Anders Tengstrand

Resonemang om matematiska resonemang

NCM

Resonemang om matematiska resonemang
Författare: Anders Tengstrand
Utges av Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM)
Ansvarig utgivare: Peter Nyström

ISBN 9789185143344

NCM

Förord

Alla skrifter - epokgörande som anspråkslösa - har en startpunkt. Någon gång har ett frö sätts till något som så småningom utvecklats till tankar som någon eller några ansett värda att sätta på pränt. Det gäller naturligtvis även denna lilla skrift. Någon gång i september 2015 ägde ett licenciatsemininarium i matematikdidaktik rum vid Linnéuniversitetet. Vid seminariet togs en rad intressanta frågor upp och en av dem handlade om resonemang i matematiken. Vid fikabordet efter seminariet fortsatte vi att resonera om resonemang. I kommentarmaterialet till de nya kursplanerna tas olika matematiska kompetenser eller förmågor upp i ett försök att sätta ord på kvaliteten på elevernas matematiska kunskap. En sådan kompetens är resonemangsförmåga. Naturligt har resonemang alltid varit ett viktigt element i alla matematikundervisning ja i all matematisk verksamhet, men nu har förmågan att resonera upphöjts till en kompetens som skall värderas vid bedömning av elevernas kunskaper. Kanske krävs det då att man försöker klargöra vad som menas med resonemangsförmåga. En kollega, som är aktiv vid ett annat lärosäte, tittade uppfordrande på mig, som sedan länge är pensionär, och sade: ”Du kan väl skriva en bok om matematiska resonemang.” Jag visste inte om det var allvarligt menat eller bara ett skämt eller något däremellan. Men kollegan såg inte ut som om hon skämtade. Som pensionär är ju inte tiden en bristvara och tanken på att bena ut frågor kring resonemangskompetensen låg och gnagde. Till slut slog jag upp ”resonemang” en synonymordbok för att få några ”utom-matematiska” tankar kring begreppet.

Det visade sig att ordboken ger två perspektiv på resonemang. Det ena handlar om resonemang som ett sökande samtal där olika synpunkter ställs mot varandra och där för- och nackdelar värderas. Det är en verksamhet som kräver öppenhet och lyhördhet och ömsesidig respekt. Det andra perspektivet är mer begränsat. En synonym till resonemang eller att resonera är att dra korrekta slutsatser. Den verksamheten kräver logisk stingens och klarhet. Dessa två aspekter svarar väl mot två sidor av matematiken. Den ena är det resonerande samtalet där olika förslag till lösningar av ett problem diskuteras, värderas och prövas för att ibland förkastas och ibland utvecklas vidare för att till slut förhoppningsvis leda till en lösning. Den andra aspekten av resonemang betonar den logiska stringensen och leder in på frågan om bevisföring. Dessa båda perspektiv har ägnats var sitt kapitel.

Två arbeten har i hög grad påverkat mitt skrivande. Det ena är Anette Jahnkes bok *Skolans och förskolans matematik - kunskapssyn och praktik* som jag fick förmånen att läsa som manuskript. Det är framför allt i det första kapitlet jag har lånat tankar och idéer från henne. Bland annat har hon gjort mig uppmärksam på Platons tankar om sann kunskap. Det andra arbetet är Kirsti Hemmis doktorsavhandling *Approaching Proof in Mathematical Practice.* Hennes beskrivning av olika perspektiv på bevis har influerat min framställning.

En av grundtankarna i framställningen är att gå tillbaka till matematikens historia. Ett ledord har varit *Learn form the masters* som var den samlande titeln på en rad skrifter och konferenser under 1990- och 2000-talet. Matematiska begrepp och teorier belyses genom att gå tillbaka till klassiska skrifter. Verk av Euklides, Platon, Galilei, Pascal, Fermat och Recorde får belysa de tankar jag för fram. Det ger ett historiskt perspektiv på matematiken.

Den läsekrets jag haft i åtanke, när jag skrivit detta häfte, är blivande och aktiva lärare för äldre elever på grundskolan och för gymnasieelever. Det är ingen lärobok i vanlig mening. Min förhoppning är att den skall väcka frågor och att den skall locka till diskussion. Den skall vara ett komplement till den grundläggande utbildning som skall stärka de matematiska kunskaperna och ge en systematisk genomgång av matematikdidaktiska frågor.

Till sist: Ett stort tack till universitetslektor Eva Taflin från Dalarnas högskola som inspirerat mig att fundera över resonemangsproblematiken och därmed förgyllt min pensionärstillvaro.

Inledning

Varje dag måste vi göra val och fatta beslut. Det kan gälla triviala saker som vad vi skall äta till middag eller mer livsavgörande saker som husköp eller yrkesval. Vi måste överväga olika alternativ och försöka se deras konsekvenser. Vi måste ständigt föra resonemang i de flesta fall med oss själva, men vi kan också ta råd av andra och tillsammans med dem resonera oss fram till det bästa alternativet. För somliga är själva resonerandet en central del av yrkesverksamheten. Opinionsbildare måste kunna föra resonemang som övertygar åhörare eller läsare. Chefer måste kunna resonera både med sina medarbetare och sina överordnade för att fatta bästa möjliga beslut. De måste sedan kunna övertyga sina medarbetare om det slutliga beslutets förträfflighet. Lärare måste kunna diskutera med sina elever för att förklara komplicerade sammanhang och de måste lära eleverna föra logiskt sammanhängande resonemang. Det är bara några exempel på professioner där det ställs höga krav på att kunna resonera övertygande och korrekt. Listan kan göras lång och på den finns de som på något sätt arbetar med matematik.

Matematiken förser oss med tankeverktyg som begrepp, metoder och teorier. Att utveckla nya matematiska verktyg är en del av forskningen i matematik och den verksamheten kräver både fantasi och analytisk förmåga. Verktygen kan inte användas utan eftertanke. "Hur resonerade du när du gjorde på detta sättet?"är en fråga som matematikläraren ofta ställer till sina elever. Matematisk problemlösning på alla nivåer ställer krav på förmågan att föra resonemang både för att hitta en lösning och för att övertyga sig om att lösningen är korrekt. Att kunna föra resonemang är ett måste för den som arbetar med matematik. Det gäller både vetenskapsmannen som utvecklar ny matematik och eleven på lågstadiet.

Vad menar vi då med att resonera och med begreppet resonemang?

Om vi går till *Norstedts svenska synonymordbok* finns väsentligen två olika typer. Den ena har synonymer som samtal, samspråk, diskussion, tankeutbyte och den andra tankegång, slutledning, bevisföring. Verbet ”resonera” är släkt med franskans ”raison” och engelskans ”reason” som båda kan översättas med ”förnuft”. Ett resonemang skall i någon mening vara förnuftigt.

Resonemang som samtal och tankeutbyte för tankarna till en aktivitet där man tillsammans söker sig fram till någonting gemensamt även om det gemensamma kan vara att man är djupt oense i någon fråga. Det är fråga om givande och tagande och kräver en öppenhet av båda parter. Resonemang som slutledning och bevisföring handlar om att utifrån givna förutsättningar dra logiskt korrekta slutsatser. Om resonemang som samtal innebär öppenhet och ifrågasättande så innebär resonemang som slutledning stringens och klarhet. De båda tolkningarna speglar olika delar av matematiken: Det ofta intuitiva sökandet efter en lösning och den logiskt stringenta framställningen.

Det matematiska resonemanget har under senare år uppmärksammats inom matematikdidaktiken inte minst när det gäller utformning av kursplaner. De har många gånger bara beskrivit det matematiska innehållet. Men ett matematiskt innehåll kan behärskas på olika sätt och med olika djup. För att kunna formulera kriterier på detta har man infört begreppet matematiska förmågor eller kompetenser. I de varianter, som presenterats i olika länder, ges stor vikt vid det matematiska resonemanget. I kursplanen för den svenska skolan tas ”resonemangsförmåga” upp som en viktig kompetens som skall tränas i undervisningen. Den danske matematikdidaktikern Mogens Niss anger ”resonneringskompetense” som en av åtta matematiska förmågor. En av de ledande amerikanska matematikdidaktikerna Jeremy Kilpatrick har karakteriserat matematisk kompetens med hjälp av fem trådar som är oupplösligt sammantvinnade och en av dessa kallar kan ”adaptive reasoning” en form av resonerande som anpassas till aktuell problemlösning och som innehåller förmåga att tänka logiskt, att reflektera, att förklara och att motivera.

Jag skall med några exempel belysa de båda aspekter på resonemang. Resonemang som samtal exemplifieras både med berömda meningsbyten, som har haft stor betydelse för matematikens utveckling, och med diskussioner kring matematiska problem i klassrummet. Jag kommer att diskutera två klassiska meningsutbyten från 1600-talet nämligen Galileis *Samtal och matematiska bevis om två nya vetenskaper* och den korrespondens mellan fransmännen Blaise Pascal och Pierre Fermat som brukar betecknas som starten av sannolikhetsläran. Som exempel på samtal inom matematikundervisningen kommer jag att ta upp en lärobok från 1500-talet som är skriven i dialogform samt två exempel på elevsamtal från dagens skola. Som en inledning till de olika exemplen kommer jag att studera ett brev av Platon, där han diskuterar begreppet sann förståelse.

I den andra delen betonas resonemang som slutledning och bevisföring. Tyngdpunkten kommer att ligga på att diskutera bevis - att ge exempel på bevis, att se olika aspekter på bevis och att se bevisens roll för att skapa logiskt sammanhängande matematiska teorier.

Kapitel 1. Resonemang som samtal

Platons tankar om sann förståelse

Dialogen som litterär företeelse har gamla anor. Den har ofta som mål att belysa begrepp och att ifrågasätta invanda föreställningar. De klassiska exemplen är Platons dialoger där hans lärare Sokrates är huvudpersonen. En av de mest berömda är *Staten* där Platon utvecklar sin syn på idealstatens utformning. En annan, *Kriton*, är en dialog mellan Sokrates och hans rike vän Kriton om rättvisa och orättvisa. I *Faidon* berättar Sokrates elev Faidon för filosofen Echekrates om de tankar Sokrates hade om livet efter döden dagen innan han avrättas.

Även om Platons dialoger handlar om allmänfilosofiska frågor, som ofta ligger långt från matematiken, så har han också funderat över hur man kommer till djupare insikt om tingen och det kan vara av intresse för att belysa hur matematisk förståelse skapas. Han gör det i ett brev till anhängarna av en av sina elever Dion från Syrakusa – en inflytelserik statsman som några år tidigare mördats. Brevet kan dateras till 353 – 352 f.Kr. En av Dions fiender Dionysos II har gett ut en filosofisk skrift. Platon är skeptisk till hans förmåga att åstadkomma en sådan och diskuterar på några sidor vad som krävs för att vinna verklig förståelse och att vara en sann filosof. Han skriver:

> På det sättet och med denna sinnesförfattning lever en sådan människa: vilka sysslor han än sköter är han alltid och i allt bunden till filosofin och till en daglig livsföring som gör honom mest läraktig och minnesgod och ger honom förmåga

> att resonera under iakttagelse av inre nykterhet. Den motsatta livsföringen hatar han. Men de som inte är några riktiga filosofer utan bara har ett ytligt färglager av åsikter likt en solbränna – när de ser hur mycket möda som krävs för en sådan uppgift då tycker det att det blir svårt, ja omöjligt för dem, och de blir helt ur stånd att bedriva den här verksamheten. Men några av dem försöker övertyga sig själva om att de har lärt sig det hela tillräckligt och inte behöver ta itu med några ytterligare svårigheter.

Det är alltså stora krav på en filosof. Han menar också att det skrivna ordet inte är tillräckligt för en ”sann tankegång”. Han skriver

> För varje varande ting är det tre saker som är nödvändiga för att kunskap skall bli till. Den fjärde saken är kunskapen själv, och som den femte saken måste man tänka sig det som är kunskapens föremål och som är det verkliga varandet. En sak är benämningen, en annan sak är definitionen, en tredje avbilden, en fjärde kunskapen.

Platon exemplifierar nu sitt resonemang med begreppet cirkel.

> Det finns något som kallas cirkel; det som vi just uttalat är dess benämning. Som nummer två kommer dess definition, som består av substantiv och verb: ”något vars yttersta delar överallt har samma avstånd till mitten” torde vara en definition på något vars namn är ”rundning”, ”omkrets” och ”cirkel”. Det tredje är det som man ritar upp och suddar ut, eller det som svarvar till och förstör. Alla dessa saker hänför sig visserligen till cirkeln, men de berör inte cirkeln själv för cirkeln är något mer än de. Som nummer fyra har vi kunskap, insikt och sann åsikt om dessa ting.

Den femte saken, ”kunskapens föremål och det verkligt varande” kommer, tillägnar man sig genom hårt arbete. Platon skriver

> För det är bara om alla sakerna mödosamt gnuggas mot varandra, benämningar, synbilder och förnimmelser, och om de rannsakas i välvillig anda med hjälp av frågor och svar utan all missunnsamhet – det är bara då som förnuftig insikt om var och en av dem kan flamma upp förutsatt att man anstränger sig så hårt som det står i mänsklig förmåga.

Platons tal om kunskapens föremål och det verkliga varandet kan på en nutida läsare verka litet egendomligt. Det skall ses mot bakgrund av

Platons tro på en idealvärld – den verkliga världen – som vi människor endast ser skuggor av. Vårt mål är att genom skuggorna få en så klar bild av den verkliga världen som möjligt. Men det kan också vara värt att ha i minnet att texten är ett polemiskt angrepp mot Dionysos II som vill kalla sig filosof genom att ge ut skrifter i filosofiska frågor. Det polemiska syftet styr resonemanget.

Trots det tror jag att vi har mycket att lära av Platons tankar. De tre första faserna eller sakerna kan vi lätt ta till oss. Vi har benämningar för olika begrepp som cirkel, triangel, kvadrat, primtal m.m. och dessa styr våra tankar till olika företeelser. Men för att kunna åstadkomma precision och konkretion måste vi både definiera dem med ord och göra oss en bild av dem. Den fjärde fasen som handlar om kunskap innebär att vi närmare undersöker begreppen. För en cirkel kan det t.ex. innebära vi konstaterar att en medelpunktsvinkel alltid är dubbelt så stor som motsvarande periferivinkel eller att förhållandet mellan omkrets och diameter är en konstant som vi kallar π eller att kordasatsen gäller. När våra kunskaper om cirkeln ökar så fördjupas vår förståelse.

