

Valg av hoderegning som arbeidsmetode

FRODE OLAV HAARA

Stadig oftere opplever vi at elever bruker kalkulator til å gjøre utregninger som må karakteriseres som enkel hoderegning. Artikkelen omhandler et prosjekt gjennomført på ungdomstrinnet med fokus på å bevisstgjøre elevene i valget av arbeidsmetode, og øke bruken av hoderegning. Sentralt står bruken av et tradisjonelt virkemiddel i en matematikkundervisning preget av lærerens tro på aktive og læringskritiske elever.

Indikasjoner fra skolen og dagliglivet om at bruken av hoderegning som arbeidsmetode ved elementære utregninger synker til fordel for stadig mer unyansert bruk av kalkulator, tilsier at hoderegning ikke lenger er et like opplagt første alternativ ved en elementær utregning (Haara, 2000). Vi ser til stadighet eksempler på at oppfatningen av hva som er tilstrekkelig kunnskap i hoderegning går i retning av et snevrere omfang av hoderegningsferdigheter og automatiserte tabellkunnskaper. Hoderegningen ser i noen grad nærmest ut til å bli tillagt anakronistiske trekk, gjennom oppfatning av den som en til dels foreldet synsmåte knyttet til utregninger, målt opp mot blant annet kalkulator.

På bakgrunn av dette ble et prosjekt gjennomført på ungdomstrinnet. Formålet var å vurdere effekten av å anvende et isolert sett enkelt hoderegningstiltak til å øke elevenes bevissthet omkring hoderegning og valg av arbeidsmetode ved elementære utregninger. Sentralt i prosjektet stod en kritisk forståelse av at hoderegning må oppfattes som nyttig (Skovsmose & Borba, 2004), og at elevene selv må se at de har behov for å bruke hoderegning.

Frode Olav Haara

Høgskulen i Sogn og Fjordane

I Haara (2000) blir begrepene hoderegning og tallfølelse definert til henholdsvis:

Med hoderegning vil det her menes å regne ut eksakte svar på elementære tallsammenhenger, uten bruk av papir og blyant eller andre utregningshjelpemidler, og vanligvis ved hjelp av gjenkallelse av automatiserte tallfakta eller utradisjonelle mentale strategier (Haara, 2000, s. 34).

Number sense refers to a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgements and to develop useful strategies for handling numbers and operations (McIntosh, Reys & Reys, 1992, s. 3; in Haara, 2000).

Begrepene er i denne artikkelen tillagt samme tolkning som hos Haara (2000).

Prosjektet ble gjennomført over ni uker. Denne perioden gav store mengder data, og indikasjoner på utvikling over tid. Den tidsmessige utvikling er vanskelig å vise gjennom presentasjon av et fåtall episoder. Episodematerialet som presenteres kan derfor kun oppfattes som et innblikk i den utvikling og endring som fant sted. Resultatene fra prosjektet bygger på et mye mer omfattende datagrunnlag enn det som eksplisitt er inkludert i artikkelen.

Teoretisk bakgrunn

Valget av arbeidsmetode elevene foretar når de skal utføre en utregning bygger på et komplekst grunnlag. Det betyr at det ikke fins entydige svar på hvordan økt vektlegging av hoderegning bør finne sted i undervisningen, så lenge man skal ta hensyn til krav om økte ferdigheter, styrket forståelse, bevisste avgjørelser i en kompleks valgprosess og gjensidig påvirkning mellom ferdigheter, forståelse og avgjørelse (Haara, 2000).

God tallfølelse kan i seg selv gi økt vurdering av hoderegning som alternativ (Shuard et al., 1991), men det er de tre faktorene nytte, behov og vilje som først og fremst gir mulighet for å påvirke bevisstheten omkring bruk av hoderegning som arbeidsmetode (Haara, 2000). En påvirkning for å gjøre elevene mer bevisste i forhold til egne valg av arbeidsmetoder, og som legger opp til hyppigere vurdering av hoderegning som utregningsalternativ, bør derfor i første rekke ta utgangspunkt i at disse faktorene avgjør hvilken arbeidsmetode som velges.

Fra forskerhold hevdes det at skolens vektlegging av hoderegning er begrenset, og at relativt lite forskning knyttet til temaet i undervisningen er tilgjengelig (Darken, 1991; Thompson, 1992; French, 1997). Ute i skolen opplever vi ofte at elever er blitt for avhengige av kalkulatoren, og det er grunn til å sukke når kalkulator blir brukt til å regne ut for eksempel $136 \div 10$. Manglende evne til å gjøre slike oppgaver i hodet vitner om liten forståelse for grunnleggende begrep (Darken, 1991), og om en undervisning som ikke har klart å gi elevene behov for hoderegning i en utvikling der kalkulator har blitt innrømmet en stor posisjon. I økende grad hevdes svaret på dette å være en dreining tilbake mot mer tradisjonell undervisning knyttet til hoderegning (Se for eksempel Forr, 1998; MacLeod, 1998).

