorier uafhængigt af menneskelig erkendelse eller findes de kun fordi de er konstrueret af mennesker? Der gives ikke noget entydigt svar på dette spørgsmål. Svaret afhænger af den adspurgtes filosofiske overbevisning, af hvorvidt den adspurgte er platonist eller konstruktivist (Hansen, 2001). Altså om man anser matematiske ideer for eksisterende uafhængigt af os mennesker (jf. Platons hulelignelse), et synspunkt der dominerede den vestlige verden i henved totusinde år, eller om man er af en mere socialkonstruktivistisk overbevisning og derfor ikke anser de matematiske ideer for eksisterende førend de konstrueres af os mennesker (jf. det såkaldte 'kagejernsargument'), en holdning der begyndte at blive udbredt i begyndelsen af 1900-tallet.

For matematikkens vedkommende kan fremkomsten af den ikke-euklidiske geometri i midten af det nittende århundrede ses som en spæd begyndelse på den konstruktivistiske eller formalistiske indstilling, ligesom der oplagt var tale om et opgør med den klassiske euklidiske geometri. Selvfølgelig var der i løbet af de totusinde år plads til nogle 'konstruktioner', eksempelvis de negative og komplekse tal. I renæssancens ligningsløsning var disse nye tal for eksempel tilstede som en form for anvendelige teknikker, men matematikerne havde problemer med at tildele dem egentlig eksistens i form af matematiske objekter, da tallene ikke kunne tildeles mening hverken i virkeligheden eller i Platons og Euklids idéverden. I dag anses såvel de negative som de komplekse tal som værende matematiske objekter og den nye matematik kender til mange mere frit udviklede konstruktioner (grafteori, gruppeteori etc.). Men dermed dog ikke sagt, at matematikerne har det nemmere i dag med at bestemme sig for om de objekter de arbejder med har eksistens i sig selv eller er konstruerede. Eller som Hersh (1997, s. 39) formulerer det: "The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends".

Matematikkens rolle og anvendelse i samfundet

Elevernes syn på matematikkens plads i deres egen hverdag og dens rolle og anvendelse i samfundet, herunder regnet matematisk modellering, søges afdækket igennem fire spørgsmål. Det første spørgsmål går på, i hvilke sammenhænge matematik bliver brugt i elevernes hverdag såvel som i samfundet generelt. Det næste spørgsmål går på matematikkens rolle i samfundet i dag i forhold til for 100 år siden. Det tredje spørgsmål går på, hvorvidt eleverne tror, at matematik kan blive forældet eller ej. Og det sidste spørgsmål går direkte på matematisk modellering, hvad eleverne forstår ved denne proces og den resulterende matematiske model.

Matematik i hverdagen og samfundet

6 Man hører af og til at matematik bliver brugt i en masse forskellige sammenhænge. Kan du nævne nogen steder fra din hverdag eller andre steder i samfundet, hvor matematik anvendes, det være sig enten direkte eller indirekte?

En overvejende del af klassen nævner indkøb i f.eks. supermarkeder og andre situationer, hvor der handles. En overvejende del nævner ligeledes byggerier af huse, broer og arkitektur generelt samt mere finansrelaterede sammenhænge så som økonomi, banker, renter, aktier, løn, skat og forsikringsselskaber. Nogle nævner matematikkens rolle som redskab i andre fagsammenhænge så som i fysik, kemi, astronomi, videnskab generelt eller blot i forbindelse med skolen. Flere nævner anvendelsen af matematik i forbindelse med computere. Som et af de mere interessante svar kan nævnes metroens styresystem som et sted, hvor der formentlig anvendes matematik, idet der jo ikke er nogen der styrer toget. Samme elev opremser tillige flere af de ovenfor givne sammenhænge og slutter så sin besvarelse med at sige, "men jeg har svært ved at se, hvor matematik på et højere plan kan benyttes i dagligdagen".

I de opfølgende interviews blev nogle af eleverne spurgt om hvordan deres svar til ovenstående spørgsmål ville være, hvis man fra matematik 'fraregnede' den almindelige købmandsregning (brug af de fire regningsarter, procentregning o.lign.). Her var et par stykker inde på, at matematikken så figurerede i computere, eksempelvis i forbindelse med programmering og kryptering. En nævnte skolen som der, hvor matematik så ville optræde, og udover i matematikundervisningen også ved brug af formler i fysik og kemi. Et par var inde på, at brugen af matematik i så fald nok var jobafhængig, eksempelvis at ingeniørere, statistikere og piloter ville have brug for anden matematik end blot købmandsregningen.

Men lad os vende tilbage til den ene elevs kommentar om, at hun havde svært ved at se, hvor matematik på en højere plan kunne benyttes i dagligdagen. Samme elev var også ophavsmand til svaret på spørgsmål 2 om at matematikkens udvikling da måtte gå langsommere og langsommere, hvilket hun uddybede i det opfølgende interview på følgende vis:

> Ja, men de fandt da bare ud af mere længst væk, gjorde de ikke? Det er da ikke så tit, at man hører om en eller anden der har fundet en ny ting inden for matematikken, er det det? Det kan da godt være at det bare er mig der ikke er nok matematiknørd til at få det at vide. Men jeg synes bare ikke rigtig der sådan sker noget. Det sker da oftere inden for naturvidenskaben, at nu har man fundet ud af at man kan se fosteret allerede fra meget tidlig alder ved en ny scanning og sådan noget.

Uden at vide det rammer eleven med disse kommentarer ned i noget helt centralt for matematikkens tilstedeværelse i vores hverdag, nemlig det faktum at matematikken er usynlig, eller sagt med et andet ord at den er *skjult*. I virkeligheden er det jo en logisk slutning som eleven drager: Hun hører utroligt sjældent om nye opdagelser inden for matematik, altså sker der ikke noget! Tilmed siger dette noget om en af de forskelle der er mellem matematik og eksempelvis fysik, kemi og biologi; bare fordi man inden for matematikken nu endelig får bevist Fermats sidste sætning eller Poincarés formoding, så er det jo ikke noget der ændrer vores hverdag og samfund hverken i morgen eller om halvtres år (sandsynligvis), hvilket sagtens kan være tilfældet med fysik, kemi og biologi – og i endnu højere grad teknologi baserende sig på disse fagområder.

I et interview fra 2005 med professor emeritus Philip J. Davis, forfatter af *The Mathematical Experience*, faldt der følgende ord om dette:

> It's a wonderful subject mathematics, of course, and the interesting thing is that it is coming into our lives more and more. The age is the mathematical age. Most of the mathematics is hidden, it's invisible to people because it's in programs, it's in chips, it's in laws ... So you don't see it. And if you don't see it, you don't think it is there.
>
> (Davis, 2005)

Pointen er altså, at matematikken i høj grad er en del af vores hverdag og samfund, men at vi ofte ikke gør os det klart, netop fordi den er skjult.[2]

Matematikkens rolle før og nu

7 Tror du at matematikken har større eller mindre betydning i samfundet i dag end for 100 år siden?

En langt overvejende del mener større. Dette begrundes hovedsageligt i den øgede mængde teknologi i vores hverdagssamfund. Svar som "helt klart, mere computer = mere matematik" og "tingene udvikler sig og alt skal være højteknologisk" gives hyppigt. Enkelte af dem der mener, at matematikken har større betydning i dag peger også på økonomiske anliggender som værende grunden eller at "brugen af matematikken er blevet mere avanceret i vores tid". Nogle mener, at matematikken har den samme betydning i dag som for 100 år siden og kun meget få er af den opfattelse, at betydningen i dag er mindre end den var for 100 år siden. Et af de mere opsigtsvækkende svar på det sidstnævnte er: "Nej, det tror jeg ikke, for selvom vi bruger matematikken meget mere i rummet osv. har vi moderne maskiner til det".