Dessa fyra ting är enligt Platon emellertid inte tillräckliga i vår strävan efter den femte saken "det verkliga varandet". Vi måste utsätta vår uppfattning om begreppen för prövningar genom diskussioner med andra. De fyra sakerna måste "mödosamt gnuggas mot varandra" och "det skall ske i välvillig anda med hjälp av frågor och svar utan all missunnsamhet". Vi kan läsa oss till benämningar, definitioner och satser om t.ex. geometriska begrepp. Vi kan rita figurer på ett papper. Men det är inte tillräckligt. Vi måste också pröva våra uppfattningar i diskussioner med andra. Vi måste utsätta våra åsikter för granskning och vi måste granska andras åsikter. Vi måste ifrågasätta och låta oss ifrågasättas. Är verkligen medelpunktvinkeln dubbelt så stor som periferivinkeln? Jag kan rita en figur där det inte verkar vara sant. Varför är det så? Varför gäller kordasaten? Satser förtydligas genom bilder och bevisas genom logiska resonemang, men resultaten kan ändå ifrågasättas och argumenten måste slipas. Att våga göra misstag är en del i processen. Genom öppna resonemang människor emellan fördjupas och förstärks förståelsen för matematiska begrepp och teorier.

Galileo Galilei och rörelsens matematik

Några ord om Galilei

En av vetenskapens giganter, som på ett avgörande sätt har bidragit till vår världsbild, är Galileo Galilei. Tillsammans med Johannes Kepler formulerade han resultat som låg till grund för ett av naturvetenskapens viktigaste verk – Newtons *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* som publicerades 1687. Kepler konstruerade den matematiska modell för planetrörelserna som vi använder än idag och Galilei formulerade lagar för kroppars rörelse som byggde på experimentella mätningar. Newton kunde sedan i *Principia* formulera en teori som samtidigt förklarade Keplers och Galileis lagar. I ett brev till kollegan Robert Hooke skrev Newton ”Om jag kunnat se längre än någon annan så beror det på att jag stod på skuldrorna av två jättar” och han menar då Kepler och Galilei.

Galileo Galilei föddes 1564 i Pisa i Italien. Sjutton år gammal började han studera medicin vid universitetet i Pisa, men ämnesområdet engagerade honom inte. Hans intresse var matematik och naturvetenskap. Så småningom övergav han medicinstudierna och ägnade sig helt åt matematik. Han var framgångsrik och blev professor i matematik i Pisa 1589 - 1592 och sedan i Padua 1592 - 1610. År 1610 återvände han till Pisa där han blev ”matematico primario” samtidigt som han var anställd som matematiker och filosof hos storhertigen av Toscana. Ett år tidigare hade han konstruerat en kikare med vars hjälp han kunde studera stjärnhimlen på en detaljnivå som inte tidigare varit möjligt. Konstruktionen hade både kommersiella och militära tillämpningar och Galilei kunde utnyttja dem för att stärka sin ekonomi. Kikaren gav honom också möjligheter att göra systematiska studier av himlakropparna och de övertygade honom om riktigheten av det Kopernikanska systemet där planeterna inklusive jorden kretsade kring solen. Galilei var bekant med Keplers banbrytande arbete om planetrörelserna, som publicerades 1619 och som byggde på Kopernikus idéer. År 1632 presenterade Galilei sina tankar i *Dialoger rörande världens två huvudsystem – det Ptolemaiska och det Kopernikanska.* Tankarna i boken stred mot den katolska kyrkans världsbild som byggde på Aristoteles teorier från 300-talet före Kristus. Kort efter utgivningen förbjöd inkvisitionen försäljning av boken och kallade Galilei till förhör. Han blev dömd till livstids fängelse som omvandlades till husarrest. Han återvände till sitt hem nära Florens där han övervakades av inkvisitionens tjänstemän. Under husarresten skrev han verket *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper* som smugglades ut och publicerades i Holland 1638. Galilei var blind under sina sista år och dog i husarresten 68 år gammal.

Båda verken är som titeln anger skrivna i samtalsform. Deltagarna är Salviati, uppenbarligen Galileis alter ego, Sagredo, en god vän med god kännedom om den problematik som diskuteras samt Simplicio, representant för den av kyrkan sanktionerade världsåskådningen, som den formulerades av Aristoteles på 300-talet före Kristus.

Rörelsens matematik

Betydelsen av att ifrågasätta Vi skall ta upp några delar av *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper* som handlar om rörelsens matematik. Salviati redogör för en avhandling som han har läst och han får frågor och kommentarer av Sagredo och Simplicio. Salviato framhåller inledningsvis betydelsen av att förutsättningar, slutledningar och resultat ifrågasätts och diskuteras. Detta genomsyrar hela framställningen och Saviati uttrycker det på följande sätt:

> Det är bra att ni och Simplicio gör dessa invändningar. Jag tror att det är samma invändningar som jag själv gjorde när jag såg denna avhandling. De undanröjdes antingen genom diskussion med författaren eller genom att jag själv skärskådade problemet.

Accelerationen hos en kropp i fritt fall Vi skall mer i detalj studera hur Salviati, Sacredo och Simplicio resonerar om hur hastigheten hos en kropp i fritt fall förändras. Salviati inleder med att konstatera att det är rimligt att hastighetsförändringen sker enligt någon enkel regel och framför som en rimlig hypotes att hastighetsökningen är proportionell mot tiden. En kropp i fritt fall får efter en tidsenhet en viss hastighetökning, efter två tidsenheter har hastighetsökningen fördubblats, efter tre tidsenheter är hastighetsökningen tre gånger så stor o.s.v. Han inför begreppet likformigt accelererad rörelse.

Sagredo tycker att hypotesen verkar rimlig men han har svårigheter att inse att den beskriver den rörelse vi ser i naturen. Antagandet får konsekvenser som strider mot hur han upplever fritt fall. Ett tungt stenblock som faller från vila skulle enligt Galileis teorier till en början ha mycket små hastigheter men så upplever inte Sagredo verkligheten. Han tycker att stenblocket omedelbart får en mycket stor hastighet och uttrycker sina dubier mycket målande på följande sätt:

> Jag tänker mig en tung kropp som faller från viloläge, d.v.s. med begynnelsehastigheten noll och med en hastighetsökning som är proportionell mot den tid som förflutit sedan rörelsens början. En sådan rörelse skulle t.ex. på åtta pulsslag erhålla en hastighet av åtta enheter. Vid slutet av fjärde pulsslaget skulle den ha fått fyra, vid slutet av det andra två och vid slutet av det första en enhet. Och eftersom tiden är oändligt delbar, följer av vårt resonemang att om en kropps tidigare hastighet är mindre än den nuvarande, så finns det inget hastighetsmått, hur litet det än är, som inte kroppen har vid

> något tillfälle efter det den startat med oändligt liten hastighet, dvs. från vila.
>
> [. . .] måste vi dra slutsatsen att kroppen, då man kommer allt närmare startögonblicket, rör sig så långsamt att den med denna hastighet inte kunna färdas en mil på en timme eller på en dag eller på ett eller tusen år, ja, den skulle inte kunna färdas en handsbredd på mycket längre tid. Detta fenomen förbluffar tanken, emedan våra sinnen visar att en tung fallande kropp plötsligt erhåller stor hastighet.

Salviati medger att han också från början hade svårt att acceptera konsekvenserna av sin hypotes. Kan verkligen ett stenblock som faller fritt från vila ha en hastighet som är praktiskt taget lika med noll i början av luftfärden? Men han bemöter tvivlen med en bild som övertygar båda honom själv och Sagredo om att det inte bara är möjligt utan också högst troligt. Han gör ett tankeexperiment där ett fallande stenblock faller ned på en påle och jämför resultaten om blocket faller från olika höjd. Han konstaterar att om blocket lyfts en mycket liten sträcka som t.ex. tjockleken av ett blad blir påverkan knappast märkbar och stenblockets hastighet är därför mycket nära noll. Också här är beskrivningen levande och åskådlig.

> Även jag mötte denna svårighet i början, men jag kunde snart avvisa den. Och jag gjorde detta genom just det experiment som ger upphov till svårigheter för er.
>
> [. . .] Men säg mig, mina vänner, är det inte så att om ett block får falla ned på en påle från en höjd av fyra alnar och då driver den t.ex. fyra fingrars bredd ned i marken, så skulle det om det föll från två alnars höjd, driva ner pålen en mycket mindre sträcka, och från en alns höjd en ännu mindre sträcka? Om blocket slutligen endast lyftes en fingerbredd, hur mycket skulle det då kunna åstadkomma än om det lagts på pålen utan någon stöt? Säkerligen mycket liten. Om det lyfts endast så litet som tjockleken av ett blad, kommer man inte märka effekten. Och eftersom slagets verkan beror på hastigheten hos den kropp, som slår till, kan väl ingen tvivla på att rörelsen är mycket långsam och hastigheten mycket liten då dess verkan inte kan märkas. Se nu styrkan hos sanningen, ty samma experiment som i första ögonblicket tycks visa en sak, visar motsatsen, då det skärskådas noggrannare.

Sagredos ifrågasättande av att en tung kropp strax efter starten verkligen kan ha en hastighet som är nästan lika med noll är naturlig. Ytligt sett verkar hans invändning vara riktig men Salviatis fördjupade analys är övertygande. Diskussionen har, i Platons anda om vikten av ”gnuggande av tingen”, ökat övertygelsen om att Salviatis utgångspunkter för accelerationen vid fritt fall är riktiga.

Salviati gör ännu ett tankeexperiment och tänker sig en sten som kastas upp luften. Den får så småningom hastigheten noll och ”måste genomgå alla grader av långsamhet”. Simplicio tycker detta är märkligt. Det finns ju ”oändligt många grader av långsamhet” och om stenen skulle anta alla dessa måste den ju fortsätta i all oändlighet. Han säger

> Men om de allt större graderna av långsamhet är oändligt många, tar det aldrig slut. Därför stannar aldrig en uppåtstigande kropp utan kommer att fortsätta i all oändlighet. Det är dock inte vad vi ser i verkligheten.

Men Salviati har också ett svar på denna invändning. Varje hastighet antas inte under ett ändligt tidsintervall utan bara i ett visst ögonblick

> Detta skulle inträffa, Simplicio, om kroppen bibehöll sin hastighet under någon tid för varje hastighetsgrad. Men den passerar varje stadium utan att dröja mer än ett ögonblick, och eftersom varje tidsintervall, hur litet det än är, kan delas i ett oändligt antal ögonblick, kommer dessas antal alltid att motsvara det oändliga antalet hastighetsgrader.

Diskussionen blottlägger några av de mest fundamentala tankesvårigheterna vid kontinuerliga förändringar. Det handlar om det oändligt lilla och det oändligt stora. Stenen har en viss hastighet i ett oändligt litet tidsintervall och ökningen är under detta tidsintervall proportionell mot intervallets längd. Alla dessa små förändringar adderas sedan till en total förändring under ett ändligt tidsintervall. Simplicio fråga kan förefalla naiv och akademisk men den är naturlig. Hur kan man addera oändligt många oändligt små delar? Vad menas med att ett tidsintervall är oändligt litet? Problematiken tacklades redan under antiken och formulerades på 300-talet före Kristus av filosofen Zenon i ett antal paradoxer bl.a. i den om Akilles och sköldpaddan.

Varför är hastighetsförändringen inte proportionell mot vägen? Sagredo har emellertid ännu en invändning. Varför skall hastighetsökningen vara proportionell mot tiden och inte den sträcka kroppen har tillryggalagt? Det kan väl vara en lika rimlig hypotes. Han säger

> Såvitt jag kan se för närvarande skulle definitionen blivit klarare uttryckt, utan att dess grundidé ändrats, nämligen om

> man säger att den likformigt accelererande rörelsen är en rörelse vars hastighet ökar i proportion till den tillryggalagda vägen. Då skulle t.ex. den hastighet, som en kropp erhållit efter fyra alnar, vara dubbelt så stor som den hastighet den fått efter två alnar och denna återigen dubbelt så stor som efter första alnen. Ty det är inget tvivel om att en kropp som faller från sex alnars höjd har (och slår med) en impuls som är dubbelt så stor som vad den hade efter tre alnar, vilket i sin tur är tre gånger så stor som vad den hade efter en aln.

Salviati medger Sagredos antagande är rimligt och att både han själv och författaren till den bok han studerat prövat hypotesen. De fann vid närmare eftertanke att antagandet hade orimliga konsekvenser. Simplicio tycker emellertid att hypotesen är i högst grad sannolik men Salviati vederlägger den. Följande dialog utspinner sig:

> Simplicio: Jag är en av dem som accepterar antagandet och tror att en fallande kropp erhåller kraft medan den faller, att dess hastighet ökar proportionellt mot den tillryggalagda vägen och att kroppens impuls är dubbelt så stor om den faller från en dubbelt så stor höjd. Dessa antaganden förefaller mig böra accepteras utan tvekan eller debatt.
>
> Salviati: Och de är ändå lika falska och orimliga som antagandet att rörelsen avslutas plötsligt. Här är ett mycket klart bevis för denna sak. Om hastigheten är proportionell mot den tillryggalagda vägen, eller mot den väg som skall tillryggaläggas, passeras dessa sträckor under lika stora tidsintervall. Om därför den hastighet med vilken en kropp tillryggalägger åtta fot vore dubbelt så stor som den hastighet kroppen hade då den passerade de fyra foten (liksom den ena sträckan är dubbelt så stor den andra) så skulle de erforderliga tidsintervallen vara lika. Men en och samma kropp kan passera åtta fot och fyra fot på lika lång tid endast om rörelsen är diskontinuerlig. Observationer visar emellertid att rörelsen hos en fallande kropp kräver mindre tid att tillryggalägga en sträcka av fyra fot en en sträcka av åtta fot, och därför är det inte sant att dess hastighet ökar proportionellt mot vägen.

Jag måste erkänna att jag har haft svårigheter att förstå resonemanget och är inte nöjd med förklaringen. Det verkar som Galilei förutsätter att rörelsen är likformig, men han betraktar ju en rörelse där hastigheten förändras. Om hypotesen att hastighetsökningen är proportionell mot vägen så kan vi sluta följande: Om en kropp som faller fyra fot och har en viss sluthastighet så har samma kropp om den faller åtta fot dubbelt så stor sluthastigheten. Gaiilei verkar förutsätta att samma sak gäller för medelhastigheterna. Antagandet är rimligt och kan visas genom att dela in tiden i oändligt små tidsintervall. Medelhastigheten är alltså dubbelt så stor under fallet på åtta fot som under det på fyra. Om en kropp tillryggalägger en viss sträcka med en viss hastighet och hastigheten fördubblas så kommer den att på samma tid att tillryggalägga en dubbelt så stor sträcka. Men då skulle det ta lika lång tid för kroppen att falla fyra fot som åtta fot. Det är naturligtvis orimligt och hastighetsökningen kan därför inte vara proportionell mot den tillryggalagda vägen.