Det kan settes som kriterier for kritisk eller sosialkonstruktivistisk matematikkundervisning at eleven skal se nytten i læringen (konstruksjonen) av matematikken, og være den aktive part i læringen (Björkqvist, 1993; Skovsmose & Borba, 2004). Til tross for den mulige konflikt som ligger i innføring av arbeidsformer som utfordrer en slik oppfatning, er det i denne sammenheng grunnlag for å diskutere om anvendelse av tradisjonelle virkemidler som drilloppgaver og lærte normer for løsning av hoderegningsoppgaver ennå har en funksjon i skolen. Det ser nemlig ut til at mangelen på prioritering av hoderegning, kombinert med friere bruk av kalkulator, har ført til at elevene er blitt mer usikre i hoderegning og sjeldnere velger denne arbeidsmetoden (Usiskin, 1983; Ruthven, 1998; Haara, 2000). I tillegg er en god del uorganisert og selvfølgelig hoderegningsarbeid blitt borte fra skolen, gjennom at bruken av standardalgoritmer for utregninger er gått kraftig ned (Welsh, 1992).

McIntosh (1995) hevder at drilloppgaver fremdeles blir brukt som metodisk alibi for å vektlegge hoderegning i skolen, og at dette blir foretrukket på grunnlag av argumenter for at drill er den beste metode for automatisering.

To områder defineres av forskning som sentrale for hoderegning; gjenkalling og strategibruk (Cockcroft, 1982; Hedrén, 1985; Sowder, 1990; Fuson, 1992; Welsh, 1992; French, 1997), og disse må prioriteres i bruken av skriftlige oppgaver til styrking av hoderegningen. Videre må bruken av skriftlige oppgaver unngå instruering av strategier, da disse fort kan oppfattes som en standard (Sowder, 1990; Carpenter et al., 1998), og inkludere overslagsregning. Forskning viser at overslaget som idé har vist seg vanskelig å forstå, med de følger det har for bruken av overslag, og hoderegning i den forbindelse (Hedrén, 1985; Lindblom, 1998). Hedrén (1985) viser blant annet til observasjon av gjennomført overslag, med etterfølgende utregning ved hjelp av kalkulator.

Metode

Datainnsamlingen i prosjektet ble gjort i løpet av ni uker. Kvalitative data ble hentet i den første, og de fire siste ukene av perioden, og er basert på ikke-deltagende observasjon. Under observasjonene ble det gjort lyd-båndopptak og tatt notater ved ikke-verbale hendelser som bruk av kalkulator eller standardalgoritmer.

I data opptrer elev (E) og lærer (L). Elevuttalelsene er nummerert, slik at det er mulig å holde oversikt over elevenes interne ordveksling. Man kan se når en elev tar ordet, og når en annen tar over. Nummereringen beholdes når en elev involveres i en diskusjon, slik at oversikten over elevrollen bevares.

En episode består av alle meningsutvekslinger omfattet av en tematisk kontinuitet, uten bytte av deltagere eller sosiale roller (Garvey, 1984). Analysen av en episode er til dels påvirket av en dialogisk tilnærming til kommunikasjon gjennom at analyse av en formulering eller handling må ta hensyn til følgende tre faktorer:

- 1 Sammenhengen med allerede kjente formuleringer og handlinger.
- 2 Formuleringen eller handlingen selv.
- 3 Sammenhengen med de etterfølgende formuleringer eller handlinger (Linell & Markova, 1993: s.183).

Rammer

Prosjektet ble gjennomført i en 9. klasse. Klassen besto av 22 elever, 12 jenter og 10 gutter. I følge læreren hadde klassen stor faglig spredning. Elevene arbeidet stort sett flittig, og fulgte lærerens opplegg som regel uten diskusjon knyttet til organisering og deltagelse.

Læreren skrev lite på tavla, og hadde bevisst korte økter med styrt aktivitet. I stedet ble lærebokstudier prioritert. Han la vekt på oppgavearbeid i timene, og at elevene alene eller i små grupper måtte sette seg inn i stoffet og bruke dette i oppgaveløsning. I felles gjennomgang av begreper, sammenhenger og oppgaver ble det forventet elevdeltagelse.

Elevene var altså selv ansvarlige for å konstruere oppfatninger av matematiske begreper, samt å anvende disse. Det var tydelig en overensstemmelse om dette mellom elevene og lærerne, da rammene for timene aldri ble utfordret, selv de for en utenforstående kunne se relativt løse ut. En del arbeidssurr og spontane gruppearbeid uten geografiske begrensninger, samt til dels opphetede, faglige diskusjoner blant elever eller mellom elever og lærer preget til tider arbeidstida.

Prosjektet ble lagt mot slutten av grunnskolen fordi problematikken med valg av arbeidsmetode blir mer aktuell etter hvert som elevenes frie og selvstendige bruk av kalkulator tiltar (Darken, 1991), samt at når elevene nærmer seg slutten av ungdomstrinnet har de et mer utkrystallisert arbeidsmønster enn i yngre år, og kan forventes å reflektere mer over egne valg. I tillegg viser undersøkelser (Lindblom, 1998) at det er først mot slutten av ungdomstrinnet at utviklingen av elevenes hoderegningserfardigheter stanser opp, og hos enkelte faktisk utsettes for en form for desintegrering.