I de opfølgende interviews bekræftes de ovenstående synspunkter i høj grad. På et uddybende spørgsmål om, hvorfor en elev fandt betydningen i dag større, svarede hun:

> Fordi i dag der kan man for eksempel uddanne sig på, eller læse matematik på universitetet, og sådan nogle ting, det kunne man jo ikke for hundrede år siden. [...]
>
> *Så det er noget forholdsvist nyt, at man kan læse matematik på universitetet?*
>
> Nej ikke nyt, men jeg tror da på et højere niveau. Altså man vidste ikke lige så mange ting dengang, som man gør i dag.

Og man kunne heller ikke uddanne sig til matematiker på samme måde, tror du?

Nej.

Eleven med kommentaren om den mindre betydning grundet brugen af moderne maskiner får i interviewene lejlighed til at uddybe sit svar. Hun finder blandt andet, at matematikken forekommer mindre nærværende fordi vi i så udstrakt grad i dag benytter os af tekniske hjælpemidler og at den mest handler om at "trykke på nogle knapper".

Sidstnævnte elevs svar om matematikkens mindre betydning i dag kan altså i nogen grad føres tilbage til matematikkens skjulthed i vores hverdag og samfund som diskuteret i forbindelse med spørgsmål 6. Med hensyn til ovenstående dialog, så kunne man i 1907 lige såvel som man kan i dag uddanne sig til matematiker ved et universitet.

Det rigtige svar på spørgsmål 7 er, at matematikken i dag har en langt større betydning i vores samfund end den havde for 100 år siden. For 100 år siden fandt matematik i høj grad kun sin anvendelse inden for fysik og astronomi, hvorimod matematik i dag anvendes flittigt inden for kemi, biologi, medicin, geografi, økonomi og selvfølgelig datalogi. Folk i vores samfund i dag er i langt højere grad end tidligere udsat for påvirkninger og underlagt beslutninger som baserer sig på matematik. Det forhold at matematik i langt højere grad i dag også er en anvendt videnskab end tidligere har ligeledes medført en eksplosiv udvikling af faget. En optælling af antallet af matematik-relaterede tidsskrifter for 100 år siden og en optælling af antallet i dag vil bekræfte dette.

Kan matematik blive forældet?

8 Tror du matematik kan blive forældet? Hvis ja, på hvilken måde?

En langt overvejende del svarer klart nej eller at det virker usandsynligt til dette spørgsmål, eksempelvis "et bevis er et bevis" eller "de grundlæggende ting vi viderebygger vores matematiske udvikling på er så brugt og gennemprøvede, at den sandsynligvis ikke forældes". Nogle giver dog et nej med modifikationer: "Tror ikke at den kan blive forældet, men sætninger/teorier kan blive modbevist og derpå danne grundlag for 'ny matematik'". Eller mere opsigtsvækkende: "Nej, men der er nok nogle ting, som man ikke vil bruge ret meget i fremtiden. Så som vektorer". Kun få svarer ja eller måske. De opfølgende interviews bringer ikke noget nyt for dagen i forbindelse med dette spørgsmål.

Formentlig besidder matematik en evne til i langt mindre grad at lade sig forælde end de naturvidenskabelige fag, hvori den finder sin anvendelse. Matematik udvikler sig hele tiden og ligeledes gør anvendelsen af matematik. Undertiden sker dette tilmed i samspil med hinanden. Eksempelvis bygger Newtons mekanik jo på infinitesimalregningen som han udviklede til formålet, mens Heisenbergs kvantemekanik bygger på matrix-regning og dele af den lineære algebra, som Heisenberg genopfandt (-opdagede) til formålet. Men det at der i fysikken undertiden forekommer paradigmeskift synes ikke at have nogen betydning for den matematik som fysikken anvender til at beskrive sine teorier. Ny matematik udvikles gerne således, at den bygger videre og ovenpå allerede eksisterende matematik uden at denne ældre matematik nødvendigvis af den grund skal revideres. Af den årsag kan Euklids *Elementer* læses i dag lige så vel som for totusinde år siden. Og med fremkomsten af den ikke-euklidiske geometri var der da heller ikke tale om at forkaste den klassiske geometri, selv om det gav anledning til en reflektion af den erkendelsesmæssige status af aksiomerne for den euklidiske geometri.

Matematisk modellering

9 Hvad forstår du ved en matematisk model og det at foretage matematisk modellering?

Mange af eleverne svarer slet ikke på dette spørgsmål eller svarer: ”Ved ikke”. Nogle elever mener der er tale om en form for visualisering eller måske ligefrem en figur: ”Jeg ved ikke om det er det, men for at illustrere noget visuelt fremfor at kigge på tal?”, ”En matematisk model er en visualisering af noget ... Matematisk modellering er arbejdet med udformningen af modellen”. Få mener der er tale om at modeller skal øge forståelsen af visse ting: ”En ’afbildning’ af noget matematisk giver tit større forståelse”. En elev svarer: ”Model = simplificeret system”. De opfølgende interviews gav heller ikke her anledning til yderligere synspunkter angående, hvad en matematisk model er eller hvad aktiviteten matematisk modellering består i.

Selvfølgelig er det korrekt at man kan tegne modeller for forskellige ting og at disse kan bidrage til forståelsen, men når man taler om matematiske modeller og matematisk modellering er det ikke først og fremmest det man tænker på, da disse modeller jo ikke er matematiske. Den ene elevs svar om at en model er et simplificeret system er derimod i højere grad korrekt. En definition af hvad der skal forstås ved en matematisk model og ved matematisk modellering kan for eksempel findes i

ICMI Study 14 (Blum et al., 2007). Her defineres en *model* på baggrund af forholdet mellem matematikken og den øvrige verden:

> A mathematical model consists of the extra-mathematical domain, *D*, of interest, some mathematical domain *M*, and a mapping from the extra-mathematical to the mathematical domain [...] Objects, relations, phenomena, assumptions, questions, etc. in *D* are identified and selected as relevant for the purpose and situation and are then mapped – translated – into objects, relations, phenomena, assumptions, questions, etc. pertaining to *M*. Within *M*, mathematical deliberations, manipulations and inferences are made, the outcomes of which are then translated back to *D* and interpreted as conclusions concerning that domain.
>
> (Niss, Blum & Galbraith, 2007, s. 4)

Processen med at gå fra *D* til *M* og tilbage til *D* kan gennemløbes flere gange indtil en validering og evaluering af modellen opfylder det opstillede formål. Denne proces refereres ofte til som *modelleringscyklussen* (Niss et al., 2007). Matematisk *modellering* er som en af eleverne korrekt påpeger arbejdet med udformningen af modellen, i de her præsenterede termer vil det sige at tage et problem fra *D*, afbillede det til et passende valgt *M*, arbejde med det i *M*, og derefter fortolke, evaluere og validere det i forhold til *D* (og eventuelt gennemløbe processen flere gange). Et af de vigtigste elementer i matematisk modellering er altså samspillet mellem det ikke-matematiske domæne *D* og det matematiske domæne *M*.