Gamla misstag och nya sanningar Diskussionen avslutas med att Galilei låter Sagredo göra en kommentar om Salviatis sätt att föra resonemang, som med enkla medel styrker livskraftiga teorier och vederlägger falska. Det ger Salviati möjlighet att ge några beska omdömen av det vetenskapliga etablissemanget. Vi återger dialogen.

> Sagredo: Ni framlägger dessa svårfattliga ting med alltför stor lätthet, vilket gör dem mindre uppskattade än om de presenterats på ett mera svårförståeligt sätt. Ty man värdesätter inte den kunskap som man erhåller med så litet arbete lika högt som den man får genom långvariga och svåra diskussioner.
>
> Salviati: Att de, som kort och klart påvisar falskhet i många accepterade läror, behandlas med förakt i stället för tacksamhet är en orättvisa som kan uthärdas. Men det är däremot obehagligt och förargligt att se män, som gör anspråk på att vara bland de främsta i ett visst forskningsfält, godta vissa slutsatser, som sedan av någon annan snabbt och lätt visas vara falska. Jag vill inte kalla denna inställning för avundsamhet, vilken vanligen urartar i hat och vrede gentemot den som uppdagar felen. I stället vill jag kalla den en stark önskan att hålla fast vid gamla misstag hellre än att acceptera nya sanningar. Denna önskan driver ibland män att förena sig mot dessa sanningar, även om de i sina hjärtan tror på dem, blott och bart för att minska den uppskattning som vissa andra är föremål för från den tanklösa hopen. Ja, jag har hört våra akademiker hålla många sådana falska antaganden för sanna, som med lätthet har kunnat avvisas. Det är några av dessa jag tänker på.

Salviatis sista yttrande uttrycker förmodligen Galileis frustration över de diskussioner han bland annat haft med inkvisitionen. Dialogen fortsätter. Den blir alltmer teknisk och kulminerar med ett bevis för att en kropp som kastas snett uppåt beskriver en bana som är en parabel.

Samtalet i *Dialoger och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper* är naturligtvis konstruerat, men frågorna som ställs och invändningarna som görs måste haft sitt ursprung inte bara i Galileis diskussioner med kollegor utan de speglar också Galileis resonemang med sig själv. Han har vridit och vänt på begrepp och argument för att komma till de slutsatser han gjort. Med Platons vokabulär har han "gnuggat sakerna mot varandra". Kunskap befästs och förståelse fördjupas genom att resonemang och argument utsätts för kritisk granskning.

Pascals och Fermats brevväxling om hasardspel

Sannoilkhetslärans födelse

Galileis dialoger var konstruerade. En verklig dialog, som lade grunden till ett nytt område inom matematiken, utspanns mellan två av den tidens stora vetenskapsmän några decennier efter det att Galileis arbeten publicerats. Sommaren och hösten 1654 ägde en brevväxling mellan de båda matematikerna Blaise Pascal och Pierre de Fermat rum och den brukar betecknas som sannolikhetslärans födelse. Det var intresset för att mäta chanserna för att vinna i olika form av hasardspel som startade diskussionen. Den italienske läkaren och matematikern Girolamo Cardano hade visserligen studerat motsvarande fenomen redan i mitten av 1500-talet i verket *De ludo aleae* eller på svenska *Om tärningsspel* men det publicerades först 1663 långt efter Cardanos död. Man kan anta, att det intresse som Pascals och Fermats brevväxling skapat för att använda matematik i samband med slumpmässiga händelser, var en orsak till utgivningen. Vi skall titta litet närmare på delar av brevväxlingen, men först några ord om de båda skribenterna.

Några ord om Pascal och Fermat

Blaise Pascal var endast 31 år då brevväxlingen startade. Han var något av ett matematiskt underbarn. Hans far, Étienne Pascal, var välkänd i vetenskapliga kretsar och han såg till att sonen fick en förstklassig utbildning. Redan som artonåring publicerade Blaise Pascal viktiga resultat inom kägelsnittsgeometrin. Några år senare konstruerade han en räknemaskin för att hjälpa sin far som då var uppbördsman i Normandie. Han var alltså en pionjär inom beräkningstekniken och har fått ett programmeringsspråk uppkallat efter sig. Pascal gav viktiga bidrag inom båda fysik och matematik. Hans studier av lufttrycket var banbrytande och en tryckenhet bär nu hans namn. Han visade resultat inom analys som visade vägen mot differential- och integralkalkylen som skulle få sitt genombrott genom Leibniz och Newton på 1680-talet. Han var en av de första i västerlandet som studerade kombinatorik och han publicerade en artikel om det vi nu kallar Pascals triangel. Pascal lämnade matematiken i slutet av år 1654 för att ägna sig åt välgörenhet och teologiska studier. Han dog endast 39 år gammal.

Pierre de Fermat var betydligt äldre än Pascal. Han var född 1601 och till yrket jurist. Han var verksam i Toulouse där han gjorde karriär inom domstolsväsendet. Han ägnade sig åt matematik på sin fritid men var respekterad av det vetenskapliga etablissemanget. Han gav i likhet med Pascal viktiga bidrag till analysen men hans stora intresse var talteori där hans resultat är grundläggande för modern krypteringsteknik. Han formulerade och trodde att han hade bevisat det som kallas Fermats gåta eller Fermats stora sats. Beviset återfanns aldrig och förmodligen var det felaktigt. Ett korrekt bevis gavs först 1995 av den brittiske matematikern Andrew Wiles. Vi återkommer till några av Fermats talteoretiska resultat och till hans gåta i den avdelning som behandlar bevisföring. Fermat dog 64 år gammal.

Bakgrunden till brevväxlingen

Upprinnelsen till korrespondensen mellan Pascal och Fermat var ett konkret problem inom hasardspel. En av Pascals vänner Chevalier de Méré var en passionerad spelare och intresserad av matematik. Han hade stött på följande problem: Två spelare A och B kastar ett mynt. Om det blev krona vinner A och om det blev klave B. De satsar lika stora summor var och kommer överens om att den som först vinner tre gånger skall få hela summan. Men hur skall potten fördelas om spelet blir avbrutet i förtid? Om A och B vunnit lika många gånger får de naturligtvis halva summan var. Men hur skall fördelningen ske om det står 2-1, 2-0 respektive 1-0 till endera parten? För att få råd gick de Méré till Pascal. De Méré var visserligen intresserad av matematik men inte förtrogen med ämnet. I ett av breven till Fermat skriver Pascal ”M har begåvning men han är inte någon matematiker (vilket, som ni vet är en stor brist) och han förstår inte ens att en matematisk linje är oändligt delbar och är fast övertygad om att den består av ett ändligt antal punkter”.

De första breven. Fermats teori och hans kritik av Pascals resonemang

Tyvärr har vi inte den ursprungliga formuleringen av problemet eftersom det första brevet från Pascal till Fermat har försvunnit. Vi vet att Fermats teori gick ut på att studera de fall som kan inträffa efter det att spelet avbrutits. Det illustreras med följande exempel

Två spelare A och B kastar krona och klave och varje gång myntet visar krona får A en poäng och om det visar klave får B poängen. Den som först får t.ex 10 poäng har vunnit. De har från början satsat lika mycket pengar var och den som vunnit får hela potten. Antag nu att den ene spelaren A saknar två poäng och den andre B tre. Då måste spelet vara avgjort efter ytterligare fyra omgångar. Tre omgångar räcker inte eftersom en möjlighet är att A kan han vunnit en poäng och B två och då är spelet fortfarande inte avgjort. Efter fyra omgångar så har A vunnit om han får ytterligare 2 poäng. Annars har B fått de 3 poäng han saknar. Om vi skriver ut de som vunnit poängen i de fyra omgångarna så har vi följande olika möjligheter:

AAAA	AAAB	AABA	AABB	ABAA	ABAB	ABBA	ABBB
BAAA	BAAB	BABA	BABB	BBAA	BBAB	BBBA	BBBB

Av dessa vinner A alla utom den sista på första raden och de fyra sista på den andra. Om båda spelarna satsat 8 pistoler[1]var d.v.s. totalt 16 så skall A ha 11 och B 5.

Uppenbarligen kommer inte alla dessa spel att äga rum. Om A vinner de två första spelen så avbryts spelet. Det är ju inte meningsfullt att fortsätta. Pascal hade därför betänkligheter mot detta resonemang och vill utforma en teori som utgår från de spel som verkligen äger rum. Han ger en annan metod som han exemplifierar med tärningsspel. Fermat är emellertid i det första bevarade brevet, som är odaterat, kritisk till Pascals resonemang och påpekar uppenbara felaktigheter.

Pascal gör ett nytt försök

Några viktiga specialfall I ett brev daterat onsdagen 29 juli 1654 medger Pascal att han har haft fel. Han gör en ny ansats. Han betraktar den typ av spel, som Fermat tidigare studerat, där man kastar ett mynt upprepade gånger. Den ene spelaren får ett poäng varje gång myntet visar krona och den andre ett poäng om det visar klave. Han antar att varje spelare satsar 32 pistoler och att den som först får tre poäng får hela

[1]Pistol är äldre guldmynt

potten. Han ställer frågan: Hur skall potten fördelas om spelet avbryts vid ställningarna 2-1, 2-0 respektive 1-0 till en av spelarna? Han skriver

> Låt oss anta att den förste spelaren har vunnit två och den andre ett. De utför nu ett kast där chansen att vinna är sådan att om den första vinner, så får han hela potten d.v.s. 64 pistoler. Om den andre vinner så blir ställningen två mot två, och om de önskar sluta då, så måste var och en få tillbaka sin andel dvs. 32 pistoler.
>
> Betänk då, Monsieur, att om den första vinner så skall han få hela potten dvs. 64 pistoler. Om han förlorar få han ändå 32 pistoler. Om de nu inte vill spela om denna poäng, och skiljas utan att ha gjort det, så kommer den förste att säga: ”Jag är säker på de 32 pistolerna, för även en förlust ger mig dem. Låt oss därför dela de (återstående) 32 pistolerna i två lika stora delar och ge mig dessutom de 32 som jag är säker på.” Han kommer då att få 48 pistoler och den andre 16.
>
> Anta nu att den förste har vunnit två spel och den andre inget. Då är möjligheterna sådana att om den förste vinner, så får han hela potten 64 pistoler. Om den andre vinner så har vi kommit tillbaka till föregående fall där den förste har vunnit två spel och den andre ett.
>
> Men vi har redan visat att i detta fall skall 48 pistoler gå till den spelare som vunnit två gånger. Om de inte önskar spela nästa spel så kommer han att säga, ”Om jag vinner skall skall jag få hela potten dvs. 64. Om jag förlorar skall jag vara berättigad till 48. Ge mig därför 48 som måste vara mina, även om jag förlorar, och dela de övriga 16 i två lika stora delar därför det är lika stor chans att du vinner dem som jag.” Alltså får han 48 plus 8 lika med 56 pistoler.
>
> Låt oss nu anta att den första bara vunnit en gång och den andre ingen. Ni, Monsieur, inser då att om de börjar spela en gång till så är möjligheterna sådana att om den förste vinner så har han två poäng och den andre inget och enligt föregående fall skall han få 56 pistoler. Om han förlorar så har de var sin poäng han får då 32 pistoler. Han kommer därför att säga: ”Om du inte önskar spela nästa spel så ge mig de 32 pistoler som jag säkert skall få och dela resten av de 56 i två lika stora delar. Om vi tar 32 från 56 så återstår 24. Hälften av 24 är 12, så du får 12 av dessa och jag 12 som tillsammans med de 32 ger 44.”

Kanske behöver det sista resonemanget förtydligas: Den förste spelaren får under alla förhållanden 32 pistoler och den andre 8. Skillnaden mellan de 56 pistoler som den förste spelaren får om utfallet är gynnsamt för honom och de 32 han är säker på är 24. Denna summa skall delas i två lika stora delar och de båda spelarna får då $32 + 12 = 44$ pistoler respektive $8 + 12 = 20$ pistoler.

Ett mer generellt problemställning Pascal övergår nu till mer allmänna diskussioner. Antag att en spelare vinner sin första poäng i första kastet, i andra kastet o.s.v. om man spelar till dess någon spelare får 1, 2, 3, 4, 5 och 6 poäng. Hur stor andel av potten skall spelaren få? Det visar sig att de specialfall Pascal tidigare studerat kan användas för att lösa det mer generella problemet. I försöken att bestämma fördelningarna i de olika fallen leds han till rent kombinatoriska problem. Han härleder resultat, som han påpekar är rent aritmetiska, och som han tillämpar på spelsituationen. Han använder tekniken för att göra tabeller över hur potten skall fördelas vid olika ställningar i de olika fallen. Hur Pascal resonerar för att komma fram till sina resultat framgår inte klart. Det är inte lätt att följa tankegångarna och det finns luckor i framställningen. I brevet väljer han att i mer detalj att studera det fall då den spelare som först får fem poäng vinner hela potten. För de övriga fallen redovisas endast resultaten.

Trots oklarheter i framställningen är det uppenbart att Pascal har kommit lösningen på spåret och att kombinatorik är en viktigt hjälpmedel. Han skrev ungefär samtidigt en artikel som publicerades postumt 1665 under titeln *Traité du triangle arithmétique* och som handlar om det vi idag kallar Pascals triangel.

Pascals kritik av Fermats teorier

Nästa brev från Pascal är daterat 24 augusti 1654 och i det polemiserar han mot Fermats teorier om hur potten skall fördelas. Det är det brev där skillnaderna mellan de båda matematikernas teorier sätts på sin spets och det kommer att medföra att missuppfattningar undanröjs och consensus uppnås. Båda författarna är under brevväxlingen angelägna att inte såra varandra även om de kritiserar varandras metoder. Det framgår av bl.a. inledningen till brevet:

> Monsieur,
>
> Jag hade inte möjlighet att i det senaste brevet berätta om alla mina tankar rörande problemet om poängen och samtidigt gör jag det motvilligt eftersom jag fruktar att den goda

> harmoni som uppstått mellan oss och som är så dyrbar för mig kommer att flagna för jag är rädd att vi har olika uppfattningar i ämnet. Jag vill beskriva hela mitt resonemang för er, och be er göra mig den tjänsten att rätta mig om jag har fel och att ge mig ert stöd om jag har rätt. Jag ber er i förtroende och med uppriktighet för jag är inte säker även om ni är på min sida.

