

Johannessen

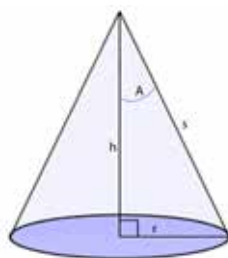
## Kjeglesnitt – en lek med laser

I matematikken kalles de geometriske figurene parabler, sirkler, ellipser og hyperbler for kjeglesnitt. Figurene kommer fram ved å legge skjæringsplan gjennom en kjegle, se figur 2.

En kjegle (figur 1) kan karakteriseres ved en kjegleakse, som høyden ( $h$ ) utgjør en del av. Vinkelen mellom  $h$  og sidekanten  $s$  kan vi kalle  $A$ .  $A$  er lik halve totalvinkelen for toppunktet som utgjør åpningen på kjeglen. Kjeglen kalles rett når høyden står normalt på grunnflaten.

Figur 2 under er hentet fra Wikipedia. Den viser fire ulike snitt vi kan gjøre på en kjegle. En sirkel (rød) oppnås når snittet står normalt på kjegleaksen. De andre snittene danner en vinkel mindre enn  $90^\circ$  med kjegleaksen: Hvis denne vinkelen er større enn  $A$ , får vi en ellipse (grønn). Når vinkelen er lik  $A$  (og parallell med en kjegleside) får vi en parabel (blå), og hvis vinkelen er mindre enn  $A$ , får vi en hyperbel (oransje).

Figur 1 og 2 viser en enkeltkeggle. Hvis vi tenker oss en dobbeltkeggle der kjegleledene er like, har samme akse og åpning og møtes i toppunktet (topp mot topp), så vil vi få to snitt hvis snittvinkelen oppfyller kravet til en hyperbel: ett snitt for hver kjegleled. At en hyperbel har to



Figur 1: En rett kjegle.



Figur 2: Ulike kjeglesnitt.

del, kjenner vi fra geometrien. De andre snittene gir imidlertid bare skjæring med én kjegleled, så vi får bare én parabel, sirkel eller ellipse. Merk: Forsøket i denne artikkelen viser bare en enkeltkeggle.

### Demonstrasjon av kjeglesnitt

Med enkelt utstyr kan vi demonstrere de ulike figurene, og i tillegg kan selve kjeglen synliggjøres.

Hovedpoenget er at en blank nål i prinsippet er en sylinder. Et lys, f.eks. fra en laser som rettes mot den, blir reflektert i det som kalles *sylinderrefleksjon*. Det er en slik refleksjon som er grunnlaget for forsøkene her.

Vi trenger

1. Et mørkt rom
2. Laser (med justerbart underlag).
3. En blank nål (synål eller knappenål).
4. Noe å montere nålen i, f.eks. en vinkork

**Tor Hjalmar Johannessen**  
Tidligere lektor i realfag  
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

eller annet porøst materiale.

5. Kasse: en stor utelykt (kasseformet) med gjennomsiktige vinduer (se figur 3).
6. Fyrstikker eller annet som kan lage røyk, f.eks. en bit myggspiral.

Oppstilling (se figur 3):

1. Nålen festes i korken, helst på skrå, og dette settes inn i glasskassen.
2. Laseren rettes, gjerne horisontalt, mot nålen i kassen, slik at strålen treffer midt på. Det vil si siden nålen er tynnere enn strålen: la like mye av strålen passere på hver side av nålen.
3. Åpne sidedøren på kassen og send røyk inn: Enten tenn myggspiralen, eller stikk en tent fyrstikk inn, blås den ut slik at det begynner å ryke, steng døren før røyken forsvinner ut.

Vi kan observere en lyskjegle som strekker seg fra der strålen treffer nålen. Formen på kjeglen kan varieres med ulike vinkler mellom nål og stråle.

Kjeglen vil avtegne ulike former der refleksjonskjeglen treffer glassveggen i kassen. Siden kjeglen fortsetter ut av glassveggen (usynlig uten røyken), vil den treffe ulike flater på utsiden.

Dette kan være bordet som kassen står på, taket eller vegger i rommet. I tillegg kan vi montere lyse flater av papir eller kartong med ulike vinkler.

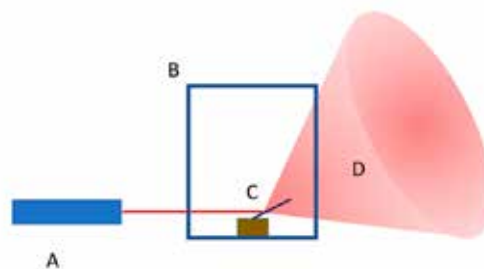
Det er mulig å simulere alle kjeglesnittene som er gjengitt i figur 2. Figur 3 viser apparatoppstillingen.

## Resultater

Bildene i figur 5–11 er tatt hjemme hos forfatteren en mørk høstkveld. Bildene er tatt med mobilkamera.

Figurene 5 og 6 viser strålen i lyskassen etter at den var røyklagt, og når den treffer nålen med ulike vinkler. Merk de forskjellige åpningene på lyskjeglen. Røyken gjør at kjeglen blir synlig.