Matematikkens indre strukturer

2g'ernes syn på matematikkens indre strukturer belyses ved fire spørgsmål. Det første har et noget mere filosofisk præg end de følgende tre. Her spørges til hvorvidt matematik er en videnskab eller ej, og hvis ikke hvad den da er. Det følgende spørgsmål går på, hvad eleverne forestiller sig en forsker i matematik laver. Videre spørges til matematikkens opbygning og det sidste spørgsmål går på bevisets stilling i matematikken.

Videnskab eller ej

10 Er matematik en videnskab? Hvis ja, om hvad? Hvis nej, hvad er den da?

En langt overvejende del af klassen svarer ja til dette spørgsmål. Argumenterne herfor er dog vidt forskellige, eksempelvis gives følgende begrundelser: "Ja, der findes forskere i faget". "Ja, det hører med til det naturvidenskabelige fakultet". "Ja, det er videnskabeligt. Jeg må indrømme, at jeg ikke ved hvorfor". "Det synes jeg den er! Ved ikke rigtig om hvad, men der skal vel en del viden til at forstå matematikken". På følgespørgsmålet hvad matematik er en videnskab om gives også forskellige forslag. Nogle mener, at det er en videnskab om tal og/eller figurer, en mener, at matematik beskæftiger sig med realiteter og facts, en anden at det er en videnskab om sandhed, en tredje en videnskab om logisk tænkning og en fjerde mener, at matematik er en videnskab om viden, evt. en naturvidenskab. Af de der svarer nej mener flere, at den i højere grad er at betragte som et redskab for andre videnskaber. Andre mener, at den ikke er det, fordi matematikken er et sprog. En elev mener, at matematikken er et begreb: "Det bruges inden for videnskaben, men er det ikke i sig selv. Matematikken er et begreb man anvender inden for den videnskabelige verden". En elev lader til at have ladet sig inspirere af spørgsmålet om opdagelse versus opfindelse: "Nej, det tror jeg ikke. Det er jo ikke noget man forsker i, men man opfinder noget". Endelig er der dog én der mener, at matematik er en blanding mellem videnskab og redskab.

I de opfølgende interviews bliver videnskab-versus-redskab-problematikken uddybet yderligere. Blandt andet siger en elev, at han ser videnskab og redskab som det samme, fordi man med den viden man allerede besidder kan skabe nyt. En anden siger:

> Jeg synes bare videnskab ... det synes jeg er mere sådan med læger og sådan, altså medicin og så noget og ude i rummet og sådan noget, men jeg synes at matematikken det er et godt redskab for at regne nogen ting ud, finde ud af hvor nøjagtig en stjerne ligger eller sådan noget, synes jeg. Så har man den viden.

Også spørgsmålet om hvorvidt matematik er en naturvidenskab kommer på banen i de opfølgende interviews. En elev giver følgende begrundelse for at matematik *er* en naturvidenskab:

> Det tror jeg bare er fordi, at folk de siger, at matematikken hører ind under naturvidenskaben, og det er det vel egentlig også, det hænger vel også sammen med sådan noget som biologi og fysik som også er naturvidenskab. Så tænker jeg bare, at så må matematikken også høre ind under naturvidenskaben. Jeg kan godt se lige umiddelbart, hvorfor sådan noget som fysikken og biologien skulle høre under naturvidenskab, fordi det har noget med natur at gøre, og så kan jeg se en sammenhæng til matematikken fordi, at de udregninger man bruger og sådan noget, bruger man i de fag.

En anden argumenterer med, at "det er fordi de bruger de samme metoder som de andre naturvidenskabelige fag. [...] De undersøger og påviser og beviser". En tredje elev er overbevist om det modsatte og giver følgende argumenter herfor:

> Matematik er vel redskabet til at forske i naturen, og fysik det handler meget om love og sådan, biologi det handler om, ja biologiske ting, og matematik det er så det redskab du bruger til at forske inden for de andre naturvidenskaber. Jeg ville nok ikke sige det var en naturvidenskab, men nærmere sådan et redskab du brugte i de andre fag.

Denne elev er dog ikke i tvivl om, at matematik er en videnskab, faktisk mener han at det er en videnskab såvel som et redskab.

Encyclopædia Britannica Online definerer *science* til at være:

> any system of knowledge that is concerned with the physical world and its phenomena and that entails unbiased observations and systematic experimentation. In general, a science involves a pursuit of knowledge covering general truths or the operations of fundamental laws. (EBO, 2008)

Hvorvidt matematik beskæftiger sig med den fysiske verden er der sikkert delte meninger om, men at der stræbes efter viden dækkende generelle sandheder eller fundamentale love synes at dække meget godt. En anden mulighed er selvfølgelig også at gå mere videnskabsteoretisk til værks og se hvordan folk som Popper og Kuhn definerer en videnskab og så se i hvilken grad matematik lever op til dette. En sådan analyse skal jeg dog afholde mig fra her.

I bogen *Matematik og Verden* beskriver Niss (2001) matematik som havende en femfoldig natur: (1) matematikken som en grundvidenskab (eller 'ren' videnskab), (2) matematikken som en anvendt videnskab, (3) matematikken som et system af redskaber for praksis, (4) matematikken som et undervisningsfag og (5) matematikken som et rum for en særlig slags æstetiske oplevelser. Matematik er altså mange ting, udover at være en videnskab, og det er måske derfor ikke så mærkeligt at elevernes svar stritter i mange retninger.

Matematisk forskning

> 11 Hvad tror du en forsker i matematik (på universiteter og lign.) laver? Hvad består forskningen i, tror du?

Til dette spørgsmål er der mange der melder pas. En elev svarer: "Jeg har ingen anelse! Men jeg har faktisk tit tænkt på det og undret mig meget". Et par andre eksempler på ved-ikk'er, dog indeholdende bud på hvad matematikere kunne foretage sig, er følgende: "Jeg ved det ikke, men vel noget med beviser". "Ved jeg ikke rigtigt! At undersøge om teorier og formler er korrekte, om matematikkens brug i verden eller noget". Netop det med at kontrollere korrektheden af allerede eksisterende formler og teorier karakteriserer en gruppe af svar (gæt) på, hvad forskningen består i, nemlig en form for 'oprydningsarbejde'. En anden siger det på følgende vis: "At gennemgå beviser og lignende, gamle sætninger osv. Prøve at finde 'fejl'". Nogle mener dog også, at der godt kan være tale om at fremsætte nye teorier: "Finde nye og bedre formler. Hurtigere at regne eller f.eks. til at kunne regne noget ud vi endnu ikke har kunnet regne på". "Løse hidtil uløste gåder (tilfældet med Fermats sætning). Fremsætte nye teorier osv.". "Forsker efter nye matematiske sammenhænge". Her lader en enkelt elev igen til at være 'inspireret' af spørgsmålet om opdagelse versus opfindelse: "Finde nye matematiske modeller for alle mulige ting. Opdager! Ikke opfinder. Opdager nye områder inden for matematikken. Og videreudvikler de nuværende til endnu bedre".