Pascal går därefter igenom det fall som vi beskrivit tidigare där den ena spelaren fattas en poäng och den andra två. Han konstaterar då att han får samma resultat med sin teori som Fermat med sin. Han påstår emellertid att Fermats resonemang inte håller om vi istället har tre spelare och studerar ett exempel där spelare A saknar 1 poäng medan spelarna B och C båda saknar 2 poäng. Spelet är då under alla omständigheter slut efter ytterligare tre omgångar. Enligt Fermats teori skall man då bestämma alla möjliga utfall som är 27. Pascal gör följande tabell där de tre första raderna ager vem som vinner det första, det andra respektive det tredje spelet:

A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B
A	A	A	B	B	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C	C
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			
				2					2		2	2	2		2		
								3									3

C	C	C	C	C	C	C	C	C
A	A	A	B	B	B	C	C	C
A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	1	1	1			1		
				2				
		3			3	3	3	3

Siffrorna i de tre understa raderna anger vilka av spelarna som kommer upp till det erforderliga antalet poäng efter de tre omgångarna. Om den förste spelaren A klarar detta skriver Pascal 1 i den fjärde raden, om B respektive C gör det skriver han 2 respektive 3 i femte respektive sjätte raderna. Vi kan notera att många av utfallen är sådana att fler än en av spelarna efter ytterligare tre kast uppfyllt de krav som ställs för att vinna. Pascal räknar nu efter hur många möjligheter det finns där A får ytterligare en poäng och därmed kommer upp i det antal vunna poäng som behövs. Han bestämmer med andra ord hur många ettor det finns i den fjärde raden. Det är 19 stycken. Antalet tvåor i femte raden är 7 och antalet treor sjätte raden är också 7. Det finn alltså 7 möjligheter att både B och C kommer upp i erforderligt antal poäng om de tre omgångarna spelas. Men, säger han,

> om vi av detta drar slutsatsen att det är nödvändigt att ge var och en enligt proportionerna 19, 7, 7 gör vi ett allvarligt misstag och jag skulle tvivla på att ni skulle göra det. Det är flera fall som är gynnsamma för både den förste och den andre, eftersom ABB har det antal A som krävs av den förste spelaren och de två B som den andre behöver. Så är också ACC gynnsam för både A och C.

Han antar då att om två av spelarna kommer upp i erforderligt antal poäng så skall de ha halva potten var. För enkelhets skull antar vi att hela potten är 27 pistoler. Spelaren A vinner ensam hela potten i 13 av fallen och han för dela den med antingen B eller C i 6 av fallen. Han bör alltså få $13 + 6/2 = 16$ pistoler. B vinner hela potten i 4 av fallen och halva potten i 3 av fallen och han skall alltså ha $4 + 3/2 = 5\ 1/2$ pistoler. På samma sätt ser vi att C också skall ha 5 1/2 pistoler. Potten skall alltså med detta sätt att räkna fördelas i proportionerna 16, 5 1/2, 5 1/2. Men Pascal tycker inte att resultatet stämmer. Han skriver

> Det tycks mig att detta är det sätt att göra fördelningen enligt er metod, om ni inte har något annat att säga i ämnet som jag inte känner till. Men om jag inte misstar mig så är fördelningen orättvis.
>
> Skälet är att vi gör ett falskt antagande – nämligen att de spelar alla tre spelen utan undantag, istället för det naturliga villkoret i detta spel, som innebär att de inte skall spela vidare om en spelare fått de poäng som han saknar och i det fallet slutar spelet.
>
> De behöver inte spela tre gånger utan det kan mycket väl hända att de spelar en eller två gånger och sedan inte behöver spela mer.

Tanken bakom spelet är ju inte att de tre kasten skall utföras utan det avslutas när en av spelaren uppnått det antal poäng som erfordras. Pascal tillämpar nu den teori han utvecklat på de aktuella exemplet och kommer till en annan fördelning. Han skriver:

> Men om de spelar under villkoret att inte alla tre kasten måste utföras utan bara till dess någon av dem har uppnått de poäng som saknas och spelat slutar utan ge någon av de

övriga möjligheter att nå sina mål, då skulle den förste få 17 pistoler, den andre 5 och den tredje 5. Detta har jag bestämt med hjälp av min allmänna metod och med den har jag också bestämt att under de tidigare nämnda villkoren så skall den förste få 17 och de båda övriga 5 pistoler vardera – ty denna fungerar i alla fall och utan problem.

Pascal avslutar brevet högaktningsfullt.

> Detta, Monsieur, är mina reflektioner över detta ämne i vilket jag inte har någon övertag över er utom att ha funderat på den längre, men det är en ringa fördel för mig ur er synpunkt eftersom er första blick är mer genomskådande än min trägna strävan.

Fermats svar

Ett första svar från Fermat Fermat ger ett kort svar i ett brev som är daterat 29 augusti. I inledningen konstaterar han

> Vår pennfäktning fortsätter och jag är glad för att våra tankar har utvecklats så att de verkar gå i samma riktning och följer samma väg.

Han kommenterar Pascals arbete *Traité du triangle aritméthique*. Tydligen har Fermat också arbetat med liknande problem. Han har inte hunnit granska sina resultat men säger

> ... jag är övertygad om att det bästa sättet att undvika fel är att tävla med er. Men om jag skulle säga mer, så skulle det ha karaktären av komplimanger och vi har bannlyst denna fiende av sockrad och lättköpt konversation.

Han kommenterar därefter Pascals beräkningar om fördelningen av potten då en spelare saknar en poäng och de två andra två poäng och påstår att hans metod också ger fördelningen 17, 5 och 5 men att han skall kommentera det i ett senare brev eftersom arbetet i parlamentet för närvarande tar mycket tid. Han hoppas att Pascal kan ge honom nödvändig respit. Han avslutar brevet med några tankar om det vi kallar Fermatska primtal.

Ett utförligare svar Ungefär en månad senare i ett brev daterat den 25 september ger Fermat ett utförligare svar på brevet från Pascal från den 24 augusti.

Han bemöter Pascals invändningar mot hans teori, som enligt Pascal skulle ge en fördelning på 16, 5 1/2 och 5 1/2. Han skriver

> I exemplet med de tre spelarna där den ene fattas en poäng och de båda övriga två, vilket är det exempel ni använder för att motbevisa min teori, så finner jag endast 17 kombinationer som ger den förste potten och 5 för var och en av de övriga; för som ni påstår att kombinationen ACC är fördelaktigt för den första spelaren, så måste ni komma ihåg att allt som görs efter det att en spelare har vunnit är inget värt. Men denna kombination som har inneburit att den förste spelaren vunnit efter första omgången och vad spelar det då för roll om den tredje spelaren vinner två poäng efter det ty även om han vinner trettio så är det överflödigt? Konsekvensen, som du har helt riktigt kallat "denna fiktion", av att utvidga spelet till ett särskilt antal spel är endast till för att göra regeln enkel och (enligt mening) att göra chanserna lika; eller bättre, att genom att ge alla bråk samma nämnare.

Fermat utvidgar alltså spelet till alla de 27 möjligheterna eftersom varje sådan möjlighet har samma chans. Det betyder inte att spelarna med nödvändighet skall spela alla de tre spelen. Han räknar efter vilka möjligheter som innebär att A, B respektive C vinner. I tabellen kommer möjligheterna ABB och BAB innebära vinst för A medan BBA ger vinst för B. I 17 av de 27 fallen kommer A att ta hem potten medan B och C gör det i vardera 5 fall.

Han inser att detta kanske inte övertygar Pascal så han ger en alternativ lösning och konstaterar inledningsvis att den förste spelaren kan vinna efter en, två eller tre omgångar.

> Om han vinner efter en omgång är det nödvändigt att han får ett gynnsamt utfall om han kastar en tresidig tärning.[2] Ett kast ger tre chanser. Spelaren får då 1/3 av potten eftersom hans utfall endast är ett av tre.
>
> Om han vinner efter två omgångar så kan de ske på två sätt, antingen vinner den andre spelaren den första och han den andra eller så vinner den tredje spelaren den första och han den andra. Men två slag ger 9 möjligheter. Den förste spelaren får då 2/9 om han vinner efter två omgångar.
>
> Men om han vinner efter tre omgångar, kan han göra det på endast två sätt, antingen vinner den andra den första om-

[2] En tresidig tärning kan realiseras genom att på en vanlig tärning markera två av sidorna med en etta, två med tvåa och de överiga två med en trea.

gången, den tredje vinner den andra och han den tredje; eller så vinner den tredje omgång nummer ett den andra nummer två och han själv nummer tre; ty om den andra eller den tredje spelaren vinner de båda första omgångarna så vinner denne hela potten och den förste spelaren blir utan. Tre slag med tärningen ger 27 chanser av vilka 2/27 av chanserna ger vinst till den förste spelaren om de spelar tre omgångar.

> Summan av chanserna som ger vinst till den första spelaren är alltså 1/3, 2/9 och 2/27 vilket ger 17/27.

Fermat avslutar resonemanget med att betona att regeln är generell och avslöjar att utvidgningen till ett särskilt antal omgångar endast är till för att se till att diverse bråk får samma nämnare. Han skriver ”Detta är mysteriet i några få ord, det som utan tvekan förenat oss och där vi båda endast sökte förnuft och sanning.”

Brevet avslutas med några talteoretiska frågeställningar och Fermat hoppas att Pascal skall ta sig tid att fundera över dem.

Samsyn mellan Pascal och Fermat. Brevväxlingens avslutning

Pascal ger ett kort svar i ett brev från den 27 oktober där han nu inser hur Fermat resonerat och konstaterar att ”vi är på nytt i samklang med varandra.” När det gäller de talteoretiska frågeställningar ber han Fermat att vända sig till någon annan eftersom de ligger långt från hans intresseområde och att han endast är kompetent att beundra dem och han hoppas Fermat snart får möjlighet av avsluta arbetet med dem.

Brevväxlingen upphör åtminstone för en tid. Fermat söker på nytt kontakt med Pascal i ett brev från den 25 juli 1660. Han vill gärna att de träffas men han har inte kraft att ta sig från Toulouse till Paris. Han vet att Pascals hälsa inte heller är så god och föreslår att de möts på halva vägen. I ett svar några veckor senare den 10 augusti avböjer Pascal inbjudan. Hans hälsa är mycket dålig och dessutom har han inte längre samma intresse för matematiken. Det är religiösa frågor och välgörenhetsarbete som upptar hans tid. Han säger:

> För att tala uppriktigt till er om matematik (geometri), så är den för mig den allra bästa intellektuella träning; men på samma gång anser jag den vara så oanvändbar så att jag inte kan finna någon skillnad mellan en matematiker och en duktig hantverkare. Även om jag anser den vara det bästa hantverket i världen så är den ändå bara ett hantverk och

> jag har ofta sagt att det är bra att träna sig på men inte att ägna hela sin kraft åt.

Pascal dog två år senare i svåra plågor. Efter ytterligare tre år dog Fermat.

Pascal och Fermat är två giganter inom matematiken. Deras brevväxling om hasardspel var banbrytande. Den präglades av uppriktighet och ömsesidig respekt, men de slutsatser de båda matematikerna till slut kunde enas kom inte till utan vidare. Vägen dit var slingrig. Den kantades av missuppfattningar och felaktiga resonemang. Detta är vanligt i processer som till slut leder till viktiga resultat. Det finns en skillnad i sätten att resonera. Medan Fermats resonemang är enkla och tydliga är Pascals ibland komplicerade och svåra att följa. Onödigt komplicerade kan man tycka, men å andra sidan leder de till mer generella metoder och visar på kombinatorikens stora roll i det som senare kom att kallas sannolikhetsläran.

Robert Recorde - en läroboksförfattare från 1500-talet

Vi har gett exempel på hur nya banrytande resultat utvecklas i samtal mellan tänkta eller autentiska deltagare. Det är de stora mästarna som har ordet. Men samtalet har också en funktion i elementarundervisningen. Även elever på olika stadier i vårt utbildningssystem kan genom samtal utveckla och förstärka förståelsen för centrala matematiska begrepp, metoder och teorier. Det kan gälla den grundläggande aritmetiken för de minsta, grundläggande algebra för de litet äldre eller differential- och integralkalkyl för gymnasieelever.

De första läroböckerna i aritmetik

Läroboken är ett viktigt hjälpmedel i all undervisning. De första räknelärorna i västerlandet är från slutet av 1400-talet och i dem introduceras vårt decimalsystem med de hinduarabiska siffrorna tillsammans med algoritmerna för de grundläggande räknesätten. En av de mest kända är den s.k. *Trevisoaritmetiken*, som publicerades i Treviso 1473. Författaren är okänd. Andra viktiga verk är Nicolas Chuquets *Triparty en la science des nombres* från 1484 och Luca Paciolis *Summa de arithmetica* från 1494. De hinduarabiska siffrorna presenterades redan i Fibonaccis *Liber Abacci* från 1201 men det dröjde rätt länge innan de nya räknemetoderna slog igenom. Det var först under 1400-talet som algoritmerna på allvar började konkurrera med abakusen, som sedan länge varit det dominerande räknehjälpmedlet. Vårt decimalsystem med dess algoritmer blev emellertid allmän egendom först efter ytterligare några sekler. I Sverige utkom den första räkneläran i tryckt form 1614. Författaren var Ægidio Aurelius och titel är imponerande: *Arithmetica eller en kort och enfaldigh räknebook uti hele och brutne taal, med lustige och sköne exempel the de enfaldigom som till thenne konst lust och behagh hafwe,; korteligen och eenfaldigen till nytto och gagn författat och tillsamansdraghen av Ægidio Aurelio.* Men det är inte något av de nämnda verken vi skall titta närmare på. Vi vänder oss till England och mitten av 1500-talet där en läkare, lärare och ämbetsman Robert Recorde publicerade två viktiga räkneläror *The Ground of Arts* från 1543 och *The Whetstone of Witte* från 1557. Dessa båda böcker innehåller inte bara aritmetikens grunder utan också algebra. Vem var då Robert Recorde?

Några ord om Robert Recorde

Han föddes 1510 i Wales och fick så småningom möjligheter att studerade medicin i Cambridge och Oxford och det är troligt att han också undervisade där. Så småningom flyttade han till London där han praktiserade som läkare. Han kom att uppmärksammas av ledande ämbetsmän och blev besiktningsman för silvergruvor i Wetford. Han var också kontrollör vid myntverket i Bristol och var den förste i England att prägla mynt med hinduarabiska siffror i stället för romerska. Mitten av 1500-talet var en turbulent tid i Englands historia. I det allmänna tumultet blev Recorde anklagad för förtal och dömd till böter. Förmodligen kunde han inte betala bötessumman eftersom han sattes i fängelse 1557 där han dog året därpå.