Tiltaket

Tiltaket var rent skriftlig, og besto av arbeid med to typer oppgaveark under tidspress. Det ene arket inneholdt en mengde elementære tabelloppgaver (se Figur 1), mens det andre inneholdt få, men mer konstruktive

<i>NAN:</i>	$10 \cdot 5 =$	$7 + 4 =$	$8 + 9 =$	$14 - 9 =$
$\frac{14}{2} =$	$\frac{28}{14} =$	$3 \cdot 7 =$	$2 \cdot 3 =$	$7 + 3 =$
$6 \cdot 7 =$	$6 \cdot 3 =$	$11 - 4 =$	$\frac{13}{7} =$	$5 + 6 =$
$\frac{21}{3} =$	$6 + 6 =$	$6 + 7 =$	$9 \cdot 3 =$	$4 \cdot 7 =$
$3 \cdot 10 =$	$2 + 5 =$	$9 - 4 =$	$1 \cdot 3 =$	$12 - 7 =$
$1 \cdot 1 =$	$22 - 9 =$	$9 \cdot 10 =$	$9 \cdot 9 =$	$12 + 7 =$
$7 + 11 =$	$6 \cdot 5 =$	$4 + 7 =$	$17 - 8 =$	$8 + 5 =$
$\frac{22}{11} =$	$\frac{40}{4} =$	$12 + 2 =$	$3 \cdot 1 =$	$6 \cdot 8 =$
$8 \cdot 4 =$	$3 \cdot 4 =$	$19 - 11 =$	$2 \cdot 8 =$	$10 \cdot 10 =$
$7 \cdot 8 =$	$7 \cdot 7 =$	$11 - 3 =$	$5 \cdot 9 =$	$8 - 6 =$
$4 + 4 =$	$10 - 8 =$	$\frac{8}{2} =$	$\frac{15}{5} =$	$10 \cdot 6 =$
$7 \cdot 2 =$	$19 - 7 =$	$11 + 10 =$	$3 \cdot 3 =$	$9 \cdot 4 =$
$2 \cdot 7 =$	$4 \cdot 4 =$	$13 + 7 =$	$14 + 9 =$	$5 \cdot 8 =$
$8 \cdot 8 =$	$5 + 3 =$	$7 + 4 =$	$\frac{18}{9} =$	$\frac{20}{5} =$
$4 + 9 =$	$\frac{18}{3} =$	$4 \cdot 7 =$	$4 + 5 =$	$9 \cdot 6 =$
$2 \cdot 10 =$	$4 + 14 =$	$12 - 9 =$	$\frac{6}{2} =$	$8 \cdot 3 =$
$3 \cdot 7 =$	$6 + 8 =$	$23 - 7 =$	$\frac{27}{9} =$	$2 \cdot 2 =$
$10 \cdot 1 =$	$10 + 1 =$	$9 + 5 =$	$4 \cdot 2 =$	

Figur 1. Eksempel på ark med mange elementære tabelloppgaver.

oppgaver (se Figur 2). Elevene arbeidet med totalt elleve forskjellige oppgaveark, i løpet av de ni ukene.

Opgavene og arbeidssituasjonen krevde at elevene benyttet gjenkalling fra addisjons- og multiplikasjonstabeller, samt brukte egne løsningsstrategier når de ikke maktet å løse oppgaven ved bruk av gjenkalling fra minnet. Arbeidet gav altså elevene mulighet til å komme inn på både gjenkalling og strategibruk.

Arbeidet med oppgavearkene fant sted i begynnelsen av matematikk-timene, og effektiv arbeidstid var nøyaktig fem minutter pr. ark. Behovet for hoderegning ble altså gitt gjennom innlagt tidspress i arbeidet med oppgavene, og i tillegg forbud mot bruk av kalkulator på oppgavearkene med mer konstruktive oppgaver, da disse oppgavetyper utfordrer grensen for den enkeltes valg av arbeidsmetode (Haara, 2000). Et eksempel på sistnevnte kan være oppgaven nederst på Figur 2: "Forklar hvordan vi lett kan avgjøre at $8 \cdot 47$ er mindre enn 400?" Ingen av oppgavene

ANSW:
 Regn ut:
 $303 + 310 + 297 + 298 + 300 + 302 = \underline{\hspace{2cm}}$
 Regn ut:
 $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$
 Søtt ring rundt et svar som passer:
 $5 \cdot 60 =$ [30] [3030] [303] [300] [3000]
 Regn ut:
 $65 - 10 - 10 - 10 - 5 - 3 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $65 - 30 - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$
 Hvor mye er 625 delt på 5? $\underline{\hspace{2cm}}$
 En eske inneholder 40 blyanter.
 Hvor mange blyanter er det i:
 a) 10 esker: $\underline{\hspace{2cm}}$
 b) 20 esker: $\underline{\hspace{2cm}}$
 c) 30 esker: $\underline{\hspace{2cm}}$
 d) 40 esker: $\underline{\hspace{2cm}}$
 Forklar hvordan vi lett kan avgjøre at $8 \cdot 47$ er mindre enn 400?
 sv: $\underline{\hspace{2cm}}$

Figure 2. Eksempel på ark med konstruktive oppgaver.

som ble brukt var for øvrig vanskeligere enn at de fleste elevene ville fått til samtlige oppgaver med nok tid til rådighet.