Mange af de som i forrige spørgsmål mente, at matematik er en videnskab har ingen ide om, hvad en forsker i matematik foretager sig. Enkelte af de der mente, at matematik er et redskab har ligeledes ingen ide. De få der mente, at matematik er et sprog hælder mest til, at en forsker i matematik foretager 'oprydningsarbejde'. Denne opfattelse af at mange matematikere bruger deres tid på at checke gamle sætninger og formler forekommer også i de opfølgende interviews. En elev siger, at såfremt i fald der er nogen der forsker i matematik, "så er det noget meget besværligt matematik, tror jeg". Et par har nogle mere klare forestillinger om, hvad professionelle matematikere foretager sig, eksempelvis: "Jamen, så vælger han så et eller andet [...] Lad os sige, at han vælger femtegradsligningen, ser om der er nogle nemme måder at lave, at finde ud af at løse den på". På det uddybende spørgsmål om, hvorvidt der kan være tale om decideret 'ny matematik' eller ej mener flere, at det kan der ikke. Ofte hænger et sådant svar sammen med opfattelsen af at matematik er noget der altid har været der og at vi kun udforsker det allerede eksisterende: "Jeg tror altså, at matematikken er der, så på den måde tror jeg aldrig, man kan skabe noget helt nyt matematik, hvis matematikken er der. Man kan opdage ny matematik". Flere er af den opfattelse, at matematik bliver til, evt. opdages, fordi der er et anvendelsesorienteret behov derfor: "Jeg tror, at det matematik vi har nu, det har vi fordi, gennem tiden, der har vi haft behov for at finde nogle metoder til at beregne nogle ting og derfor er de opstået". En anden svarer: "Jeg kan ikke rigtig forestille mig, at man fandt noget matematik og så man bare tænkte, det kan vi ikke bruge til noget ...". Og så er der en enkelt elev der til spørgsmålet om hvad matematikere på universiteter og lignende laver kort og godt svarer: "Jeg kan bare ikke forestille mig, hvordan deres hverdag er. Så sidder de bare der og kukkelurer med deres lommeregner. Jeg synes bare det er mærkeligt".

Forskere i matematik i dag laver jo i høj grad det de alle dage har lavet, nemlig at opstille og bevise matematiske sætninger. Som en biprodukt af denne aktivitet kan også forekomme en form for oprydningsarbejde, men oprydning er ikke det primære formål med deres forskning. De ting der forskes i har selvfølgelig ændret sig gennem tiden. For eksempel optager den anvendte matematik, herunder matematisk modellering, i dag en større del af den matematiske forskning end i tidlige tider. Ligeledes er de tekniske hjælpemidler som matematikere i dag har til rådighed selvfølgelig væsentlig mere avancerede end tidligere.

Matematikkens opbygning

12 Kan du give en kort beskrivelse af, hvordan man opbygger et område af matematikken?

På dette spørgsmål er der mange der slet ikke svarer og andre vælger at svare på *hvorfor* man opbygger et område i stedet for *hvordan*. Nogle elever omtaler dog definitioner, sætninger og beviser: "Man opdager noget og finder en definition på det. Så skal man også bevise det, så man ved det er sandt. Og så har man et nyt område". Eller: "Man definerer, laver sætninger og så videre inden for et bestemt område". Der er også få svar som er lidt sværere at gruppere, for eksempel: "Det eksisterer i forvejen". Eller: "For eksempel funktion, geometri, talsystemer med videre. Ved hjælp af 'arter'".

I de opfølgende interviews er yderligere nogle elever i stand til at pege på "definitioner, sætninger, beviser" som en måde at opbygge dele af matematikken på. Spørgsmålet lod til at vække større genklang hos eleverne, hvis de blev bedt om at relatere det til de benyttede undervisningsbøger i gymnasiet.

Bemærkelsesværdigt er det dog, at der i hverken spørgeskemabesvarelser eller de opfølgende interviews på noget tidspunkt nævnes 'aksiomer'. Ideelt set opbygges (fremstilles) et område af matematikken jo ved at vedtage en mængde aksiomer og udfra disse forsøge at bevise sætninger, opstille nye og meningsfulde definitioner, bevise nye sætninger med udgangspunkt i definitionerne og så videre. Selvfølgelig kan valget af aksiomer diskuteres inden for de enkelte områder da opbygningen af området jo afhænger af disse. En opbygning, som dem man finder i lærebøger, finder dog oftest først sted når det pågældende område har gennemgået en vis historisk udvikling med en række observerede specialtilfælde, generaliseringer og efterrationaliseringer.

Bevisets stilling

13 Hvorfor beviser man matematiske sætninger?

En overvejende del svarer at det er for at vise de er sande eller ikke indeholder fejl: "For at bekræfte dem. Alt hvad der ikke kan bevises kan ikke vedtages som noget sandt". Eller: "For at validere deres værd". Nogle er inde på at det er for at man kan bruge dem i videre forskning og andre sammenhænge: "For at alle ikke selv skal sidde og gøre det inden de tager dem i brug, og for at bevise at de virker i alle sammenhænge". Eller: "For at have noget konkret at regne udfra/med". Få mener der er tale om forståelse, eksempelvis: "For at få en bedre forståelse af nye opdagelser". Og "For at se pointen i det". De opfølgende interviews bidrog ikke med yderligere synspunkter angående bevisets stilling i matematikken.

Elevernes svar på dette spørgsmål er nok ikke langt fra det som en uddannet matematiker selv ville kunne finde på at svare. Vi beviser selvfølgelig matematiske udsagn for at være sikre på, at de er korrekte og dette specielt inden vi eventuelt ønsker at bruge dem som fundament for andre sætninger eller i fald de skal anvendes i andre sammenhænge. Det er også rigtigt, at et matematisk bevis udover at vise korrekthed af et udsagn fortæller noget om, hvorfor dette udsagn er sandt og dermed måske kan bidrage til forståelsen. Selvfølgelig kan der skelnes mellem forskellige typer af beviser; direkte og indirekte beviser, eksistensbeviser og entydighedsbeviser, konstruktive og ikke-konstruktive beviser, og så videre, men formålene med korrekthed og forståelse vil stadig gøre sig gældende. Et problem med hensyn til forståelsen kan dog opstå, hvis beviserne er så lange og omstændelige at kun meget få mennesker begriber disse – som eksempelvis Wiles' bevis for Fermats sidste sætning.

Diskussion og sammenligning

I dette afsnit skal jeg diskutere om og i hvilken grad de ovenfor præsenterede elevbesvarelser af de tretten stillede spørgsmål synes at indfri de 'tre aspekter'. Som tidligere omtalt var inspirationen til hovedparten af spørgsmålene hentet fra en tidligere undersøgelse (Christensen & Rasmussen, 1980). Jeg skal derfor også løbende foretage en sammenligning med resultaterne af de spørgsmål der optræder i begge undersøgelser, hvilket er spørgsmålene 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12 og 13.

Det historiske aspekt

I 2007-bekendtgørelsen hedder det, at eleverne skal være i stand til at demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling. Men er de så det? Samlet set er elevernes besvarelser af spørgsmål 1, 2 og 3 i al fald noget diffuse.