Parallellt med verksamheten som läkare och med övriga uppdrag skrev Recorde läroböcker i framför allt aritmetik och men också i geometri. De mest kända är, som jag tidigare nämnt, *The Grounds of Art* och *The Whetstone of Witte.* Ordet ”Whetstone” är namnet på en slipsten som används för att vässa rakknivar. Bokens titel talar alltså om att innehållet är ett redskap för att skärpa tanken. Det kan anmärkas att det är i detta verk som likhetstecknet införs och används för första gången.

Det är uppenbart att Recorde måste ha haft erfarenheter som lärare. Alla hans läroböcket utom den i geometri är utformade som dialoger mellan lärare och elev. Dialogerna visar förtrogenhet med elevernas sätt att tänka och de ger honom möjligheter att förklara och motivera de metoder som han vill lära ut. Detta står i kontrast till de flesta andra läroböcker där algoritmer och metoder presenteras och exemplifieras utan närmare diskussion.

Om nyttan av aritmetik

Innan vi ger prov på Recordes framställningskonst i *The Whetstone of Witte* skall vi ge ett utdrag ur *The Ground of Arts* från 1543 med rubriken *The Declaration of the Profit of Arithmeticke* eller i svensk översättning *En deklaration om nyttan av aritmetik*. Här diskuterar eleven och läraren nyttan av att lära sig räkna. Eleven ifrågasätter den och vi ger brottstycken av dialogen.

> Eleven: ... eftersom det enligt min åsikt är meningslöst att särskilt ägna tid åt att lära sig en sak, som minsta barn dagligen och stundligen kan lära sig under sina lekar ...
>
> Läraren: ... om nu räkning är så vanlig som du tror ... så bevisar inte detta att den är föraktlig och värdelös, utan tvärtom att den högst förträfflig och allmänt värderad eftersom den ligger till grund för allt vårt handlande. Utan den kan nämligen ingenting berättas, inga meddelanden vidarebefordras och inga köp eller andra mänskliga angelägenheter fullföljas på rätt sätt. ... Varför är revisorer så välbetalda? Hur kommer det sig att geometriker och astronomer är så välbetalda och framgångsrika? Jo, de beror på att de med sina uträkningar kan finna sådant som annars skulle överstiga mänsklig förmåga.
>
> Eleven: Om det är så att de män, vilkas märkliga bedrifter de flesta människor beundrar, når sin skicklighet genom räkning, då inser jag att matematik är mycket viktigare ämne än jag trodde.
>
> Läraren: Ja, ty om räkning vore så värdelös, som du ansåg, skulle den inte behöva användas så mycket i umgänget människor emellan. Uteslut alla siffror och svara på denna fråga: Hur gammal är du?
>
> Eleven: Hm.
>
> Läraren: Hur många dagar går det på en vecka? Hur många veckor på ett år? Hur mycket jord och hur många drängar har din far? Hur länge sedan är det du kom från honom till mig?
>
> Eleven: Hm.
>
> Läraren: Utan hjälp av tal kan du bara svara ”hm”. Hur många mil är det till London?
>
> Eleven: En påse plommon.

> Läraren: Där ser du vilken makt talen har, och att människor blir stumma utan dem och måste besvara de flesta frågor med "hm",

Diskussionen fortsätter och till slut har eleven blivit helt övertygad om nyttan av aritmetik och säger

> Eleven: ... Nu ber jag er istället att ge mig del av denna förträffliga lärdom så att jag kan dra nytta av den. ...
>
> Läraren: Jag är mycket glad åt din begäran och skall genast gå till verket eftersom du är så ivrig att lära dig detta.
>
> Eleven: Då lovar jag att helt underkasta mig er auktoritet och hålla allt vad ni säger för sant.
>
> Läraren. Det är för mycket; ingen bör bli trodd i allt utan att framlägga sina skäl. Även om jag vill att min elev skall sätta tro till vad jag säger, så gäller det endast när jag ger belägg för mina påståenden. ...

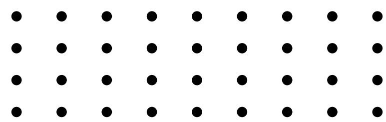
Den sista kommentaren är viktig. I ett intellektuellt samtal måste påståenden få ifrågasättas. Förhållningssättet får aldrig bli auktoritärt.

Ett exempel ur *The Whetstone of Witte*. Om kvadrattal

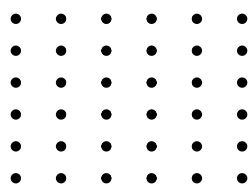
Dialogen i förra stycket handlar om nyttan av matematik och Recordes principiella hållningssätt. Den handlar inte om själva matematiken. För att illustrera Recordes pedagogiska metod väljer vi ett avsnitt ur *The Whetstone of Witte* som handlar om kvadrattal.

> Läraren: Kvadratiska tal är de som kan divideras med ett tal så att kvoten blir detta tal: det vill säga att ett kvadrattal är ett tal som fås genom att multiplicera ett tal med sig själv som att multiplicera 10 med sig själv ger 100. Talet 100 är kvadrattal eftersom 100 dividerat med 10 också blir 10.
>
> Eleven: Multiplicera 4 med 4. Det ger 16 och det är också ett kvadrattal av samma skäl.
>
> Läraren: Det är rätt.
>
> Eleven: Och 9 multiplicerat med 4 är inte det ett kvadrattal. Ser vi det så tycks vi kunna göra alla tal till kvadrattal genom multiplikation.
>
> Läraren: Tänk noga över, att ett kvadrattal bildar en kvadrat bland talen på samma sätt som en exakt kvadrat gör det i

Geometrin; alla sidor är lika stora. Om en sida är längre än den andra kallas den i Geometrin för en lång kvadrat. Om jag nu ritar den figur som svarar mot de tal du nämnde och låter en sida vara 4 och den andra 9 så kommer vi att få följande bild.



Vi ser en lång kvadrat. Ändå kan det heltal som uppkommer genom denna multiplikation verkligen kallas ett kvadrattal som du ser här. Men sidan eller roten är 6 och varken 9 eller 4.



Eleven: Nu förstår jag bättre genom figuren och exemplen. Och jag har också lärt mig vad en rot är på det sätt du förklarade det. Det är sidan i figuren som svarar mot talet.

Recorde låter eleven ställa en fråga så att läraren får möjlighet till ytterligare förtydliganden samtidigt som han kan visa på analogierna mellan kvadrattal och geometriska kvadrater. På det sättet får läsaren andrum för eftertanke. Denna aspekt är kanske ofta förbisedd i läroböcker. Det är nödvändigt att vända och vrida på begreppen för att de skall sjunka in hos eleven.

Några resonemang elever emellan

Elevsamtal - ett verktyg i matematikdidaktisk forskning

I matematikdidaktisk forskning har man ofta studerat hur elever diskuterar när de ställs inför matematiska problem. Studierna är ofta ett led i att försöka kartlägga elevers sätt att resonera och de görs ofta mot bakgrund av pedagogiska teorier. Själva problemformuleringen är viktig. Det är centrala matematiska frågeställningar som skall belysas. För att samtalet måste bli givande måste det också finnas en tillräcklig stor variation av metoder för att närma sig problemet.

Vi skall studera två elevsamtal. Den ena är hämtad från Inger Wistedts och Mats Martinssons studie *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling* från 1994 och den andra från Tomas Bergqvists avhandling *To Explore and Verify in Mathematics* från 2001. Eleverna i det första samtalet går i årskurs 5 och i det andra i årskurs 2 på gymnasiets naturvetenskapliga program.

Elevsamtal över en oändlig decimalutveckling

Problemställning Tre elever i årskurs 5 ställs inför följande problem:

> En träbit skall användas till att göra tre lika stora bokstöd. Hur stor del av träbiten går åt till varje bokstöd? Svara i decimalform.

Vi kallar de tre eleverna för Maria, Cristian och Sofia. En observatör finns med som ibland ger viss ledning.

> Maria: Ser man hur stora bokstöden är?
> Cristian: Ja, men du skall ju dela upp… 100 i 3.
> Maria: Men det går ju inte. Eller blir det rest då?

Eleverna gör ett första uppskattning Cristian provar olika lösningar på egen hand och Sofia tror att det blir ”nånting med en halv”.

> Maria: Men det går ju inte att få dom lika stora. Då blir det litet över. Kan det inte få vara en liten träbit över.

Observatören skrattar och det gör Cristian också.

> Cristian: Det måste bli 31 å en halv.
> Maria: 35 å en halv.

Eleverna prövar sig fram mer systematiskt Observatören föreslår att de skall pröva och de beräknar först 3 gånger 31,5 som blir för litet och sedan 3 gånger 35,5 så blir för mycket.

> Cristian: 34 då.
> Sofia: 34 å en halv.
> Cristian: Det ska inte vara nån halv, tror jag.
> Maria: Ta 33 då …
> Christian: … komma 3 kanske.

De konstaterar att 33,3 ge för låg summa. De försöker med 33,4 men då blir summan för hög.

> Maria: Det måste vara nånting i mitten mellan tre och fyra.
> Cristian: Tre å en halv.

Observatören summerar och får 100,05. Sofia förslår trettiofyra och observatören summerar till 100,02. Maria förslår tre och observatören summerar till 99,99.

> Cristian: Nior.
> Sofia: Men det måste vara nollor.
> Cristian: Ja men hur ska det gå till? Då måste det bli 25 ... då delar man 50 ... delat i 3, måste det bli.
> Sofia: Man borde ha miniräknare med sig.
> Maria: 50 delat i tre går inte eftersom 50 delat i två är 25. Så det blir nån restgrejs eller nåt mojs.
> Cristian: Fast det ska nog inte bli rest.
> Maria: Nej, det kan det inte bli, för då blir det ju den där lilla träbiten som jag sa.

Eleverna fortsätter. De lägger till en decimal och prövar sig fram. De kommer fram till att 33.333 är för litet och 33,334 är för mycket De prövar med 33,3335 men summan blir för hög.

> Maria: Men vi har ju haft bara en tusendel fel. Men ta tvåor istället. Nej det måste vara treor. Men det måste vara ett jämnt tal eftersom det är 100. Det är alltså en så liten träbit så man knappt kan se den.
> Cristian: Det måste bli en liten träbit, det måste bli litet sågspån.
> Maria: Det är ju så nära så vi behöver inte komma närmare.

Maria jämför med problemet att dela 100 äpplen på tre personer Observatören försöker att få dem att fortsätta men de börjar tröttna. Maria frågar sig varför man skall skriva ut alla treor när det inte behövs. De råkar i diskussion om att det måste bli en rest eller inte. Det verkar som det alltid blir det. Men Maria är inte nöjd. Hon går fram till tavlan och ritar hundra äpplen som hon skall fördela på tre personer

> Maria: Då får vi 33 äpplen var och det här äpplet blir över. Det delar vi på.
> Sofia: Det delar vi i tre delar.
> Maria: Ja. Då går det alltså. 33 å en tredjedel, plus 33 å en tredjedel, plus 33 å en tredjedel. Det blir hundra.

Hon försöker addera 33,3 tre gånger och får ett förargligt fel på en tiondel, och nu blir hon ordentligt irriterad.

> Maria: Men det gick ju! Varför gick det då?! Om det går att summera ”33 å en tredjedel” tre gånger och få exakt 100 varför går det då inte att ta 33,3 tre gånger och få 100 exakt?! Varför det? Men det går ju! Jag fattar ingenting! Varför gick det alldeles nyss och inte går när man skriver med siffror istället för äpplen? Det kanske är för att siffrorna inte fattar det här med ...
> Cristian: Det finns alltid en grej på äpplet också. Nån får en kärna mer.
> Maria Näej. Det går att dela ett äpple i tre lika stora delar.
> Cristian: Inte exakt.
> Maria: Nej, men ... Jo, exakt. Det här exakt (hon hänvisar till sin summering av ”33 å en tredjedel” tre gånger). Det går Cristian.
> Cristian: Det går aldrig exakt.
> Maria: Ja, men då går det ju inte att dela i två delar heller, exakt.
> Cristian: Jo, två delar går det.
> Maria: Nej, varken två eller tre delar. Inte exakt.

Siffrorna orkar inte lära sig Maria återvänder till sin egen fundering. Hur kan det komma sig att 100/3 uttryckt som ”33 å en tredjedel” ger exakt svar medan 100/3 uttryckt i procentform inte gör det?

> Maria: Ja, det är att man inte kan ta alla. Man delar bara på en. Det tycker siffrorna är konstigt och det orkar dom inte lära sig.

Reflektioner kring samtalet ” ... det tycker siffrorna är konstigt och orkar inte lära sig det”. Det kan låta naivt och kanske drar vi på munnen när vi läser det, men Maria har visat på en fundamental svårighet inom aritmetiken. I *Om nyttan av aritmetik* visar Rober Recorde hur beroende vi är av talen. Varje gång vi mäter något, det kan vara antal, ålder, sträckor, tid med mer med mera, använder vi tal och självklart behöver vi beteckningar för dem. Decimalsystemet, har visat sig effektivt och används världen över. Så länge vi begränsar oss till heltal uppstår i regel inga svårigheter men när vi skall beteckna delar av en enhet inför vi bråktal eller ”brutna tal". Bråkräkning är besvärligt för många elever och används inte så ofta i vardagen. Istället skriver vi andelar med hjälp av decimaltal eller som procent. Men vissa enkla bråktal som t.ex. 1/3 kan inte framställas i decimalform om vi bara får använda oss av ändligt många siffror och det är ju faktiskt omöjligt att skriva ut oändligt många treor. Detta måste vara ett problem för nybörjaren. Samtalet blottlägger det och eleverna blir förvirrade. Elevernas diskussion blir ett led i det Platons ”gnuggande”. Misstag görs, missuppfattningar kommer i dagen och kan förklaras. Ur den förvirring som skapats uppstår förhoppningsvis en bättre förståelse för de tal som vi dagligen använder.

I antiken råkade pythagoréerna, en filosofisk sekt under ledning av Pythagoras, ut för ett liknande problem. För dem var universum uppbyggd av tal och med tal menade de då de positiva heltalen eller bråktal d.v.s. kvoter mellan två heltal - de tal vi kallar rationella. Några andra tal fanns inte och universum kunde beskrivas med hjälp av dem. Men en av medlemmarna visade att om en kvadrat har sidan en längdenhet så kan inte längden av diagonalen skrivas som ett rationellt tal. Detta störde pythagoreernas världsbild på samma sätt som Maria blev frustrerad över att decimaltalen inte ”orkar lära sig” att bilda en tredjedel. Men för pythagoréerna blev det blodigt allvar. Sanningen om att diagonalen i en kvadrat var ”omätbar” hemligstämplades. En av sektens medlemmar bröt emellertid mot det tysthetslöftet. Han blev dömd till döden och avrättades.