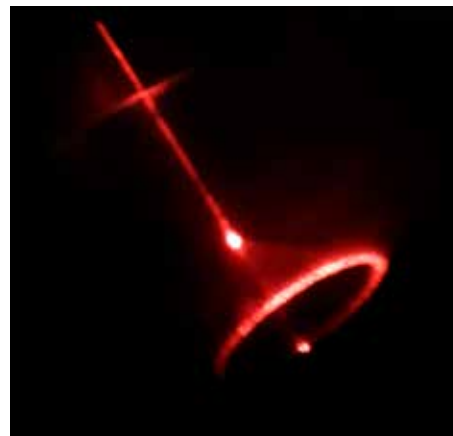
På figurene 5 og 6 ser vi bildet der kjeglen



Figur 3: Apparatoppstilling. Advarsel: Se aldri rett inn i en laserstråle!



Figur 4: Utelykt brukt som lyskasse.



Figur 5: Kjegle og sirkulært snitt der kjeglen treffer glassveggen.



Figur 6: Ved å endre vinkelen mellom stråle og nål får vi en lyskjegle med annen åpning. Her er kjeglen rettet mot høyre med en vinkel  $A$  på nesten  $90^\circ$ .



Figur 8: Ellipse på skråstilt skjerm



Figur 7: En sirkel



Figur 9: Parabel på en skråstilt skjerm

treffer glassveggen på baksiden av nålen. Formen er en sirkel hvis laserstrålen står normalt på glassveggen. Lysprikken midt i sirkelen på figur 5 skyldes laserlys som går litt utenfor nålen og treffer glassveggen uten å bli reflektert.

Figur 7 viser det sirkulære snittet mellom kjeglen og glassveggen til kassen som igjen står normalt på laserstrålen.

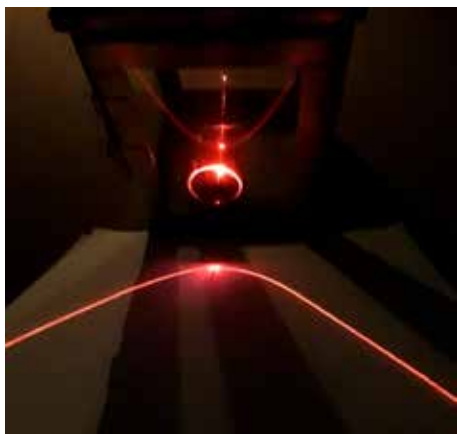
Ved å stille et hvitt ark (eller en skjerm) utenfor kassen på skrå i forhold til laserstrålen får vi bilde av en ellipse (figur 8).

På utsiden av kassen treffer kjeglen bord, tak gulv og vegger og danner med det ulike kje-

glesnitt i stort format. Dette er spesielt velegnet til å avbilde parabler og hyperbler.

Parabler (figur 9): Flaten stilles parallelt med kjeglens sidekant. Det vil si at vinkelen oppfyller kravet slik innledningen angir: Snittflaten er stilt parallelt med sideflaten på kjeglen ( $s$  på figur 1).

Hyperbler (figurene 10 og 11): Flaten stilles slik at den er nokså parallell med og til siden for den opprinnelige strålen (ref. også den innledende teksten). Hyperbelbilder får vi utenfor kassen også på gulv, tak og vegger hvis de er relativt parallelle med laserstrålen, det vil si at



Figur 10: Hyperbel på bordflaten



Figur 11: Hyperbel på en vegg

snittvinkelen er mindre enn vinkel A (figur 1).

Hvis vi har et stort mørklagt rom og en relativt sterk laser, kan vi bruke rommets vegger, gulv og tak som flater for kjeglesnitt. Ved å røyklegge deler av rommet med for eksempel en myggspiral er det en opplevelse å se den nokså «eteriske» kjeglen som sprer seg utover. Forsøk å variere vinkelen mellom nål og stråle, og se hvordan kjegleåpningen og med det kjeglesnittene på tak og vegger endrer seg.

Kjeglesnitt med påfølgende algebraiske ligninger var en gang sentrale deler av matematikkpensumet på gymnas, reallinjen på videregående skole. Forsøk som vist her kan gi elevene en rent geometrisk opplevelse av disse grunnleggende formene – uten nødvendigvis å trekke inn algebraiske ligninger.

## Anvendelser og naturfenomener

I virkelighetens verden spiller kjeglesnitt roller i mange sammenhenger. Sirkler, ellipser, parabler og hyperbler kan vi «treffe på» i mange tilfeller. Det ringformete bølgemønsteret etter en stein som kastes i vannet er et velkjent eksempel, men det fins mange flere. Konstruksjoner basert på kjeglesnitt har vært i bruk siden antikken.

## Ballistikk og kastebevegelser



Figur 12: Ballistikk (fotballspark)

En ball som kastes skrått oppover, vil tilnærmet følge en parabelbane. Uten luftmotstand ville banen vært en perfekt parabel. Det samme gjelder for et gevær- eller kanonprosjektil.