Tiltaket som ble benyttet har naturligvis sine mangler. Grunnen til at det likevel ble sett på som gunstig å bruke et utelukkende skriftlig tiltak var først og fremst at det gjennom slik tilnærming ikke ville bli forsøkt å påvirke elevene ved å sette normer for løsningsstrategier (Sowder, 1990; Carpenter et al., 1998). En kobling til muntlig involvering fra lærer ville åpne for mulighet til å oppfatte eksempler på mentale strategier som instruktive. Videre var det ønskelig å bruke minimal tid på selve tiltaket, slik at arbeidet med pensumstoff skulle bli minimalt berørt, og eventuelle virkninger av tiltaksarbeidet skulle få maksimal mulighet til å tre fram.

Elevene fikk oppgavearkene tilbake, rettet og med små skriftlige kommentarer. De fokuserte på misoppfatninger og konflikter, og gav elevene mulighet til å utvide tallfølelsen, uten at spesifikke strategier ble presset på dem.

Eksempler fra data

I prosjektet var disse hypotesene styrende:

Hypotese I: Tiltaket fører til diskusjon og refleksjon omkring valg av arbeidsmetode.

Hypotese II: Tiltaket fører til økt anvendelse av hoderegning.

I presentasjonen av data blir det gitt eksempler fra analysen av datamaterialet i forhold til hver av hypotesene. Dette for å vise hvordan data ble behandlet og gi mulighet for kontakt med empiriske data som ligger til grunn for prosjektresultatene.

Hypotese I – episode 1

Denne episoden er hentet fra en time hvor klassen skal ha matematikkprøve omtrent midt i prosjektperioden. Tema for undervisningen fram mot prøven har vært potensregning og brøkrekning. Læreren blir spurt om det er tillatt å bruke kalkulator.

- 1 E1: Før jeg begynner, kan du skru ned ovnen?
- 2 E2: Jaa ...
- 3 L: Nei det kan jeg ikke ... Det må vaktmesteren gjøre ... (Går rundt og leverer ut matematikkprøven til prøven)
- 4
- 5 E1: Er det lov å bruke kalkulator?

- 6 L: Ja ... men det er lov å bruke hoderegning også ...
 7 El: Ja, men (Uklart) tenkte ikke det nå ...
 8 L: Det er lov å bruke huet! ...
 9 El: Ja ...

Etter innledende kontakt med læreren (1) kommer eleven (E1) fram til det egentlige poeng med samtalen (5). Eleven utforsker muligheten for å bruke kalkulator i arbeidet med prøven, og læreren gjør oppmerksom på at det fins alternativer som er vel så gode (6). Forespørselen kommer uten at eleven har oversikt over hvilke oppgaver prøven består av, men responsen på lærerens svar i (7) indikerer at forespørselen om å bruke kalkulator kommer på bakgrunn av en gjennomtenkt situasjon. Eleven har reflektert over innholdet i sitt spørsmål.

Selv om læreren svarer bekreftende, er han bevisst vektleggingen av at det er mulig å bruke hoderegning (6). Denne presiseringen fører til at eleven avslører refleksjonen (7) som låg til grunn for det opprinnelige spørsmålet (5). Det gjentatte argumentet fra læreren i (8) blir avgjørende for diskusjonen. Han sier ikke at elevene skal bruke hoderegning, men derimot at det i høyeste grad er tillatt. Det er elevenes egen avgjørelse om de vil bruke hoderegning eller kalkulator. I (9) har da eleven fått endelig bekreftelse på at kalkulator kan brukes, men at det samtidig settes pris på bruk av hoderegning (Observasjonen av timen viste da også at kalkulatoren ble flittig brukt).

Hypotese I – episode 2

Læreren holder på med gjennomgangen av matematikkprøven som episode 1 er hentet fra, når denne episoden innledes. Tema for episoden er gjennomgang av en brøkoppgave som flere elever fant vanskelig. Oppgaven gikk ut på å rangere 6 brøker etter størrelse.

- 1 L: Så kommer vi til en oppgave som er ... mange tuller litt med ...
 2 og det er det der med brøker ... det er vanskelig ... Og da ... det
 3 som kanskje er litt lurt ... når man gjør det der ... at man regner
 4 dem ut ... er at man kanskje gjør de om til desimaltall, slik at
 5 man ser det ... da blir det kanskje lettere å se ...
 6 El: Du kan gjøre alle om til samme nevner ...?
 7 L: Eller gjøre alle om til samme ... samme nevner ... men det kan
 8 være litt vanskelig av og til ... hvis det er veldig mange forskjellige ...
 9 El: Ja, men da er det bare å se hvem som er større ...

- 10 L: Ja, det gjør du ... men det er lettest hvis du bruker kalkulator ...
 11 eller bruker hoderegning ... hoderegning er viktig her også ...
 12 E2: Ja, men det er ikke alltid det er så lett å regne i hodet ... for
 13 eksempel hvis det er komma ...
 14 L: Nei ... (Henvender seg til en elev som bråker.) Har du noe å si
 15 om brøker?
 16 E3: Nei ...?
 17 L: For nå snakker du like høyt som meg, og da blir det litt slik
 18 forstyrrende ... Hva sa du, Jonas? (Navn endret)
 19 E2: Det er jo ikke alltid så lett å bruke hoderegning som å bruke
 20 kalkulator ...
 21 L: Nei, det er ikke alltid like lett, og derfor ... der går det an å bruke
 22 kalkulator ... Hvem er det som har fått den oppgaven der riktig?