Elever samtalar om tredjegradspolynom

Problemformulering och en lösning Två elever Bosse och Bengt, som båda går andra året på naturvetenskapliga programmet ställs inför följande påstående:

> Grafen till ett tredjegradspolynom skär alltid x-axeln.

De skall avgöra om påståendet är sant eller falsk och ge en förklaring till svaret. Det kan vara på sin plats att redovisa en lösning innan vi studerar elevernas resonemang.

> Ett tredjegradspolynom kan skrivas $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ där $a \neq 0$ och grafen skär x-axeln precis då
>
> $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$
>
> Uppgiften går alltså ut på att undersöka om det alltid finns något x som uppfyller denna ekvation. För att förenkla det fortsatta resonemanget dividerar vi båda leden med a och undersöker istället om det finns x sådant att
>
> $$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$$

där $b' = b/a, c' = c/a$ och $d' = d/a$. För mycket stora positiva x kommer x^3 att vara den dominerande termen och polynomet $x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ kommer att anta positiva värden. Om vi istället betraktar stora negativa värden på x kommer polynomet att att anta negativa värden eftersom x^3 är negativt om x är negativt. Vi kan tydliggöra detta genom omskrivningen

$$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = x^3(1 + \frac{b'}{x} + \frac{c'}{x^2} + \frac{d'}{x^3}).$$

De tre sista termerna i parentesen är mycket små när x är mycket stort negativt eller positivt och alltså är parentesen för sådana x mycket nära 1. Polynomets tecken rättar sig alltså efter tecknet på x för stora positiva och negativa x.

Eftersom polynomet är positivt för stora positiva x och negativt för stora negativa x så måste polynomet anta värdet 0 någonstans däremellan och vi har visat att polynomets graf skär x-axeln.

En lovande start De båda eleverns börjar med att fundera över hur grafen till en tredjegradspolynom ser ut och diskuterar storleksordningen på termerna.

> Bosse: Kommer den alltid att skära? Jag vet inte ...
> Bengt: Ja det gör den, eftersom ett negativt x-värde alltid kommer att bli negativt och ett positivt alltid positivt. Det är bara däremellan det är stökigt. x^3 är alltid mer än $x^2 + x$.
> Bengt: Är det? Inte för $x = 1$! Du sa alltid! [skratt]
> Bosse: Ja, men, utom för $x = 1$.När x är mer än 1 ... Men å andra sidan ekvationen kan ju se ut på detta sätt: [skriver] $ax^3 + bx^2 + cx + d$. c kan vara riktigt stort, och ... b kan också vara mycket stort.
> Bengt: a också.
> Bosse: Ja, men ...
> Bengt: Det hjälper oss inte mycket.
> Bosse: x^3 kommer till slut att alltid bli större än b och c. Allt enligt den heliga regeln: När du kommer till 100 så är x upphöjt i tre mycket större än kvadraten på x.

Samtalet ändrar riktning Här har de embryot till en hållbar förklaring men samtalet ändrar riktning och de börjar istället betrakta lutningen på kurvan. De deriverar och någon av dem säger:

> Om vi deriverar den får vi ett nollställe. Och på båda sidor . . . . På ena sidan går den uppåt och på den andra nedåt. Och den kommer att bli brantare och brantare.

Ett tveksamt försök till förklaring De inser att de kommit ut på djupt vatten och att de egentligen inte vet vad de sysslar med. De ger följande förklaring till varför grafen till polynomet alltid skär x-axeln:

> x mycket större än 0 ger positiva och negativa förändringshastigheter respektive för $f(x)$.
> x mycket mindre än 0 ger negativa respektive positiva förändringshastigheter respektive för $f(x)$.
> När förändringshastigheten är $+$/- på den ena sidan och -/$+$ på den andra sidan kommer funktionen att skära x-axeln däremellan.

Det är svårt att förstå vad de menar med denna förklaring och förmodligen förstår eleverna inte riktigt vad de skrivit. När forskningsledaren frågade om de är övertygade om att påståendet är sant utspinner sig följande samtal:

> Bosse: Därför att du vet att om x är negativt så är x^3 negativt också. För mycket stora x-värden är x^3 mycket större än x^2 och x och detsamma gäller för positiva x. Så grafen kommer alltid att växa och avta. Därför skär den alltid x-axeln.
> Forskningsledaren: Och det är vad ni skrivit här?
> Bengt: [skratt]
> Bosse: Ja, men det känns som en dålig förklaring.

På en fråga om deras klasskamrater skulle acceptera deras förklaring svara de ”mycket tveksamt” förmodligen därför att de inte förstår den själva.

Reflektioner kring samtalet Detta samtal leder egentligen inte fram till någon förståelse. Det börjar relativt bra men spårar sedan ur för att i slutrepliken återkomma till en argumentering som är mer framkomlig. Eleverna verkar fixerade vid att teorin för derivator skall användas på något sätt. Det kan bero på att de tror att det förväntas av dem att använda de begrepp som är aktuella i den vanliga undervisningen. De är vana vid det och det låser deras tankebanor. Naturligtvis kan de genom klok ledning komma fram till en förklaring som både de själva och klasskamraterna tror på. Någon sådan finns inte i det aktuella fallet och det är avsiktligt. Forskningsledaren, som övervakar elevernas diskussion, har inte till uppgift att leda dem till ett hållbart resonemang. Hennes eller hans uppgift är att studera och registrera samtalet.

I någon mening tror jag att samtalet speglar en verklighet. Många gånger får elever uppgifter som de försöker lösa tillsammans. Tankarna går i olika riktningar och diskussioner uppstår som ibland leder närmare målet och ibland avlägsnar sig från det. Det är lärarens uppgift att leda dem på rätt spår. Men ofta är tiden knapp och de arbetande grupperna många. Det är kanske inte omöjligt men ändå mycket svårt att hinna ge alla den ledning de behöver. Den ”gnuggning” som Platon talar om och som skall öka förståelsen måste i många fall avbrytas och det inverkar negativt på inlärningen. Den förvirring som uppstår när olika tankar möts kanske inte leder till den analys som ger konsensus och därmed till en djupare kunskap. Förvirringen består och därmed felaktiga uppfattningar och missförstånd. Det vore naturligtvis önskvärt att alla elever fick möjlighet att få sina resonemang analyserade men det är ofta en orimlighet. Tiden räcker helt enkelt inte till vare sig för elever eller lärare. Det är lärarens uppgift att göra urval och sammanvägningar för att skapa en effektiv medelväg mellan samtal som vrider och vänder på begreppen och enkel befälsföring.

Det resonerande samtalet i matematikundervisningen - möjligheter och problem

Det nödvändiga samtalet

Matematikundervisningen i Sverige och i många andra delar av västvärlden har under en lång tid präglats av det som kallas ”tyst räkning”. Eleven löser i sin egen takt uppgifter ur ett läromedel och läraren förväntas hjälpa till när det uppstår svårigheter problem. Undervisningen blir individualiserad. Några elever avancerar snabbt genom bokens uppgifter och får börja på nästa. Andra går betydligt långsammare fram. Det är uppenbart att metoden kräver mycket av läraren, som måste hålla många bollar i luften under en lektion. Den kan också leda till problem för de snabba eleverna. En tolvåring i en skola i USA var en av klassens bästa elever. Han hade arbetat enligt den individualiserade metoden i fyra år. Vid en intervju, som gjordes i forskningssyfte, visade sig att han hade en besynnerlig uppfattning om olika begrepp. Han ansåg t.ex. att två tiondelar i decimalform skrivs som 1.2. Trots felaktiga tolkningar hade han lyckats ta sig igenom uppgift efter uppgift och av någon anledning fått sina resultat att stämma med dem som angavs i facit.[3] Exemplet visar med eftertryck hur viktigt det är att få pröva sina tankar i samtal med andra elever eller med lärare. Det är nödvändigt att någon gång stanna upp och resonera igenom ett område eller ett problem. Begrepp och metoder måste få ”gnuggas” i Platons anda. Den egna uppfattningen måste prövas mot andras. Kanske upptäcker jag att jag i vissa avseenden gjort missuppfattar eller helt enkelt tänkt fel. Kanske har jag tänkt rätt. I båda fallen fördjupas min kunskap. Om jag tänkt fel kan rätta till felaktigheterna och om jag tänkt rätt har fått försvara min uppfattning mot andra som tänkt på annat sätt.

Det gemensamma samtalet är viktiga för att utveckla matematiska resonemang. Utan det kan matematik bli ett slentrianmässigt räknande av uppgifter i läroboken. Undervisningen går då mer ut på att knäcka koden i det aktuella läromedlet än att försöka förstå begreppen. Men naturligtvis måste elever lösa problem på egen hand. I många avseenden är matematiken trots allt en individuell verksamhet. Eleven måste på egen hand kunna hantera ett matematiskt begrepp eller genomföra en metod om hon eller han skall kunna tillämpa sina matematiska kunskaper. Att bara resonera räcker inte. Att tillgodogöra sig matematik innehåller en inte obetydlig del färdighetsträning. Men utan resonemang blir förståelsen lätt ytlig och kunskapen fragmentiserad. Samband mellan begrepp och tankar bakom metoder försummas.

Det alltså viktigt att samtala om matematik. Men hur skall samtalen realiseras? Hur skall vi få eleverna att föra resonemang som leder till större förståelse? Naturligtvis är det varje lärares uppgift att utforma det på det sätt hon eller han tycker är bäst. Men jag vill ändå förmedla vissa synpunkter på vad som jag anser krävs av det goda resonerande samtalet och jag kommer att utgå från de samtal som jag tidigare redovisat brottstycken av.

För ett antal år sedan anordnades ett antal konferenser under rubriken *Learn from the masters.* De stora matematikernas egna skrifter kan tjäna som inspirationskälla än idag. Platon, Galilei, Pascal, Fermat och Recorde må ha levat för hundratals år sedan men många av deras tankar är ständigt aktuella. Det finns frågeställningar hos dem som tangerar de som som kommer fram i samtalet mellan barn i en svensk skolklass. Frågor som barn ställer rymmer inte så sällan svåra filosofiska problem. Det är kombinationen mellan de klassiska skrifterna och de matematiska samtalen mellan barn och ungdomar som är utgångspunkterna från mina synpunkter. Möjligen skall till det läggas erfarenheterna från mina femtio år som matematiklärare.

[3]Exemplet är hämtat från Anette Jahnke, *Förskolans och skolans matematik*, Studentlitteratur. 2016

Samtalsklimatet

> För det är bara om alla sakerna mödosamt gnuggas mot varandra, benämningar, synbilder och förnimmelser, och om de rannsakas i välvillig anda med hjälp av frågor och svar utan all missunnsamhet – det är bara då som förnuftig insikt om var och en av dem kan flamma upp förutsatt att man anstränger sig så hårt som det står i mänsklig förmåga.

Så säger Platon i brevet till i brevet till Dions vänner. Miljön skall vara sådan att begrepp och teorier ”rannsakas i välvillig anda med hjälp av frågor och svar utan missunnsamhet.” Samtalsklimatet skall alltså präglas av både uppskattning och kritik. De samtalande parterna skall ha respekt för varandra. Frågor och svar skall tas på allvar. I en av replikerna i *Samtal och matematiska bevis om två nya vetenskaper* säger Galileis alter ego Salviati ”Det är bra att ni och Simplicio gör dessa invändningar. ...” Han välkomnar kritiken och erkänner att han själv också tänkt i samma banor. Han gör flera gånger liknande kommentarer. I Pascals och Fermats brevväxling betonar båda i varma ordalag sin respekt för varandra, men det hindrar inte att de kritiserar varandras teorier. Fermat skriver i ett av breven ”Men om jag skulle säga mer, så skulle det ha karaktären av komplimanger och vi har bannlyst denna fiende av sockrad och lättköpt konversation.” Samtalet får inte bli så respektfullt så att meningsskiljaktigheterna förträngs. Galilei, Pascal och Fermat ser samtalet som en väg att utveckla nya områden och då måste det vara möjligt att ifrågasätta de olika hypoteser som uppställs. Kan detta vara rimligt? Vilka konsekvenser kommer de att få? Dessa frågor måste ställas och besvaras för att en teori skall bli robust.

Nu kan det invändas att Galileis samtal är artificiella och de är konstruerade så att de stärker hans egna teorier. Men trots detta speglar det en öppenhet hos honom att ta ifrågasättanden på allvar. Sagredos och Simplicios invändningar har säkert Galilei mött i olika sammanhang då de aktuella frågeställningarna diskuterats. Förmodligen har han också själv i någon form av inre dialog arbetat med problematiken. I det samtal vi studerat har han sett inte bara Sagredo utan också Simplicio som jämlikar. Han utnyttjar inte i det samtal vi studerat sitt övertag för att visa sin överlägsenhet

Också hos Robert Recorde möter vi en tro på vikten av ifrågasätta och att inte lita till auktoriteter. Då eleven i en av dialogerna förklarar sig villig att underkasta sig lärarens auktoritet och hålla allt vad han säger för sant säger läraren stopp. ”... ingen bör bli trodd i allt utan att framlägga sina skäl. Även om jag vill att min elev skall sätta tro till vad jag säger, så gäller det endast när jag ger belägg för mina påståenden.”

Auktoritetstro är inte förenlig god pedagogik.

Kan dessa tankar tillämpas i dagens svenska skola? Kan man skapa en miljö där man kan föra matematiska samtal som präglas av öppenhet, ömsesidig respekt och ifrågasättande. De två dialoger från skolan som vi gett brottstycken av tycker jag visar det. Eleverna, både de i klass 5 och de i gymnasieskolan, verkar vara vana vid att diskutera och de ger och tar i meningsutbytet utan att det tar sig personliga uttryck. Det är sakfrågorna som behandlas även om stilen ibland är raljant. Det är visserligen bara två exempel med totalt fem elever så utvalet är i minsta laget men jag vågar nog ändå påstå satt det finns en öppenhet hos eleverna i svensk skola av idag som inte fanns för några decennier sedan. Det är ett bra utgångsläge. Det räcker emellertid inte. Diskussionen måste styras så att den leder fram mot ökad förståelse. Det är inte rimligt att eleverna själva på den knappa tid som står till förfogande skall komma till en välgrundad slutsats som kan vara en utgångspunkt för det fortsatta arbetet. Lärarens roll är viktig. Det är hon eller han som i kraft större kunskaper skall leda diskussionen framåt mot ett givet mål. Till skillnad från forskningen, där resultatet från början är obekant eller åtminstone osäkert, så finns i undervisningen ett tydligt mål med samtalet. Det kan vara fråga om ett begrepp som skall förtydligas, ett problem som skall lösas, en räknemetod som skall analyseras eller en sats som skall bevisas. Läraren får emellertid inte blir alltför auktoritär. Det måste vara tillåtet att göra fel. Felaktigheter kan analyseras och bidra till att stärka förståelsen för alla i gruppen. Å andra sidan får inte lärarens ledning vara så otydlig att diskussionen flyter ut i alltför många olika riktningar. Tiden sätter begränsningar. Lärare spelar som i all undervisning en avgörande roll. Hon eller han måste göra avvägningar mellan det effektiva och det eftertänksamma, mellan att använda sin auktoritet och att låta alla tankar och idéer komma till tals. Det är en svår balansgång som varje lärare måste lösa på sitt eget sätt.