Som svar til spørgsmål 1 mener et flertal, at matematikken er opstået som følge af folks personlige nysgerrighed og undren, kun få nævner ydre omstændigheder som eksempelvis handel. I spørgsmål 3 er der dog udbredt enighed om at matematikken er blevet til som følge af et behov eller måske ligefrem af nødvendighed. Der er altså en mindre uoverensstemmelse mellem flertallets svar til spørgsmål 1 og spørgsmål 3. Man kan selvfølgelig vælge at tolke det som om, at folks indre motivation og nysgerrighed for at beskæftige sig med matematik er blevet tændt af ydre drivkræfter, hvilket under visse omstændigheder også ville være korrekt. Det faktum at matematikken udover at være drevet af ydre drivkræfter også er drevet af indre drivkræfter (drivkræfter som ikke kun går på de enkelte matematikeres personlige 'drive', men på problemstillinger inden for matematikken selv) synes eleverne ikke at have den store forståelse for. Konkrete matematikhistoriske eksempler, i form af den "soliditet" KOM-rapporten omtaler, synes eleverne heller ikke at kunne mønstre. En elev nævner bygningen af pyramiderne som et eksempel på at der må have været behov for matematik i ældre tider, men om dette svar bunder i en viden om matematikken i Ægypten eller om det blot er udtryk for at eleven er i stand til at tænke selv er uvist, og i al fald giver eleven ingen konkrete eksempler på ægypternes matematik. I 1980 var besvarelserne ikke væsensforskellige fra de her beskrevne:

> [Spg. 1] Et flertal synes at tro at matematikken hovedsageligt er skabt som svar på problemer udenfor matematikken selv, først og fremmest inden for fysikken. Flere tror at dele af matematikken er blevet skabt ved tilfældigheder og puslen med størrelser og formler. Flere angiver nysgerrighed og interesse for at forklare observerede fænomener som en vigtig drivkraft for skabelsen af matematik.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 49–50)

I besvarelserne af spørgsmål 2 er der udbredt enighed om at matematikken er 'gammel'. En elev antyder, at da Vinci er gammel og at matematikken er ældre end ham. Kun meget få er i stand at angive årstal på såvel matematikkens oprindelse som på konkrete matematiske resultater. At nogle elever er af den opfattelse at matematikken kun kunne tilvejebringes fra det øjeblik vi havde arabertallene til vores rådighed styrker heller ikke opfattelsen af, at eleverne besidder viden om matematikkens udvikling i samspil med historiske og kulturelle begivenheder. Pudsigt nok synes besvarelserne af spørgsmål 2 i 1980 at indikere en højere grad af velvillighed til at tidsangive de matematiske elementer:

> [Spg. 2] [D]er er variationer i forslagene til svar, fra at hovedparten af stoffet er omkring 500 år gammelt, til at hovedparten er fra dette århundrede. Der er dog en tendens til at anse tyngdepunktet for at ligge i perioden 15/1600–1900. Mange peger på, at noget stof går tilbage til grækerne, mens andet er fra vort århundrede. Mange ved at infinitisimalregningen stammer fra 1600–1700-tallet og nævner her Newton, men nogle tror at integralregning er fra omkring 2. verdenskrig, andre at differentialregningen går tilbage til grækerne.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 51)

I 1980 lader der ikke til at være elever som på spørgsmål 2 svarer, at matematikken har eksisteret altid. Sådanne tilfælde findes imidlertid i 2007 og til spørgsmål 5 giver et flertal faktisk udtryk for en sådan opfattelse, altså at matematikken er noget man opdager. Dette forekommer overraskende, ikke mindst fordi Hansen (2001) argumenterer for, at elever i dag burde være at den modsatte opfattelse:

> [D]et er klart, at konstruktivismens stærke position i skolekredse gøder jorden for en mere radikal konstruktivistisk opfattelse af hele matematikkens væsen. På grund af den pædagogiske konstruktivisme i skolerne har børn og unge sikkert svært ved at tro på nogen særlig eksistens af matematiske størrelser, figurer og begreber.
>
> (Hansen, 2001, s. 71)

Selvfølgelig er der også elever som hælder til, at matematikken er opfundet, men de er få i antal. Flertallet giver udtryk for en platonistisk indstilling. Med en af elevernes egne ord er der tale om "en verden man træder ind i" – en idéverden – hvor man udforsker de allerede eksisterende matematiske objekter på samme vis som vi er igang med at udforske mælkevejen og resten af det univers vores planet er en del af. I 1980 var konklusionen på spørgsmål 5 imidlertid ikke stort anderledes:

> [Spg. 5] Mange mener at matematik er noget der opdages, ofte med henvisning til at tingene findes i naturen før de opdages, lidt færre mener, at matematik er noget der opfindes.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 52)

Selv om flertallet i 1980 holdt på 'opdagelse' var der muligvis en større procentmæssig andel af de adspurgte 2g-elever som hældte til 'opfindelse'. Men betyder det, i forlængelse af H.C. Hansens hypotese ovenfor, at den pædagogiske konstruktivismes indflydelse i lærebøger og undervisning har været dalende siden 1980? Det tror jeg ikke. I KOM-rapporten hedder det i forhold til det almene gymnasium under punktet "Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning":

> Eleverne skal herigennem udvikle en viden om og en forståelse af, at matematikken er menneskeskabt og rent faktisk har gennemgået en udvikling – og ikke blot er noget, der altid har været der eller pludselig er opstået ud af den blå luft.
>
> (Niss & Jensen, 2002, s. 268)

Holdningen her er altså på det nærmeste ikke-platonistisk. Med flertallet af de adspurgte 2g'eres platonistiske opfattelse af matematikkens væsen synes der i langt mindre grad at være fokus på at matematikken er noget som *skabes* af os mennesker. Og tilmed hersker blandt eleverne i udpræget grad den opfattelse, at matematikken er noget der altid har været der.

Modelaspektet

I 2007-bekendtgørelsen siger 'modelaspektet', eller hvad der svarer dertil, at eleverne skal kunne demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling.

I forbindelse med spørgsmål 6 er eleverne rent faktisk i stand til at give en række konkrete eksempler på, hvor matematik indgår i samfundet generelt såvel som i deres egen hverdag. De i 1980 adspurgte 2g-elever synes i stand til at komme med flere eksempler på anvendelser end eleverne i 2007, men dette kan selvfølgelig skyldes populationernes forskellige størrelser. I 1980 var resultaterne:

> [Spg. 6] Teknik og ingeniørvidenskab nævnes ofte og herunder: bil- og flykonstruktion, elektronik, byggeri, arkitekter, møllebygning, brobygning, tømrere, laboranter. Økonomi, offentlig statistik og samfundsproblemer nævnes ofte og herunder: prognoser, befolkningsudvikling, salg, handel, skat, banker. Edb nævnes ofte. I øvrigt nævnes: i virksomheder (og herunder: placering af fabrikker), apotekere, landmåling, lægevidenskab, forsikring, meteorologi, økologi. (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 46–47)

Når eleverne i 2007 bliver bedt om at give eksempler på matematikanvendelser som ikke kun omfatter de fire regningsarter o.lign. bliver svarene straks mere sparsomme, specielt når det gælder deres egen hverdag, og eksemplerne forekommer heller ikke funderet i konkrete erfaringer eller viden. De tilbageblivende steder for anvendelse er nu fortrinsvist skolen og computere. Én ting er dog at sige at matematik anvendes, en anden ting at sige hvor det anvendes, og en tredje ting at sige hvordan, eventuelt med henvisning til konkrete eksempler. 2g'erne synes fuldt ud klar over, at matematik anvendes, de kan i nogen grad også pege på hvor matematikken finder sin anvendelse, men hvorvidt de kan konkretisere deres eksempler i termer af matematik synes usikkert. Med hensyn til computerne tænker de fleste vel nok på binære tal, men fra et senere gennemført undervisningsforløb om kodningsteoriens tidlige historie (Jankvist, 2008b) i samme 2g-klasse ved jeg med sikkerhed, at kun et par elever var bekendte med to-talssystemet og dets aritmetik.