Allerede i (1-5) setter læreren standard for hvordan slike oppgaver (brøkrekningsoppgaver) bør håndteres. Mange av elevene har problemer med dem (1), og han fastslår at de er vanskelige å få til (2). Læreren foreslår derfor at elevene skal bruke kalkulator når slike oppgaver skal gjøres. Omregning til desimaltall ved hjelp av kalkulator og sammenligning av disse, er lærerens ukompliserte løsning på elevenes problem (4). Men argumentet læreren møter i (5), viser at lærerens løsning ikke godtas uten argumentasjon. Eleven (E1) hevder at med enkel multiplikasjon (6) kan man rangere brøkene simpelthen ved å se på tellerne (9), og gjøre kalkulatorbruk helt overflødig. Lærerens svar på argumentet (7-8) viser at elevens innvending til lærerens forslag blir tatt på alvor. Han sier seg enig med eleven, men er også rask med å få fram hvor vanskelig det kan være å finne en fellesnevner for alle brøkene. Dette aspektet ved problematikken har ikke eleven tenkt over. Eleven skal likevel ha kreditt for at det reflekteres over hvilke valg som kan gjøres. Dette gir da også læreren, gjennom sin delvise anerkjennelse av bruk av hoderegning i forbindelse med slike oppgaver (10-11).

Det hele utvikler seg til en diskusjon om hvilke arbeidsmetoder som til enhver tid passer best. En annen elev (E2) angriper lærerens uttalelse om at hoderegning har en plass i arbeidet med slike oppgaver (12-13) og (19-20). Eleven ser ut til å tolke lærerens uttalelse som en oppfordring til å bruke hoderegning i forbindelse med omregning til desimaltall, og finner en slik anvendelse av hoderegning både tungvint og vanskelig. Læreren svarer bekreftende på elevens påstand (14), og oppmuntret av dette blir eleven i (19-20) mer kategorisk i sin påstand. Læreren godtar ikke denne siste påstand like lett (21-22), og nyanserer elevens bilde noe

ved å si seg enig i at det ikke alltid er utregninger som det kan forsvares å bruke hoderegning til å regne ut, og at da er kalkulatoren det rette verktøyet å bruke.

I episoden er det tydelige innslag av diskusjon og refleksjon omkring anvendelse av ulike arbeidsmetoder. Når læreren foreslår at elevene kan bruke kalkulator, blir han møtt med både argumenter for andre oppfatninger og støtte for sitt syn. Elevenes argumentasjon viser at de ikke godtar forslag om å bruke en metode ukritisk. Det gis heller inntrykk av at valg av arbeidsmetoder blir tatt ut i fra en vurdering av utregningen som skal gjøres.

Hypotese II

Episoden er fra en time hvor klassen går gjennom kjent stoff før den nevnte prøven. Temaet er brøkgregning, og i det episoden starter har elevene arbeidet en stund med en oppgave læreren har skrevet på tavla ($1/4 + 3/7 =$).

- 1 L: Noen har den allerede ... Hva er det første man må gjøre når
- 2 man skal regne sammen brøker?
- 3 E1: Fellesnevner.
- 4 L: Finne fellesnevner ... Det er viktig når man skal legge sammen
- 5 eller trekke fra hverandre ... Ok, hva blir felles nevner her?
- 6 E2: 28.
- 7 L: Fellesnevner blir 28 ... det fins ikke noe mindre enn det ... Ok,
- 8 da må vi gange med syv oppe og nede på den siden, og syv
- 9 oppe og nede på den siden ...
- 10 E3: Nei, fire!
- 11 L: Hæ ...
- 12 E4: Fire på den siden!
- 13 L: Det må da være likt?
- 14 E5: No!
- 15 L: Hvorfor ikke?
- 16 E6: Du korter syv mot syv der, så det er det samme.
- 17 L: Ja, ja ... så da må vi gange med fire der og der ...
- 18 E7: Åhh, for en dumming ...
- 19 E8: Du kan det jo ikke selv en gang!
- 20 L: Ok, men da må ikke dere gjøre samme feilen i morgen da ...

- 21 Viktig! ... Syv åtteogtyvedeler pluss tolv åtteogtyvedeler ... det er ...?
 22 E9: Nitten femtiseksdeler ... Ha,ha.
 23 E10: Sikkert, da.
 24 L: Hvorfor blir det ikke det?
 25 E9: Fordi ...
 26 L: Jammen vi har jo syv pluss tolv, og åtteogtyve pluss åtteogtyve
 27 ... det blir nitten femtiseksdeler ...
 28 E9: Jammen du har jo allerede funnet fellesnevner ...
 29 L: Vi har funnet fellesnevner ...
 30 E11: Og da plusser du bare sammen telleren, du må ikke gange
 31 åtteogtyve med to ...
 32 L: Ok.

Allerede i (1) indikerer læreren at oppgaven ikke kan vurderes som vanskelig. Dette kan ha hatt betydning for diskusjonsdeltagelsen hos elevene som ikke hadde fått den til på dette tidspunkt, da det ikke er en uttalelse som gir anerkjennelse til elever som ikke har fått den til. Notater fra observasjon viser at ikke hele klassen deltok i diskusjonen.