Det kan nevnes at matematikken fikk et oppsving i middelalderen siden mange matematikere ble ansatt av krigsglade fyrster for å beregne vinkler på kanonløpene og med det kulebanene. Lengst ballkast eller kulestøt oppnås med ca. 45 graders vinkel.

## Astronomi og akustikk

Ellipser er vanlige i verdensrommet. Nabolgalaksen til Melkeveien, Andromedatåken, danner en ellipse når vi ser den fra jorda (figur 13). Med en annen observasjonsvinkel vil den ligne en sirkel (ref. figur 2). Planeter går i ellipsebaner rundt sola, og det samme gjør månen rundt jorda. Dette betyr blant annet at månen kan virke mindre eller større om den er langt borte fra eller nærmere jorda i sin bane.



Figur 13: Elliptisk galakse (Andromedatåken). Hentet fra [https://en.wikipedia.org/wiki/Andromeda\\_Galaxy](https://en.wikipedia.org/wiki/Andromeda_Galaxy)

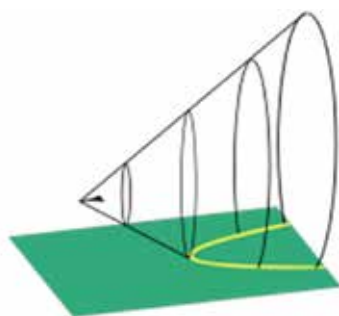


Figur 16: Brokonstruksjon med parabelbuer (Ponte de Arrábida). Hentet fra [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Arrabida\\_1\\_%282%29.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Arrabida_1_%282%29.jpg)  
Fotograf: António Amen



Figur 14: Kjegle (sjokkbølgen bak et supersonisk fly). Hentet fra [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/79/Cone-shaped\\_supersonic\\_shockwave.svg/200px-Cone-shaped\\_supersonic\\_shockwave.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/79/Cone-shaped_supersonic_shockwave.svg/200px-Cone-shaped_supersonic_shockwave.svg.png)

Et supersonisk fly som bryter lydmyren, danner en sjokkbølge i form av en kjegle (figur 14). Sjokkbølgen treffer bakken i form av en hyperbel (figur 15).



Figur 15: Sjokkbølgen treffer bakken. Hentet fra [https://en.wikipedia.org/wiki/Supersonic\\_speed](https://en.wikipedia.org/wiki/Supersonic_speed)

Lysreflektorer i form av parabler brukes som satellittantenner eller for å reflektere lys i sykkel- eller billykter. Store paraboliske reflektorer kan også brukes for lyd, både for å sende og motta i en bestemt retning.

## Brokonstruksjoner og arkitektur

Parabel- og hyperbelformer gir svært sterke konstruksjoner på grunn av fordelingen av belastninger. Dette har lenge vært benyttet i brokonstruksjoner hvor bærebuen er parabel. Figur 16 viser en slik bro. Sydney Harbour Bridge er et annet kjent eksempel på parabelbuer.

Katedralen i Brasilia har en konstruksjon som består av hyperbelformede søyler (figur 17).

Det over 100 m høye havnetårnet i Kobe havn er sammensatt av lett skråstilte styl-



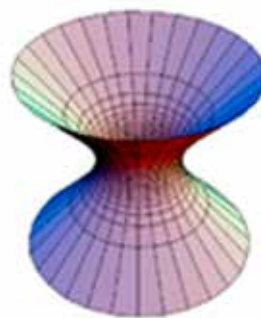
Figur 17: Del av katedralen i Brasilia. Hntet fra [https://en.wikipedia.org/wiki/Cathedral\\_of\\_Bras%C3%ADlia](https://en.wikipedia.org/wiki/Cathedral_of_Bras%C3%ADlia)

ter. Ytterkantene (figur 18) er formet som hyperbler. Konstruksjonen, som kalles hyperboloide, er motstandsdyktig både mot trykk og strekk og velegnet i områder med jordskjelv. Tilsvarende konstruksjoner har lenge vært i bruk for kjøletårnene til atomkraftverk, men da i betong (figur 19). I figur 20 ser vi en trådfigurmodell av en hyperboloide.

Denne artikkelen viser hvordan vi via en enkel «lek» med en laserstråle og en nål kan frambringe kjegleflater og tilhørende kjeglesnitt. Det fins mange eksempler på slike former i naturen som sirkler og ellipser. Parabler og hyperbler er tatt i bruk i mange ulike konstruksjoner siden de gir styrken som trengs til for eksempel tårn og broer. Du utfordres herved til å finne eksempler på kjeglesnitt i ditt eget nærmiljø – enten det er detaljer på en bygning eller kanskje et spesielt møbel?



Figur 19: Kjøletårn for et atomkraftverk. Hentet fra <https://snl.no/kjernekraftverk>



Figur 20: Hyperboloide. Hentet fra <https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Hyperboloid>



Figur 18: Havnetårnet i Kobe. Hentet fra [https://en.wikipedia.org/wiki/Kobe\\_Port\\_Tower](https://en.wikipedia.org/wiki/Kobe_Port_Tower)