Eleverne synes dog at have en udmærket forståelse for at matematikken i dag spiller en langt mere betydningsfuld rolle i samfundet end den gjorde for 100 år siden (spørgsmål 7). Igen er det computere og anden teknologi som får æren for dette. At forhold som økonomiske anliggender og politisk beslutningstagen kun nævnes i meget ringe grad kan formentlig tilskrives den tidligere omtalte skjulthed af matematikken. Selvfølgelig kan matematikken også være skjult i computerhardware og teknologi. Og ved man at der er matematik i teknologi bliver man nemt mindet derom, da teknologiske genstande konstant omgiver os. Med en politisk beslutningstagen er det derimod noget andet, da dette ikke på samme måde er et fysisk objekt som springer os i øjnene. Heller ikke 1980-svarene til spørgsmål 7 adskiller sig markant fra dem af 2g'erne 27 år senere:

> [Spg. 7] Praktisk taget fuld enighed om at matematikken har større betydning i dag end for 100 år siden, og om at matematikken er tilgængelig for og benyttes af en langt bredere befolkningsgruppe og i flere funktioner end før. Der henvises især til videre uddannelser og til ingeniørvidenskabelige forhold (især bygningsteknologi, maskinkonstruktion og edb). Et par stykker tror, at matematikkens betydning er stort set uændret.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 45)

Spørgsmål 8 om hvorvidt matematik forældes synes desværre ikke at bidrage noget videre til en belysning af elevernes formåen med hensyn til modelaspektet, idet kun meget få af eleverne kommer ind på anvendelsesaspekter af matematikken, hvilket ellers var ideen. En undtagelse er selvfølgelig den ene elev som påpeger at vektorer nok ikke vil blive brugt meget i fremtiden.

Svarene til spørgsmål 9 er at betegne som yderst sparsomme, mange af eleverne svarer "ved ikke" i såvel spørgeskema som interview. Mange tror der er tale om noget visuelt, eksempelvis til at øge indlæringen i en undervisningssituation. En elev er i stand til at gætte at modelleringen består i at udforme modellen, men er ikke med på hvad en matematisk model er. Uden en viden om, hvad en matematisk model er for noget mangler der et vigtigt element i, at eleverne kan siges at indfri kravet svarende til modelaspektet. I KOM-rapporten hedder det således i forbindelse med det almene gymnasium om "Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder":

> Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller. [...] Eleverne skal herigennem udvikle en viden om og en forståelse af, at matematik har mange væsentlige anvendelser, og de skal kende nogle karakteristiske eksempler på, hvordan matematik rent faktisk anvendes, og hvilken betydning det har. (Niss & Jensen, 2002, s. 267)

Så et er altså at selve fundamentet, dvs. de matematiske modeller, for de af eleverne opremsede anvendelser mangler. Noget andet er imidlertid, som antydet tidligere, at det af eleverne heller ikke eksemplificeres, hvordan matematik rent faktisk anvendes ligesom der heller ikke tales om den betydning anvendelsen har. Selvfølgelig blev der ikke i spørgeskemaet spurgt direkte dertil, men i interviewene blev der indirekte lagt op til diskussion af sådanne aspekter omend uden de store konsekvenser til følge.

Matematikkens indre strukturer

Formålet i 2007-bekendtgørelsen svarede til aspektet omhandlende matematikkens indre strukturer lyder på, at eleverne skal kunne redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori.

Hovedparten af eleverne giver i deres besvarelser af spørgsmål 10 udtryk for, at matematik er en videnskab. Hvorfor det forholder sig sådan er der dog vældig mange forskellige meninger om. Nogle mener dog, at matematik i højere grad er et redskab for andre fag, eller at matematikken er et sprog. Svarene på samme spørgsmål i 1980 synes ikke stort anderledes:

> [Spg. 10] Selv om spørgsmålet fremkalder rådvildhed, vil langt de fleste kalde matematik en videnskab, nogle med det argument, at når man forsker i den, og den udvikler sig, så må det være en videnskab. [...] Mange er inde på, at hvis matematik er en videnskab er den det på en anden måde end andre videnskaber, f.eks. astronomi, fysik og kemi. Nogle vil ikke kalde matematik for en videnskab, men snarere for et redskab, bl.a. for andre videnskaber. [...] På det uddybende spørgsmål om hvad matematik i givet fald er en videnskab om, svares meget forskelligt: "Cirkler, trekanter og deres sammenhænge", "om

> matematiklovene", "om tal og deres sammenhænge", "om sammenhænge". (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 60)

Også 1980-besvarelserne af spørgsmål 11 lægger sig i nogen grad op af dem fra 2007:

> [Spg. 11] Et flertal tror, at professionelle matematikere udover at undervise og skrive lærebøger, beskæftiger sig med at forske i eller videreudvikle matematik, men der er stor usikkerhed overfor hvad det vil sige. Adskillige tror dog, at der især er tale om at forenkle, effektivisere og finde nye sammenhænge i allerede etableret viden. I den forbindelse er der mange der finder det svært at tro, at der foregår produktion af egentlig ny matematik.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 54)

I undersøgelsen fra 2007 var der imidlertid mange elever som meldte pas til besvarelsen af dette spørgsmål. Af de der svarede mente nogle, at matematikeres arbejde består i kontrol af allerede etableret viden – i stil med svarene fra 1980. 2007-besvarelserne byder dog som set også på et par mere kvalificerede gæt. På spørgsmålet om man kan tale om 'ny matematik', mener flere af de interviewede, at det kan man ikke. En del af begrundelserne herfor kan føres tilbage til den overvejende platonistiske indstilling blandt eleverne som beskrevet i forbindelse med spørgsmål 5. Blandt de af eleverne som godt mener man kan tale om ny matematik foreligger der næsten ingen konkrete bud på, hvad det vil sige – atter et resultat lig det fra 1980 (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 54).

Igen i spørgsmål 12, omhandlende matematikkens opbygning, er der mange der vælger ikke at svare. Af de der rent faktisk svarer bringer nogle elever matematikkens deduktive væsen i spil ved at nævne definitioner, sætninger og beviser. Også her er der er vis lighed med besvarelserne fra 1980:

> [Spg. 12] Spørgsmålet mødes med stærk rådvildhed og svarene er gennemgående upræcise. Næsten alle nævner, at man starter med noget simpelt, hvorefter man bygger videre på det. Mange nævner, at man starter med definitioner, hvorefter man går videre til sætninger som bevises og eksempler. Flere er inde på at man fremsætter hypoteser om visse sammenhænge og derefter søger at bevise disse hypoteser.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 56)

Heller ikke i 1980-undersøgelsen lader det til, at eleverne nævner aksiomer med et ord. I forbindelse med spørgsmål 10 mener nogle elever, at matematikken var en naturvidenskab, idet den benytter sig af de samme metoder som de (øvrige) naturvidenskabelige fag. I lyset af spørgsmål 12 er det interessant, at ingen af disse elever lader til at stoppe op og tænke på, hvorvidt opbygningen af de (øvrige) naturvidenskabelige fag ligner den af matematik. Her tænker jeg specielt på de induktive og deduktive principper der ligger til grund for de forskellige naturvidenskaber.

Med spørgsmål 13 bliver det igen muligt at få en stærk opbakning til samme svar blandt eleverne. Hovedparten mener, at matematiske sætninger bevises for at sikre sandhed og fejlfrihed, eksempelvis i videre brug af resultaterne. Enkelte mener også, at beviser bidrager til forståelsen. Og nok engang er der lighed med svarene fra 1980:

> [Spg. 13] Der er vidtgående enighed om, at beviser for sætninger tjener til at skabe sikkerhed og begrundelser for de påstande, der fremsættes. Hvis sætningerne ikke blev bevist kunne man ikke være sikker på med rette at kunne bruge dem. Mange fremhæver beviser som et middel til at styrke forståelsen. Nogle mener at beviser også har til formål at indøve logisk tankegang.
>
> (Christensen & Rasmussen, 1980, s. 58)

Beviser som et middel til forståelse nævnes også af nogle elever i 2007.

