

Bråk, bananer och glupska algoritmer

Härom dagen satt jag och funderade på det här med "täljare" och "nämnare". Är det inte så att "tälja" har med berätta att göra, som i förtälja, men också med att räkna, dvs berätta hur många? Nämnaren i sin tur talar om (nämnar) *vilket slags bråk* det är:

$\frac{3}{5}$ betyder därför att vi har 3 stycken av "sorten" $\frac{1}{5}$.

Samtidigt började jag höra en calyposång i mitt inre. Vem är det som sjunger? Snart kände jag igen den heta rösten och så dök den bildsköne jamaicanske calyposångaren Harry Belafonte upp för min inre blick och började sjunga Banana Boat Song:

*Come mister tally man, tally me banana
Daylight come and me wanna go home*

Vad då "tally"? Just det, "the tally man" det var ju han som räknade, han som mätte upp lasten med bananer! Hör bara:

*Six foot, seven foot, eight foot bunch
Daylight come and me wanna go home*

"Tally", förtälja, räkna. En "tally stick" var en sticka där man skar in ett antal, en skåra för varje heltal. På norska heter det "tellestav". En sådan stav kunde också innehålla annan information, tex om astronomiska händelser, årets växlingar med mera. Ett känt exempel på en "stav" med räkneskårar är det afrikanska Ishangobenet som tros vara över 20000 år gammalt. Troligen finns ett samband med "täljare" och att man faktiskt noterat antal genom att *tälja* skårar i en trästicka eller i ett ben. En "tally man" är alltså en person som går omkring med en sådan stav med skårar och avgör när motsvarande antal uppnåtts i verkligheten.

Då är det bara frågan varför det heter "bråk"? Kallades inte bråk förr i gamla läromedel "brutna tal"? Efter lite googlande fann jag den engelska motsvarigheten "broken numbers" och på tyska heter det "Bruch", från "bruch", bryta. Idag säger man ju oftast "fraction" på engelska, och det betyder också brutet. Jämför med kyrkans "The Fraction" som är det engelska namnet på den Sista måltiden, då man ju bryter brödet. Att tal kan vara brutna, dvs uppbrutna i delar, förklarar ju också den lite underliga termen "heltal". Det är först när ett tal kan vara brutet som det finns anledning att påpeka att ett tal kan vara "helt".

Att täljaren talar om "hur många" antyder att man egentligen tänkte i stambråk, dvs utgångsläget för det brutna talet var att täljaren skulle vara 1, som i $\frac{1}{12}$ eller $\frac{1}{17}$. Det stämmer också väl med den egyptiska Rhindpapyrusen där den tidens räknemästare till varje pris ville återföra alla bråk till summor av stambråk. Kanske för att kunna väga på en balansvåg med vissa stambråksvikter?

Hade man en tillräcklig uppsättning sådana vikter kunde man väga vad som helst, vilket den egyptiske skrivaren Ahmes demonstrerade med stor omsorg och iver på den fem meter långa papyrusrullen som han skrev för cirka 3600 år sedan. Följande är ett exempel från Ahmes stambråkstabeller:

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$$

Man kan fråga sig varför Ahmes just valde att börja med $1/12$, när det finns andra alternativ. Om man är ute efter att få så få stambråk som möjligt i högerledet borde det vara mer effektivt med en "glupskare" utveckling, där man stegvis alltid väljer det största möjliga stambråket som man kan dra bort från vänsterledets bråk. Om vi t ex börjar med att dra bort $1/9$ istället för $1/12$ från $2/17$, så får vi faktiskt ett uttryck med färre antal stambråk:

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$$

Det verkar alltså vara mer effektivt att använda en glupsk algoritm som alltid "äter upp" så mycket som möjligt från vänsterledet i varje steg; $1/9$ är ju en större "tugga" än $1/12$. Tji fick Ahmes som inte kom på det. Men vi vet egentligen inte vilka villkor han ställde på sina stambråksutvecklingar, han verkar t ex helst vilja börja med ett stambråk med en jämn nämnare. Kanske berodde det på vilka vikter man hade att tillgå. Troligen kände inte Ahmes heller till att ett bråk med täljaren 2 och en udda nämnare alltid kan skrivas som summan av två stambråk enligt formeln:

$$\frac{2}{(2p+1)} = \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(2p+1)}$$

Som i det verkliga livet lönar det sig dock inte att alltid vara glupsk. Följande exempel där vi ska stambråksuppdelar $4/17$ visar att lite återhållsamhet kan vara påkallat:

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$$

Den här förfärliga uppdelningen skulle säkert kunna få Ahmes att rotera i sin sarkofag, speciellt när det finns en elegantare lösning:

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$$

Man börjar visserligen lika glupskt med $1/5$, men väljer sedan helt modest $1/30$ istället för det glupskare $1/29$ i nästa steg. Och se så mycket bättre det blev! Redan vad gäller det första steget kan man vara lite mindre glupsk för att t ex få en mindre nämnare i sista stambråket. Istället för:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} \quad \text{kan vi skriva} \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{84}.$$

Det hade nog Ahmes uppskattat. Moralen i denna berättelse blir alltså att visst ska man vara lite glupsk, men med hjälp av ett inledande tankearbete så kan utdelningen bli ännu bättre och vi kan vinna andra fördelar.

För den som vill gå vidare med att utforska stambråksutvecklingar så hänvisar jag till att googla på "egyptian fractions" eller "unit fractions".