Men lærerens initiativ i (1-2) får umiddelbar respons (3), og dermed er diskusjonen i gang. Oppgaven har elevene regnet på forhånd, og det er derfor naturlig at det ikke ble observert bruk av eksterne hjelpemidler i løpet av gjennomgangen. Men det bør nevnes at det ble observert en del kalkulatorbruk mens elevene arbeidet med oppgaven på egenhånd. Slik sett kan episoden oppfattes som et eksempel på at enkelte elever fremdeles ikke bruker hoderegning nevneverdig mer når de skal foreta en utregning, enn de gjorde før prosjektet ble startet. Lærerens innvirkning på gjennomgangen av oppgaven er med på å svekke en slik oppfatning av innholdet i episoden, til fordel for en annen tolkning. Han spiller bevisst uforstående (7-9), (11), (13), (15), (17), (24) og (26), noe som er med og skifter fokus i diskusjonen. Elevene må forholde seg til de feilaktige utregningene læreren foreslår (7-9), (17) og (26-27), og kan ikke bare gjengi det de har i sine notater. Noen aktive elever overtar undervisningsrollen, og selv om dette tydelig er uvant for dem (18-19) blir diskusjonen oppklarende (10), (12) og (16). Den nye vinklingen i behandlingen av oppgaven skjer i sin helhet gjennom hoderegning (7-31), styrt av en samtale i rask progresjon. Elevene opponerer og forklarer hvorfor lærerens forslag ikke fungerer.

Gjennom hele diskusjonen arbeider man med relativt enkle tall, og det virker derfor ikke som om det er tvil om at hoderegning er første og eneste arbeidsmetode for elevene. Dette til tross for at de må forholde

seg til andre forslag til løsning enn sine egne. De får vist at de forstår forskjellen mellom multiplikasjon og addisjon (16), og raskt kan håndtere mer kompliserte utregninger i hodet (22-23) og (30-31).

Hurtige taleskifter mellom lærer og elev fører til at det ikke er rom for andre metoder enn hoderegning i diskusjonen, dersom man skal bidra med noe nytt. Om noen av elevene valgte å bruke kalkulator i den individuelle oppgaveutregningen, fikk de derfor bare i begrenset grad utbytte av dette i diskusjonen. Lærerens vinkling av gjennomgangen krevde at elevene tenkte gjennom hva som egentlig er poenget i arbeidet med summering av brøker med forskjellige nevner, og i selve diskusjonen så det som sagt ut til å være liten tvil hos elevene om at hoderegning var det naturlige alternativ å bruke.

Diskusjon

Den enkelte elevs refleksjon over egne valg av arbeidsmetoder i forbindelse med utregninger kommer i observasjonsmaterialet til uttrykk i to sammenhenger; muntlig aktivitet eller individuelt, skriftlig regnearbeid.

Elevene viste utover i perioden økende vilje til å reflektere over egen bruk av arbeidsmetoder i muntlig aktivitet. Diskusjonene i forbindelse med alternative metodevalg gav indikasjoner på at elevene etter hvert ble mer kritiske til å godta forslag om å bruke en metode. I situasjoner der valget reelt sett stod mellom hoderegning og kalkulator, førte dette til at argumentasjonen dreide seg om dette tosidige forholdet. Bruk av standardalgoritmer i forbindelse med utregninger ble ikke observert i løpet av prosjektperioden, så lenge kalkulator var tilgjengelig. Kun et par eksempler i forbindelse med oppgavearkene med konstruktive oppgaver ble registrert. Et slikt resultat er en bekreftelse på at standardalgoritmene er omtrent ute av elevenes vurdering av arbeidsmetoder (Welsh, 1992; Ruthven, 1998).

Økt refleksjon omkring arbeidsmetode og hyppigere vurdering av bruk av hoderegning i muntlig aktivitet, gjør det relativt sannsynlig at prosjektet også hadde innvirkning på elevenes refleksjon og vurdering av arbeidsmetode i forbindelse med skriftlig arbeid. Det er derfor mulig å si at opplevelsen av behov for hoderegning i den spesifikke sammenheng som arbeidet med oppgavearkene var, kan skape aksept for at det i sterkere grad er mulig også å bruke hoderegning på områder, og i situasjoner hvor det kan velges mellom flere arbeidsmetoder (Haara, 2000).

Over ble det nevnt at tiltaksarbeidet så ut til å føre til at hoderegning oftere ble vurdert som arbeidsmetode. På det grunnlaget alene er det også grunn til å anta at hoderegning faktisk ble valgt oftere enn tidligere når en utregning var forestående. Knyttet til muntlig aktivitet støttes en

slik tolkning av en observert minkende, og nesten fraværende bruk av kalkulator i forbindelse med muntlig regneaktivitet utover i perioden. Hvorvidt det samme kan sies om elevenes skriftlige arbeid er vanskeligere å si, men basert på den enkelte elevs vurdering av en utregning i muntlig aktivitet og skriftlig arbeid er det mulig å anta at hoderegning ble benyttet oftere også her.