Med hensyn til det almene gymnasium lyder det i KOM-rapporten under "Matematikkens karakter som fagområde":

> Eleverne skal erhverve en forståelse af, hvilke problemstillinger og metoder, der er karakteristiske for faget matematik. Specielt på A-niveau lægges der vægt på, at eleverne opnår en forståelse af matematikfagets særlige karakter og struktur, herunder aksiomatisk-deduktive teoriopbygninger. (Niss & Jensen, 2002, s. 269)

Med hensyn til den første sætning kan der nok stilles spørgsmålstegn for nogle elevers vedkommende i det de mener, at matematikken anvender de samme naturvidenskabelige metoder som de (øvrige) naturvidenskabelige fag. Få nævner endda, at matematik ligesom biologi, eksempelvis, baserer sig på eksperimenter. Et par elever nævner i interviewene, at matematikken er deduktiv, men som tidligere påpeget nævner ingen af dem aksiomer med et ord. Ingen af eleverne omtaler i øvrigt det faktum, at der findes forskellige typer af matematiske beviser – dette er ellers givet som eksemplificering med hensyn til det almene gymnasium i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002, s. 269).

Konklusion

De tre aspekter ("det historiske aspekt", "modelaspektet" og "matematikkens indre strukturer") fra 1987-bekendtgørelsen kan spores tilbage til (Niss,1980), hvor aspekterne udgør tre ud af fire såkaldte genstande. De tre aspekter er at genfinde i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002), denne gang som tre forskellige former for overblik og dømmekraft. I Niss (1980) var "matematiske kompetencer" en ikke-udtalt del af de fire genstande, men med KOM-rapporten blev formerne for overblik og dømmekraft, de to i al fald, kædet sammen med kompetencerne. I forbindelse med beskrivelsen af kompetencerne i KOM-rapporten anvendes også begreberne *i-*, *om-* og *med-matematik* (for en mere uddybede beskrivelse af disse begreber se Jankvist, 2007). Disse begreber kan hver især også ses som relaterende sig til de tre former for overblik og dømmekraft: i-matematik til "matematikkens karakter som fagområde", om-matematik til "matematikkens historiske udvikling ..." og med-matematik til "matematikkens faktiske anvendelse ...". I 2007-bekendtgørelsen gives i alt ni faglige mål med undervisningen. Tre af disse ni mål stemmer overens med de tre former for overblik og dømmekraft, og derfor også med de tidligere tre aspekter og derfor igen også med de tre af de fire genstande fra Niss (1980). De faglige mål forventes ikke kun dækket af kernestoffet, men også gennem supplerende stof. I forslagene til hvad det supplerende stof kan omfatte bliver forbindelsen til de tre aspekter helt tydelig. Ydermere bør nævnes at kendskab til principielle egenskaber ved matematiske modeller og modellering indgår som en selvstændig del af kernestoffet.

Men i hvilken grad synes de adspurgte elever i 2g-klassen så at indfri de 'tre aspekter'? Med hensyn til det historiske aspekt hersker der blandt mange af eleverne en platonistisk opfattelse af, at matematikken altid har eksisteret. Dette syn må formodes at have en indflydelse på i hvor høj grad eleverne ser matematikken som noget menneskeskabt. Nogle elever er i stand til at angive cirka-årstal på matematikkens tilblivelse, men konkrete eksempler gives yderst sjældent. Dette gør det også svært at relatere elevernes billede af matematikkens evolution til såvel den historiske som den kulturelle udvikling i øvrigt. En egentlig demonstration, som der står i 2007-bekendtgørelsen, er det derfor svært at tale om. Med hensyn til modelaspektet er eleverne i stand til at opremse en lang række matematikanvendelser i samfundet. Antallet reduceres dog kraftigt når de bliver bedt om at frasortere udelukkende brug af de fire regningsarter og lignende, specielt reduceres antallet af nævnte anvendelser i deres egen hverdag på denne bekostning. Egentlige specifikke eksempler på anvendt matematik bliver der kun i yderst sjældne tilfælde tale om. Elevernes forståelse af hvad matematiske modeller og modellering er synes helt i bund. Med udgangspunkt i KOM-rapportens kommentar om det almene gymnasium forekommer der derfor at mangle et grundlæggende 'link' mellem matematikkens verden og anvendelsen af matematikken i den ikke-matematiske verden. Bekendtgørelsens krav om demonstration af matematikanvendelser inden for udvalgte områder kan kun i nogen grad siges at være opfyldt, mens kravet omhandlende viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling slet ikke synes opfyldt. Matematikkens indre strukturer er det aspekt som blandt eleverne synes bedst opfyldt, selv om der også her er store mangler at spore. Flertallet af elever er på det rene med, hvorfor man beviser matematiske sætninger. Nogle elever har også en vis forståelse for den deduktive side af matematikken (definition, sætning, bevis), men mange svarer slet ikke på spørgsmålet om matematikkens opbygning og nogle elever ser ingen forskel mellem teoriopbygninger i matematikken og de øvrige naturvidenskabelige fag. En mulig fejlkilde er jo selvfølgelig, at eleverne på det tidspunkt hvor de blev interviewet endnu ikke gennem deres undervisning havde fået belyst de tre aspekter. For modelaspektet og i nogen grad for det historiske aspekt bekræfter et interview med deres underviser dette. Men at dette skulle være den fulde forklaring synes usikkert. Alt i alt må man sige, at der er rigelig plads til forbedringer førend eleverne kan siges at opfylde de 'tre aspekter' og mønstre en forståelse af matematikkens "identitet" som denne er beskrevet i den ny bekendtgørelse (se introduktionen).

Til trods for at de 'tre aspekter', i den ene eller den anden form, nu har eksisteret i tyve år i det danske gymnasium tyder den i forrige afsnit præsenterede sammenligning på, at matematikopfattelserne hos 2g'ere ikke har ændret sig stort i løbet af disse år. Faktisk er der tale om en forbavsende stor lighed idet der for det meste kun forekommer nuanceforskelle imellem besvarelserne i dag og de 27 år gamle. De eneste observerbare afvigelser forekommer at være, at en konstruktivistisk opfattelse synes mere udbredt blandt eleverne i 1980 end i 2007, flere elever i 1980 synes i stand til at angive tidspunkter for den historiske udvikling af matematikken og flere af eleverne i 1980 synes at have en ide om, hvordan man opbygger et område af matematikken. At eleverne i 2007 synes præget af en platonistisk indstilling kunne selvfølgelig skyldes påvirkning fra deres underviser. Dette blev imidlertid afkræftet gennem lærerinterviewet, idet underviseren i høj grad selv gav udtryk for konstruktivistiske holdninger og synspunkter vedrørende matematikkens natur.