Språket

För att kunna samtala måste man behärska språket. I ett vanligt samtal använder vi oss av ett vardagsspråk där ordens betydelser inte är preciserade och där tolkningarna kan variera från person till person. Det kan vara abstrakta begrepp som politik och demokrati, ord som beskriver känslor som kärlek och hat, glädje och sorg. Det är omöjligt att ange de exakta betydelserna och det är inte heller önskvärt. Innebörden i orden kan förskjutas. Erfarenheter, studier, reflektioner och inte minst samtal kan ge nya perspektiv och förändra våra tolkningar eller upplevelser av dem.

I det matematiska språket eftersträvas däremot exakthet. De matematiska begreppen är preciserade och orden skall ha en exakt innebörd. Många nöjer sig med att beskriva en cirkel som en kurva som är rund, men i matematiken räcker inte det. Ordet rund är vagt och måste i så fall definieras. Den gängse definitionen av cirkel är den är en kurva som består av alla punkter som ligger på ett givet avstånd från en given punkt. Kravet på precision innebär en ökad tydlighet men också en begränsning. Vi kan inte tillåta olika tolkningar. I matematiken skapas också nya termer för begrepp som är av betydelse för ämnet. Ord som parallelltrapets, ellips, parabel, funktion och relation har en exakt betydelse i matematiken. Många gånger är de matematiska termerna lånade från det vi kan kalla vardagsspråket där betydelsen kan vara flytande. Men om orden är används i matematik är de namn för begrepp som preciserats. Matematiken skiljer sig på det viset inte från andra yrkesverksamheter där man utvecklat ett internt språk för att underlätta kommunikationen kolleger emellan.

I det matematiska samtalet måste det matematiska språket utvecklas. De flesta elever är nog inte medvetna om att vikten av att använda en korrekt matematisk terminologi. De har kanske fått en uppfattning om en terms betydelse från en gemensam genomgång och de har på egen hand löst några uppgifter som testar förståelsen av motsvarande begrepp. Det händer emellertid inte så sällan att eleven ger begreppet egna namn som mer överensstämmer med vardagsspråket. Istället för "addera" använder hon eller han "plussa", istället för "multiplicera" används "gångra". Det är bara några exempel där nog de flesta inte har särskilt svårt att översätta till accepterade termer. Men elevens terminologi kan skilja sig så från den gängse så att den inte bara ger upphov till språkförbistring utan även till allvarliga missuppfattningar. Jag erinrar om den elev som efter fyra år av "tyst räkning" trodde att 1.2 betydde två tiondelar.

Samtalet om matematik är ett verktyg för att kalibrera elevernas matematiska språk. Läraren måste visa på vikten av att ha en gemensam terminologi och se till att de korrekta matematiska termerna används. Samtalet kan också gå ut på att resonera sig fram till ett nytt matematiskt begrepp och då är det viktigt att i slutändan slå fast det ord som skall användas och att motivera det. Vi såg i dialogen ur Recordes *Whetstone of wit* hur läraren förklarade begreppet kvadrattal och hur han gav exempel. Eleven var till synes med på noterna men genom en fråga avslöjade att han inte förstått innebörden. Det är troligen erfarenheter från arbetet som lärare som har lett Recorde till att låta eleven ställa frågan. Trots att definitionen är tydlig så tappar eleven en del av det som karakteriserar det. Läraren lägger saken till rätta och med en figur får han eleven att förstå vad ett kvadrattal är. Definitionen, elevens missuppfattning och figuren medverkar alla till en större förståelse. Med

Platons terminologi har sakerna gnuggats mot varandra för att komma till bättre insikt.

Tiden

Samtal där alla är eniga och inga motsättningar, inga ifrågasättanden och ingen kritik förekommer kan ofta bli ointressanta. Det är när olika synpunkter och olika åsikter bryts mot varandra som diskussionen får spänst och vitalitet. De matematiska samtalen eller resonemangen elever och lärare emellan är till för att fånga olika tolkningar av begrepp och satser eller att hitta olika lösningar på problem. Av naturliga skäl kommer det att medföra att många elever till en början blir förvirrade. Men de olika tankarna och förslagen som ställs mot varandra måste till slut mynna ut i ett resultat som alla kan acceptera. Det kan vara en gemensam förståelse av ett begrepp, en lösning på ett problem eller ett bevis för en sats.

Samtalet får alltså inte avbrytas för tidigt så att många elever lämnas i tillstånd av större förvirring än innan samtalets början. För det krävs tid. Ju mer tid man har desto bättre bör förståelsen bli. Men tiden är oftast en bristvara. Läraren måste ibland sätta stopp men samtidigt se till att om inte alla så illa fall de allra flesta är med på noterna. Detta är en av läraryrkets utmaningar som måste lösas av varje lärare i den aktuella situationen. Några standardregler finns inte. Det tillhör läraryrkets praktik att möta och lösa sådana problem.

Problemlösning - ett självskrivet område för gemensamma resonemang

Problemlösning - en oskiljbar del av matematiken I *Nationalencyklopedin* beskrivs matematik som en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Matematik är oupplösligt sammankopplat med problemlösning. Den tillhör matematikens DNA. De flesta matematiska begrepp och teorier har en gång uppstått ut behovet att lösa någon form av problem. Vi har exemplifierat det genom Gallileis dialoger och brevväxlingen mellan Pascal och Fermat. Begreppen och teorierna generar i sin tur frågeställningar som ger upphov till nya problem och så sker en ständig utveckling av matematiken.

Problemlösning i matematikundervisningen Matematiska problem har också en pedagogisk funktion. Genom att lösa väl valda problem kan elever få en ökad förståelse och känsla för matematiken. Räkneläror och läroböcker från tidig medeltid till idag innehåller ett stort antal problem och läroboksförfattaren har valt dem med omsorg för att belysa det matematiska innehållet. De varierar i svårighetsgrad. En del är mycket enkla och är till för att eleven på ett enkelt sätt skall kunna testa att hon eller han förstått innebörden av ett begrepp eller funktionaliteten hos en metod. Problemen ökar sedan i svårighetsgrad. De kräver allt mer av självständigt tänkande och allt större kunskaper om olika delar av matematiken. De fordrar också alltmer av eleven när det gäller matematiska färdigheter och förtrogenhet med det matematiska språket.

De båda samtalen från dagens skola handlar om problemlösning. Det är problem som är utgångspunkterna för verksamheterna och de svårigheter som uppstår medför att eleverna börjar fundera över grundläggande begrepp. Det är kanske syftet med de båda problemen. Att låta ett problem vara utgångspunkten för ett matematiskt samtal gör ofta att eleverna deltar med ett större engagemang. Men problemlösandet är i sig en träning i att föra matematiska resonemang och det är särskilt lämpligt för ett gemensamt samtal. Hur skall vi angripa problemet? Vilka metoder kan vara lämpliga att använda? Har vi sett liknande problem förut? Vilken information är väsentlig? Frågorna är många och förhoppningsvis också idéerna. En brainstorming blir en naturlig start på diskussionen. Steg för steg kan vi tillsammans närma oss lösningen men ibland går vi vilse och får backa. Samtalet avslutas förhoppningsvis med en färdig lösning.

Polyas schema för problemlösning Det finns en omfattande matematikdidaktisk litteratur om problemlösning som verksamma och blivande lärare kan studera. En av de första som i modern tid ägnade sig att försöka förstå problemlösningsprocessen var den ungerske matematikern George Pólya. Han var från början verksam i Budapest men i början av andra världskriget flyttade han till USA där han arbetade till sin död 1985. Mycket av det Pólya skrev om problemlösning handlar om hur man löser avancerade problem på universitetsnivå men han har i boken *How to solve it?* försökt skapa en struktur som kan vara tillämpar på matematisk problemlösning på alla nivåer, ja till och med på problemlösning av mer allmän natur utanför matematiken. Han ger ett enkelt och användbart schema i form av fyra punkter: 1. Förstå problemet. 2. Gör upp en plan. 3. Genomför planen. 4. Kontrollera resultatet. De flesta elever vill gå direkt på punkterna 2 och 3, men efter en första inledande diskussion kan läraren få eleverna att stanna upp och få dem att fundera över den första punkten. Därefter kan de återta diskussionen av punkt 2, som ofta är den svåraste. Olika möjligheter måste prövas och läraren kan ställa ledande frågor. Har vi stött på liknande situationer förut? Kan vi göra analogier av något slag? Kan vi se någon form av mönster? Efter många försök där fantasi och associationsförmåga ofta spelar stor roll kan de kanske göra en plan, som nu skall utföras enligt punkt 3. Men då kan de stöta på svårigheter av olika slag. De räkningar som de planerade göra var inte så enkla som de hade förutsett. De kan helt enkelt inte utföra dem. Kanske upptäcker de under arbetet att det finns luckor i deras resonemang. Kanske har de helt enkelt tänkt fel. Försöket att genomföra planen resulterar i att de finner den för svår eller helt enkelt omöjlig att realisera. De få backa till punkt 2 och skapa en ny plan och kanske måste de gå tillbaka till punkt 1 och kontrollera att de förstått problemet rätt. Till slut har de hittat en genomförbar plan och har utfört den och fått ett resultat. Då skall de enligt Pólya schema kontrollera resultatet. Är det rimligt? Om det är så kan de med viss tillförsikt anse sig ha löst problemet. Om inte så måste de gå tillbaka och kontrollera genomförandet, planen och om de förstått problemet rätt. Förhoppningvis hittar de fel i själva genomförandet som är lätta att korrigera och där korrigeringen ger ett rimligt resultat. Det är värre om det visar sig att själva planen innehåller felaktigheter. Då hamnar de bokstavligen på ruta ett igen.

Har problemet en lösning och i så fall hur många? Har vårt problem en lösning? Frågan syns kanske inte i Polyas plan. Vi har underförstått att det är så. Men innan vi låter fantasin flöda för att hitta en lämplig plan, som skall leda till den eller de lösningar vi söker, kan det vara lämpligt att stanna upp och ställa just denna fråga: Har problemet verkligen en lösning? Det är ju inte så fruktbart att leta efter något som inte finns. Antag t.ex. att uppgiften är att bestämma arean av en triangel med sidorna 5, 6 och 13 cm. Problemet ser oskyldigt ut. Det finns ju t.o.m. en formel, Herons formel, som ger triangelarean om sidorna är kända. Men existerar det en triangel med de angivna måtten. Summan av längderna av de två första sidorna är 11 cm och det är mindre än 13 cm som är längden av den tredje sidan. Men det är orimligt. Summan av två sidor i en en triangel är alltid större än den tredje sidan. Problemet saknar lösning eftersom det inte finns någon triangel med de givna sidorna.

Vi ger ytterligare ett exempel och antar att ett problem av något slag har lett till ekvationen

$$x^6 = x - 1$$

där x är ett reellt tal som skall bestämmas. Vi lyder rådet att först reflektera över om ekvationen verkligen har en lösning. Det är klart att x inte kan vara negativt. Då är vänstra ledet positivt och det högra negativt. Samma sak gäller om $0 \leq x < 1$. Om $x = 1$ är vänstra ledet

1 medan högra ledet är 0 och om $x > 1$ så är $x^6 > x$ vilket innebär att $x^6 > x-1$. Ekvationen saknar alltså lösning. Kanske gäller det också vårt ursprungliga problem eller kanske vi har gjort något fel när vi härlett ekvationen.

Om vi har resonerat oss fram till att ett problem är lösbart, så kan det finnas skäl att fundera över hur många lösningar det finns. Många problem är så formulerade att det finns precis en lösning. Det problem som vi skall lösa kanske leder till en andragradsekvation och vi vet att den kan ha två lösningar. Det finns oändligt många lösningar till problemet att bestämma sidorna i en triangel där arean och en av höjderna är givna. I vissa sammanhang anses ett problem vara välformulerat om det har precis en lösning och det är kanske sådana problem som lärare ofta söker konstruera till sina elever.

Ett inledande resonemang om ett problem verkligen är lösbart och om hur många lösningarna i så fall är, kan vara givande även då det är relativt uppenbart att problemet har precis en lösning. I ett sådant samtal kan idéer utvecklas som hjälper oss att hitta en plan för det fortsatta arbetet.

Redovisning av lösningen Efter en del turer har vi förhoppningvis funnit en lösning på problemet och vi har kontrollerat att den är rimlig. Men därmed är vi inte färdiga. Det återstår en sak. Lösningen skall skrivas ner och samtidigt skall vi kontrollera att alla slutsatser är korrekta och att alla beräkningar stämmer. Detta bör göras i så strikt form som möjligt. De resonemang som lett till lösningen har förmodligen resulterat i diverse anteckningar och beräkningar som behövts i sökandet efter lösningen. De är ofta skissartade och mångtydiga. Nu är det dags att ta fram ett nytt vitt papper. Förutsättningarna skall inledningsvis preciseras. Vi skall sedan steg för steg dokumentera hur lösningen kan härledas utifrån dem. Det är här inte fråga om att beskriva hur vi kommit fram till lösningen. Det är inte vägen dit som skall dokumenteras. Det är bara de olika logisk stegen och räkningarna som skall redovisas. Framställningen skall vara klinisk. En sådan avslöjar ofta obarmhärtigt felräkningar, felslut och luckor i resonemangen. Vi skall i nästa kapitel närmare diskutera hur vi övertygar oss själva och andra om ett förmodat resultat. Huvudsyftet med detta kapitel har varit att studera resonemang som leder till ett påstående som vi på goda grunder anser vara sant.

Kapitel 2. Resonemang som slutledning

Behovet av bevis

Varför bevis?

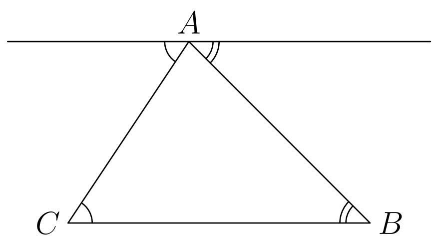
I det förra kapitlet diskuterade vi hur matematiska resonemang kan leda till någon form av resultat. Resonemangen har varit öppna, olika idéer har testats, några har förkastats andra utvecklats vidare och till slut har vi förhoppningsvis kommit fram till ett resultat. Det kan vara en lösning på ett problem, ett samband eller ett påstående. Men än är inte resan över. Som vi nämnde i slutet av förra kapitlet måste lösningen presenteras och då aktualiseras en rad frågor. Håller verkligen vårt resonemang? Hur övertygar vi andra om det? Hur övertygar vi oss själva om det?