Et annet moment som taler for økt bruk av hoderegning, både i muntlig og skriftlig aktivitet, er elevenes resultater i arbeidet med tiltaket. Oversikt over prestasjonene viser at stort sett samtlige elever hadde resultatmessig framgang. Ved siden av opplevelsen av behov og sterke sider ved hoderegning, ser det ut til at to faktorer med verdi i andre sammenhenger kan ha kommet direkte ut av dette. Da elevene som gruppe svarte både mer utfyllende og riktig på oppgavene utover i prosjektet, gav analysen av det skriftlige materialet fornemmelser om både styrking av elevenes selvtillit, og sterkere prosesser for automatisering og gjenkalling i forbindelse med elementære utregninger. Dette er to faktorer knyttet til hoderegning som det hevdes blir svekket hos elevene etter som kalkulatoren blir mer og mer benyttet (Usiskin, 1983; Darken, 1991; Ruthven, 1998). Erfaringene fra arbeidet med selve tiltaket tyder derfor på at både selvtillit og kognitive prosesser knyttet til arbeid med elementære utregninger generelt har blitt styrket, gjennom at elevene både økte arbeidstempoet og opparbeidet sikrere håndtering av utregningene innenfor tiltakets snevre ramme.

Når det gjelder skriftlig aktivitet, er det likevel nødvendig å presisere at observasjon og analyse ikke viste noen merkbar tendens til at elevene etter hvert valgte hoderegning når flere arbeidsformer var forsvarlige. Sterkere antydninger til en slik tendens var det på den annen side mulig å se i forbindelse med muntlig aktivitet. At de i større grad viste seg i muntlig aktivitet enn i forbindelse med skriftlig arbeid, kan skyldes behovet for å bruke hoderegning. Dersom elevene hadde ønske om å ta del i en diskusjon omkring en utregning eller et løsningsforslag, hadde de ikke tid til å velge andre metoder enn hoderegning. Bruk av kalkulator ville for eksempel ta for mye tid, når utregningene ble elementære nok. Slike situasjoner vil sjeldnere oppstå i individuelt, skriftlig arbeid. Et unntak er i så fall nettopp en slik situasjon som det aktuelle tiltaket ble presentert i. Det som derfor kan skille disse to arbeidssituasjonene er at elevene ikke opplever det samme behovet for å bruke hoderegning i sitt skriftlige arbeid, som i muntlig aktivitet. I det skriftlige arbeidet må man kun forholde seg til seg selv, ingen andre har innvirkning på framdriften i håndteringen av en utregning. I teorien kan derfor utregninger som blir bestemt utført i hodet i forbindelse med muntlig aktivitet heller bli regnet med kalkulator i det individuelle, skriftlige arbeid. En slik form for tilsynelatende

fornuftsstridig opptreden kan skyldes en rekke faktorer i tillegg til det manglende behovet, for eksempel vane og makelighet (Haara, 2000).

Når hoderegningen ble satt mer i fokus i undervisningen, endret undervisningen seg noe utover i perioden. Læreren begynte å fokusere mer på at det fins alternativer i forbindelse med en utregning, og at en arbeidsmetode ikke nødvendigvis er den eneste aktuelle. Slike initiativ fra læreren gav inntrykk av å fremme både diskusjon og refleksjon omkring valg av arbeidsmetode.

På den annen side viste observasjon at elevenes arbeid med å finne ut av lærestoffet på egen hånd ofte fremmet bruk av kalkulator. I eksperimenteringsfaser ble kalkulatoren benyttet som hjelpemiddel. Slik bruk av kalkulator kan være fruktbar i oppdagelse av tallsammenhenger og strukturer (Shuard et al., 1991; French, 1997). Men når kalkulatoren gis en slik rolle, blir nettopp bevisstheten om når det kan være fornuftig å bruke hoderegning viktig. Omfattende bruk av kalkulator gjennom eksperimentering svekker vurderingen av hvilke arbeidsmetoder som er fornuftige å bruke (Haara, 2000). Dette medfører derfor at en slik undervisningsform også krever at læreren fokuserer på elevenes arbeidsmetoder.

Isolert arbeid med oppgaveark for å fremme hoderegning kan virke tillaget for elevene, eller til og med kunstig (Hatch, 1998), da situasjonen man arbeider i fort kan oppfattes som spesiell, og derfor inviterer til spesialisering. Verdien av et slikt arbeid øker derfor om den blir fulgt opp av muntlig aktivitet med fokus på valg og bruk av arbeidsmetoder. Og selv om tiltaket skulle gi inntrykk av å være banalt og kunstig, vil gevinsten gjennom påvirkningene i andre utregningssammenhenger nødvendigvis måtte utfordre kategoriske avvisninger av tradisjonelle virkemidler innenfor undervisning knyttet til hoderegning (Se for eksempel Shuard et al., 1991; French, 1997). Dette prosjektet er derfor et eksempel på hvordan dagens rådende syn på undervisning bør kunne integreres med bruk av virkemidler fra tradisjonell undervisning. Selve poenget med å inkludere nettopp dette prosjektets tiltak i undervisningen er nemlig at eleven selv skal bli mer bevisst sitt metodevalg, og ikke at samtlige elever skal bruke hoderegning på utregninger hvor de tidligere har brukt kalkulator. Det valget skal og må være elevens eget.

Om elever over tid vil både vurdere og velge å bruke hoderegning oftere etter et slikt forsøk på å sette fokus på hoderegning som arbeidsmetode, gjenstår å se. Prosjektet er ikke alene egnet til å gi konklusjoner av et slikt omfang. Til det er det for mange mulige feilkilder og spesifikke rammefaktorer. Resultatene kan kun indikere en påvirkning knyttet både til vurdering og bruk av arbeidsmetoder, i alle fall på kort sikt.