Det nærliggende spørgsmål er nu, hvorfor der fra syv år før de 'tre aspekter' blev indført og til nu tyve år efter ikke kan spores nogle ændringer. En af hovedårsagerne skal nok findes i, at de 'tre aspekter' i 1987-bekendtgørelsen snarere var fremlagt som forslag end som krav. Man kan af den grund gisne om, at de 'tre aspekter' som resultat heraf ofte er blevet nedtonet i undervisningen eller måske ligefrem helt udeladt. Efter sigende skulle en vittighed da også have været at omtale dem som de 'tre suspekter'. I bekendtgørelsen af 2007 er inddragelsen af modstykkerne til de 'tre aspekter' i højere grad betonet som krav til den gymnasiale matematikundervisning, da de jo nu hører under de faglige mål. Dette har for eksempel udmøntet sig i, at elementer af matematikkens historie for første gang er kommet med i lærebøgerne. Spørgsmålet er imidlertid, hvorledes lærebøgerne vælger at forvalte de 'tre aspekter' i deres fremstilling og i hvor høj grad forfatterne lader opfyldelsen af kravene være op til de enkelte undervisere. Et andet spørgsmål går på i hvor høj grad de enkelte undervisere ser sig i stand til at opfylde kravene og i hvilken grad de (underviserne) eventuelt er villige til at ændre allerede eksisterende praksis. For eksempel med hvilke undervisningsmaterialer de påtænker at efterleve kravene (så frem i fald lærebøgerne, eller dele af disse, findes utilstrækkelige). Med hensyn til inddragelsen af matematikkens historie i lærebøgerne kan der godt argumenteres for at denne i forhold til KOM-rapportens intentioner er ganske utilstrækkelig (Jankvist, 2008a). Og et tredje spørgsmål går på om 'opgraderingen' af de 'tre aspekter' til faglige mål vil komme til udtryk ved at eleverne bliver testet i disse til eksamen, hvilket de jo strengt taget burde. I hvert fald er det mit indtryk at de blødere krav i 1987-bekendtgørelsen kun sjældent førte til dette. Spørgsmålene er mange, og svarene sikkert ligeså, men én ting er sikkert; det vil være interessant at se resultaterne fra en lignende undersøgelse som den her præsenterede, foretaget når de 'tre aspekter' har tyve år mere på bagen, i 2027.

Taksigelser

En stor tak til 2g-eleverne på Ørestad gymnasium for deltagelse i spørgeskema-undersøgelsen og de opfølgende interviews. Ligeledes en stor tak til deres matematiklærer, Randi Petersen. Mange tak til Mogens Niss for hans beredvillighed til at besvare spørgsmål angående 'de fire genstande', de 'tre aspekter', KOM-rapporten, etc. Tak til Morten Blomhøj for grundig gennemlæsning og kommentering af artiklen. Og tak til Neslihan Sağlanmak for transskribering af de foretagne interviews.

References

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education* (The 14th ICMI study). New York: Springer.

Boyer, C. B. (1991). *A History of mathematics* (Second edn). New York: John Wiley and Sons Inc.

Christensen, J. & Rasmussen, K. L. (1980). *Matematikopfattelser hos 2.G'ere – en analyse* (Tekster fra IMFUFA, number 24A). Roskilde: IMFUFA.

Davis, P. J. (2005). Interview med professor emeritus Philip J. Davis den 6. marts 2005. Foretaget af U. T. Jankvist og B. Toldbod på Brown University, Providence.

EBO (2008). Science. I *Encyclopædia Britannica Online*. Retrieved May 20, 2008 from http://www.britannica.com

Hansen, H. (2001). Opfindelse eller opdagelse? In M. Niss (Ed.), *Matematikken og verden* (Kapitel 3, pp. 65–96). København: Forlaget A/S.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Oxford University press.

Jankvist, U. T. & Toldbod, B. (2007). The hidden mathematics of the Mars exploration rover mission. *The Mathematical Intelligencer*, 29 (1), 8–15.

Jankvist, U. T. (2007). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – generelt set. *MONA*, 3 (3), 70–90.

Jankvist, U. T. (2008a). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – gymnasialt set. *MONA*, 4 (1), 24–45.

Jankvist, U. T. (2008b). *Kodningsteoriens tidlige historie – et undervisningsforløb til gymnasiet* (Tekster fra IMFUFA, number 459). Roskilde: IMFUFA.

Katz, V. (1998). *A history of mathematics – an introduction* (Second edition). Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (The 14th ICMI study) (pp. 3–32). New York: Springer.

Niss, M. & Jensen, T. H. (Eds.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18). København : Undervisningsministeriets forlag.

Niss, M. (1980). Nogle aspekter for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990. *Normat*, 28 (2), 52–60.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 367–378). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse*, 5 (9). Retrieved May 20, 2008 from http://udd.uvm.dk/199909/udd9-3.htm?menuid=4515

Niss, M. (2001). Indledning. In M. Niss (Ed.), *Matematikken og verden* (Fremads debatbøger – videnskab til debat). København: Forlaget A/S.

Pilemann, H. (1996). *Retorik eller realitet? Anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903-88* (Master's thesis. Tekster fra IMFUFA, nr. 325). Roskilde Universitetscenter.

Undervisningsministeriet (1984). *Bekendtgørelse af 1984*.

Undervisningsministeriet (1987). *Bekendtgørelse af 1987*.

Undervisningsministeriet (2007). *Læreplan: Matematik A, Matematik B, Matematik* C (Bilag 35, 36, 37). Retrieved May 20, 2008 from http://us.uvm.dk/gymnasie//vejl/

Notes

1 Der har i KOM-rapporten indsneget sig en fejl i figur 4.1 såvel som figur 4.2, hvor det hedder: "At spørge og svare i, med og *om* matematik" (kursiv tilføjet). 'Om-matematik' indgår ikke i KOM-rapprotens beskrivelse af den første gruppe af kompetencer. I beskrivelsen af den anden gruppe indgår om-matematik i kommunikationskompetencen. Generelt set hører om-matematik hovedsageligt til de tre former for overblik og dømmekraft.

2 For en yderligere og generel beskrivelse af matematikkens usynlighed se Niss (1994). For et specifikt eksempel hentet fra rumindustrien, mere præcist MER-missionen til Mars, se Jankvist and Toldbod (2007).

Uffe Thomas Jankvist

Uffe Thomas Jankvist is a third year Ph.D. student at Roskilde University. His Ph.D. study concerns the use of history of mathematics in mathematics education. As part of his Ph.D., he has designed and implemented two historical teaching modules in an upper secondary mathematics class with the purpose of seeing how the intentions of the KOM-project and the new Danish regulations for the upper secondary mathematics programme concerning the inclusion of history may be fulfilled. It is this work that has led him to consider students' beliefs about the nature of mathematics.

Summary

Based on the so-called 'three aspects' from the 1987-regulations for the Danish upper secondary mathematics programme this article discusses second-year upper secondary students' beliefs about the nature of mathematics. That is to say, it investigates the students' beliefs concerning the historical evolution of mathematics, the application of mathematics in society, and the inner structures of mathematics as a scientific discipline. Firstly, the article examines the origin of the 'three aspects' as well as the role they play in both the KOM-project of 2002 and the new regulations for the Danish upper secondary mathematics programme of 2007. Secondly, it discusses how the students in a concrete second-year class of upper secondary level seem to fulfil the goals of the 'three aspects'. Thirdly, the results of this study are compared to a similar study from 1980 and differences and similarities between the two are discussed. It is concluded that there still is room for improvement concerning the fulfilment of the three aspects, and that the students' beliefs in the 1980-study and in the 2007-study are very similar. In the end, the article speculates upon why the 'three aspects' do not seem to have had a larger impact on the mathematics teaching on upper secondary level when they have been in the regulations for twenty years now.