Til tross for optimistiske resultater er det derfor nødvendig å prøve ut dette, og lignende tiltak, i større skala.

Noen påstander om konsekvenser for undervisning

Avslutningsvis vil jeg hevde, i et didaktisk perspektiv, at følgende faktorer er avgjørende for om det kan forsvares å bruke et slikt tiltak i undervisningen:

- 1 Tiltaket bør ikke være del av undervisningen over for lang tid. Først og fremst er det vanskelig å si hvilke effekter det vil ha i forhold til elevenes motivasjon. Sjansen for at arbeidet med tiltaket vil miste den positive trenden som kan knyttes direkte til arbeidet med oppgavearkene er til stede. For hyppige initiativ til diskusjon/samtale omkring arbeidsmetode kan også miste sin effekt.
- 2 Muntlig fokus bør settes på vurdering og valg av arbeidsmetode når det er en naturlig del av en kontekst, for eksempel sammen med forespørsel om bruk av en spesifikk utregningsmetode i en sammenheng hvor andre alternativer er like aktuelle.
- 3 Arbeidet med oppgavearkene bør finne sted mens elevene arbeider med et pensum som innebærer bruk av både elementære og kompliserte utregninger. Eksempler på slike tema er å finne innenfor både algebra, geometri og tallære. Dette aspektet må ivaretas for at andre sammenhenger for bruk av utregninger skal være tilgjengelige, og behovet for bruk av hoderegning også skal kunne oppleves i arbeidet med pensumstoff. Elevenes arbeid med oppgavearkene må uansett ikke bli stående isolert i undervisningen.

Litteratur

- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 1 (1), 8-17.
- Carpenter, T. P., Francke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A Longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 3-20.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.
- Darken, B. (1991). Arithmetic + calculators + college students = ? *Journal of Developmental Education*, 15 (2), 6-12.
- Forr, G. (1998, 11 april). Framtida i sine bein? *Dagbladet*, s. 3.

- French, D. (1997). *Mental methods in mathematics: a first resort*. Leicester: The Mathematical Association.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Garvey, C. (1984). *Children's talk*. Oxford: Fontana
- Haara, F. O. (2000). Hoderegning og valg av arbeidsmetode ved elementære utregninger i addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 8 (2), 33-51.
- Hatch, G. (1998). Replace your mental arithmetic test with a game! *Mathematics in School*, 27 (1), 32-34.
- Hedrén, R. (1985). The hand-held calculator at the intermediate level. *Educational Studies in Mathematics*, 16 (2), 163-179.
- Lindblom, A. (1998). Gymnasieelevers färdigheter i huvudräkning och överslagsräkning. *Nämnamnaren*, 25 (4), 30-35.
- Linell, P., & Markova, I. (1993). Acts in discourse: from monological speech acts to dialogical inter-acts. *Journal for the Theory of Social Behaviour*, 23 (2), 173-195.
- MacLeod, A. (1998, 28 July). Trash the calculator, it's back to basics in Britain. *The Christian Science Monitor*, p. 1.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnamnaren*, 22 (3), 23-27.
- Ruthven, K. (1998). The use of mental, written and calculator strategies of numerical computation by upper primary pupils. *British Educational Research Journal*, 24 (1), 21-43.
- Shuard, H., Walsh, A., Goodwin, J., & Worcester, V. (1991). *Primary initiatives in mathematics education. Calculators, children and mathematics. The calculator-aware number curriculum*. London: Simon & Shuster.
- Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimension of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 207-228). Dordrecht: Kluwer.
- Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, 37 (7), 18-20.
- Thompson, G. W., Strackbein, D., & Williams, J. D. (1992). Gender differences in an experimental program on arithmetic problem solving and computation. *Mid-Western Educational Researcher*, 5 (1), 20-22.
- Usiskin, Z. (1983). One point of view: arithmetic in a calculator age. *Arithmetic Teacher*, 30 (9), 2.
- Welsh, R. (1992). To what extent do grades 3 and 4 children make spontaneous use of calculators for computation? In B. Southwell, B. Perry, & K. Owens (Eds.), *Space – the first and final frontier*. (pp. 568-573). Nepean, NSW: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Frode Olav Haara

Frode Olav Haara er Cand. Scient. med hovedfag i matematikdidaktikk fra Høgskolen i Agder, og ansatt som høskolelektor i matematikkseksjonen ved Høgskulen i Sogn og Fjordane – avdeling for lærarutdanning og idrett. For tiden er han i en fireårig åremålsstilling som studieleder for allmennlærerutdanningen ved Høgskulen i Sogn og Fjordane.

Forskningsinteresser: Bruk av hoderegning og kalkulator, Valg av arbeidsmetoder ved utregninger, Problemløsningens posisjon i grunnskolen, Praktiske aktiviteters betydning for læring av matematikk.

Frode Olav Haara
HSF-ALI
Postboks 133
6851 Sogndal
Norway
frode.olav.haara@hisf.no

Abstract

Constantly we experience the fact that pupils use calculator to do what we must refer to as elementary mental calculations. This article is based on a project which was carried through in secondary school, focusing on making the pupils more aware when choosing a manner of calculation, and increasing their use of mental arithmetic. The use of a traditional approach in an environment of teaching mathematics featured by faith in active and critical pupils is vital for the project.