Det är i dessa frågor som detta kapitel har sin utgångspunkt. Vi kommer att ge exempel på resonemang som på ett övertygande sätt visar att ett resultat verkligen stämmer. Vi kommer också att ge exempel på resultat som inte håller för en närmare granskning. Vi diskuterar hur man kan genomföra generella resonemang som inkluderar ett stort antal konkreta fall. Bilder och figurer har stor betydelse för att konkretisera resonemangen. Men resonemangen får inte bygga på en bild med speciella egenskaper. Om vi t.ex. vill visa, att en triangel vilken som helst har en viss egenskap, får vi inte bygga resonemanget på eventuella speciella egenskaper som triangeln i vår figur har. Det skall kunna tillämpas på vilken triangel som helst Vi har undvikit ordet bevis men det är just bevis det handlar om. Bevis skall övertyga. Men har bevisen också andra roller? Kan de generella resonemangen ge nya perspektiv? Ett exempel från geometrin får illustrera frågeställningarna.

Ett exempel från geometrin

Det är välkänt att vinkelsumman i en triangel är 180 grader. Hur övertygar vi oss själva och andra om att det är sant? Det kan ligga nära till hands att mäta vinklarna i ett antal trianglar. Det visar sig då att summan alltid är ungefär 180 grader och avvikelserna kan skyllas på ofullkomligheten hos mätverktyget som i grundläggande undervisning oftast är en gradskiva. Kan vi av mätningarna dra slutsatsen att vårt påstående alltid är sant? Kraven är olika. Några kanske bara utför mätningarna på ett fåtal enkla trianglar och nöjer sig med det. Andra är mer ambitiösa och beräknar vinkelsumman i ett stort antal trianglar av mycket varierande utseende. De flesta inser att det är omöjligt att kontrollera alla trianglar. De är oändligt många och tiden är ändlig. Hos några gnager tvivlet. Kan det, trots att vi undersökt ett mycket stort antal fall, finnas någon som inte klarar testet.

Är det möjligt att genomföra ett resonemang som gäller för alla trianglar? Det gör det faktiskt. I figuren är ABC en godtycklig triangel. Naturligtvis är triangeln i figuren speciell men vårt resonemang utnyttjar inte några speciella egenskaper hos den triangel vi ritat upp. Det gäller för alla trianglar. Vi har i figuren konstruerat en rät linje genom



Figur 1:

A som är parallell med sidan BC. Vinkeln B, som är markerad med dubbla bågar, är då lika med den högra vinkeln vid A, medan vinkeln C, som är markerad med enkel båge. är lika med den vänstra vinkeln vid A. Summan av de tre vinklarna vid A är uppenbarligen 180 grader. Alltså är summan av vinklarna i triangeln ABC också 180 grader.

De båda parallella linjerna i figuren skärs av en tredje AB. De båda dubbelmarkerade vinklarna kallas alternatvinklar. På samma sätt är de båda enkelmarkerade vinklarna alternatvinklar då de parallella linjerna skär av en tredje AC, Resonemanget bygger på att när två parallella linjer skärs av en tredje så är alternatvinklarna lika stora. Naturligtvis kan vi fråga sig om det är sant och i så fall varför, men det förefaller alltför uppenbart för att ifrågasättas. Vi återkommer till denna frågeställning längre fram när vi diskuterar konstruktion av matematiska teorier.

Vi kan kalla resonemanget för ett bevis. Det är inte bara till för att övertyga oss om sanningen i vårt påstående utan är också en förklaring. Ett från början relativt överraskande påstående kan förklaras med ett enklare.

Några olika frågeställningar kring bevis med exempel från aritmetiken

Att precisera det till synes självklara

Vikten av att kunna ge korrekta och fullständiga förklaringar För några decennier sedan hade jag en student med stor fallenhet för kombinatorik. Under ett seminarium skulle han visa sin lösning av ett av de problem studenterna skulle förbereda. Han var den ende som lyckats lösa det. Han gick fram till tavlan och skrev upp lösningen direkt utan några kommentarer och gick sedan och satte sig. Hans kamrater såg förvånade ut. Kan du inte förklara hur du kom fram till resultatet tyckte de. Men det ser man ju direkt, det behövs inga förklaringar svarade han. Kamraterna skakade på huvudet och jag fick gripa in.

Situationen berättar något om matematikkunnande. Det räcker inte att hitta en lösning på ett problem. Den skall också kunna förklaras. Steg för steg kan skall man kunna visa hur man från förutsättningarna kommer fram till resultatet. Att kunna föra ett sådant resonemang är en viktig matematiska förmåga. Det behöver inte vara som i exemplet där lösningen är självklar för bara en student i gruppen. Då blir kravet på förklaring uppenbart. Det kan också vara angeläget att formulera en lösning på relativt enkla problem där de flesta tror på resultatet och inte kräver någon förklaring. Att försöka bena ut varför ett relativt enkelt påstående är sant ger en träning i att analysera egenskaperna hos de matematiska objekt man studerar, det kan vara räta linjer, sträckor, vinklar och cirklar i geometrin eller de hela talen i aritmetiken. Att beskriva varför ett påstående är sant utifrån givna förutsättningar tränar också förmågan att uttrycka sig korrekt med de krav på exakthet och noggrannhet som matematiken kräver. Vi skall ge ett exempel från aritmetiken som handlar om jämna och udda tal.

Addition av jämna och udda heltal Vi brukar dela in heltalen i jämna och udda. De jämna positiva heltalen talen är $2, 4, 6, 8, \ldots$ och de udda 1, 3, 5, 7, 9, ... I fortsättningen begränsar vi oss för enkelhets skull till positiva heltal. Vi noterar att summan av två jämna tal alltid är jämnt. Detsamma gäller summan av två udda tal. Däremot är summan av ett jämnt och ett udda tal alltid udda. De flesta av oss behöver knappast något bevis för att inse dessa samband. En lång erfarenhet av att addera heltal gör att vi mer eller mindre omedvetet accepterar dem. Men låt oss försöka genomföra ett generellt resonemang som visar att våra påståenden är riktiga. I Robert Recordes anda illustrerar vi varje positivt heltal med ett antal prickar. Om heltalet är jämnt bildar prickarna jämna par

$$\bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet \ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet$$

och om heltalet är udda blir det alltid en prick över om vi parar ihop dem två och två

$$\bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet \ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet \quad \bullet$$

Om vi adderar två jämna tal

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

så är det klart att prickarna i summan kan paras ihop två och två och summan blir jämn. Detsamma gäller om vi adderar två udda tal

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet\ \bullet \quad \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

eftersom de båda ”överblivna” prickarna i de båda bilderna kan paras ihop med varandra. Om vi däremot adderar ett jämnt och ett udda tal får vi följande bild:

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

Det blir en prick över sedan vi parat ihop prickarna två och två. Vårt resonemang visar alltså att

> Summan av två jämna eller två udda heltal är alltid jämnt.
> Summan av ett udda och ett jämnt heltal är alltid udda.

d.v.s. det vi från början tyckte oss veta. Kanske tycker många fortfarande att resonemanget är överflödigt och att de hela tiden ser bilderna i huvudet när de accepterar de båda påståendena. Men det är en vits med att uttrycka det med ord och bild. Själva formulerandet skärper tanken och visar på ett sätt att resonera som kan vara tillämpligt i andra sammanhang där problemen inte är så enkla.

Att utnyttja redan bevisade påståenden

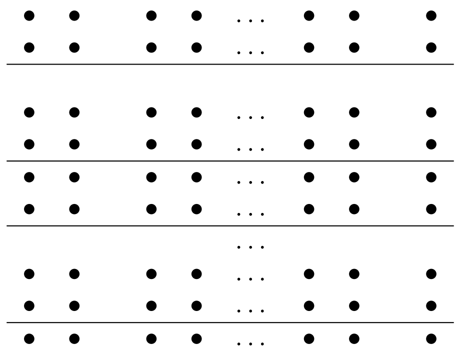
Ett rationellt arbetssätt Ett påstående som är bevisat kan naturligtvis utnyttjas för att bevisa andra påståenden och naturligtvis skall man göra det om det förenklar arbete. Ett sådant arbetssätt kan göra framställningen kortare och mer överskådlig. När ett påståendet visats med hjälp av ett annat kan det nya påståendet användas för att visa ett tredje o.s.v. På det sättet kan en hel teori byggas upp. Vi kommer att återkomma till detta i ett särskilt avsnitt.

Multiplikation av jämna och udda heltal I föregående avsnitt studerade vi addition av jämna och udda heltal. Vad händer nu om vi multiplicerar två heltal som vi för enkelhets skull antar vara positiva? Om vi multiplicerar ett jämnt positivt heltal med ett annat heltal så bli produkten jämn oavsett om det andra talet är jämnt eller udda. Produkten av två udda heltal är emellertid alltid udda. Inte heller i detta fallet behöver de flesta av oss något bevis utan vår erfarenhet säger oss att det är sant. Men det är emellertid relativt enkelt att med hjälp av resultaten från föregående avsnitt resonera sig fram till att påståendena är sanna.

Eftersom vi inskränkt oss till att arbeta med positiva heltal kan multiplikation tolkas som en upprepad addition. Om vi skall multiplicera ett jämnt heltal med ett annat positivt heltal skall vi addera det jämna talet ett antal gånger med sig själv. Vi kan nu utnyttja det vi redan visat. Om vi adderar det jämna talet med sig själv blir enligt vad vi tidigare kommit fram till resultatet jämn. Om vi sedan till resultatet, som är jämnt, på nytt adderar det förstnämnda jämna talet blir det nya resultatet jämnt o.s.v. Slutresultatet blir alltså jämnt.

För att visa att produkten av två positiva udda heltal är udda observerar vi att ett udda tal är lika med summan av ett jämnt tal och talet 1. Det ena udda heltalet skall alltså adderas till sig själv ett udda antal gånger. Det innebär att vi först skall addera det med sig själv ett jämnt antal gånger d.v.s. vi skall multiplicera det med ett jämnt tal. Resultatet är då enligt vad vi nyss visat jämnt. Därefter skall vi till detta resultat, som alltså är jämnt, lägga till det förstnämnda udda heltalet och alltså måste slutresultatet enligt föregående avsnitt vara udda. Produkten av två udda positiva heltal tal är alltså udda

Kanske kan några tycka att det sista resonemanget blir komplicerat och svårt att följa. En figur brukar underlätta förståelsen.



Varje rad har lika många prickar som det ena talet anger. Detta tal skall adderas till sig själv ett udda antal gånger vilket betyder att vi skall addera prickarna i ett udda antal rader. Raderna kan paras ihop två och två och vi får en rad över. I den kan kan prickarna i sin tur paras ihop två och två och vi får till slut en prick över. Produkten är alltså udda.

Algebran som hjälpmedel för generella resonemang

Behov av förenkling Vi såg i det förra avsnittet hur resonemangen blev svårare att följa och bilderna mer komplicerade när vi gick från addition till multiplikation av udda och jämn heltal. Komplexiteten ökar med största säkerhet om vi vill bevisa påståenden som inte verkar så enkla som de vi studerat. Finns det möjligheter att förenkla resonemangen? Ett verktyg som förkortar framställningen och ökar överskådligheten utan att ge avkall på generaliteten är algebran. Genom att införa symboler för tal och räkna med dem kan vi härleda samband som gäller för alla tal som symbolen kan anta. Vi exemplifierar genom att formulera föregående avsnitts resonemang om udda och jämna heltal med hjälp av algebra och väljer det påstående där beviset kanske är svårast att följa nämligen att produkten av två udda tal är udda.

Vi skall först undersöka hur de udda talen kan representeras algebraiskt. Ett jämnt positivt heltal illustrerade vi med en figur av prickar som kunde paras ihop två och två. Om vi betecknar antalet par med n så är totala antalet prickar lika med $2 \cdot n$ eller kortare $2n$. De jämna heltalen kan alltså skrivas $2n$ där n är ett heltal och varje tal som kan skrivas på detta sätt är jämnt. Ett udda tal är lika med ett jämnt tal adderat med talet 1. De udda talen är alltså de tal som kan skrivas $2n + 1$ där n är ett heltal. Att visa att produkten av två udda heltal $2m + 1$ och $2n + 1$, där m och n är heltal, är udda kräver en del räkningar. Vi har att

$$(2m+1)\cdot(2n+1) = (2m+1)\cdot 2n + (2m+1)\cdot 1 = 2n(2m+1) + 2m+1.$$

Heltalet $2n(2m+1)+2m$ är jämnt eftersom det är summan av de båda jämna talen $2n(2m+1)$ och $2m$ och alltså är $2n(2m+1)+2m+1$ udda.

Beviset är onekligen kortare och till synes enklare än det vi gav i föregående avsnitt. Men blev det lättare att förstå? Att skriva upp ett udda tal med hjälp av en symbol kräver eftertanke. I räkningarna har vi använt räknelagar och omskrivningar som inte är uppenbara. Att inse att slutresultatet är udda är kanske inte tydligt för alla. Invändningarna är berättigade, men om vi väl lärt oss ett antal fundamentala räknelagar och vant oss vid att använda dem, blir räkningarna ett rutinarbete och tankeverksamheten kan ägnas åt annat. Vi skall nu se hur vi kan använda algebran för att visa påståenden om kvadrattal, men först några ord om de grundläggande räknelagarna.

Räknelagar Några av de räknelagar som brukar skrivas upp är av mycket enkel natur. Vi har t.ex. att $m+n=n+m$ och $m \cdot n = n \cdot m$ där m och n är godtyckliga heltal. Ordningen av termerna respektive faktorerna spelar ingen roll för resultaten. Dessa lagar kallas kommutativa. Vi har också s.k. associativa lagar nämligen $(m+n)+r = m+(n+r)$ och $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$ för alla heltal m, n och r. Resultatet blir alltså detsamma om vi först adderar m och n och därefter adderar denna summa med r som om vi först adderar n och r och därefter till den erhållna summan adderar m. Motsvarande tolkning kan göras av den associativa lagen för multiplikation. Vi behöver alltså inte bekymra oss i vilken ordning vi gör additionerna respektive multiplikationerna och kan skriva $m+n+r$ och $m \cdot n \cdot r$ utan att det kan uppstå missuppfattningar. De kommutativa och associativa lagarna tvivlar väl ingen på och de kan illustreras med resonemang med prickar liknande de vi gjorde när vi studerade udda och jämna tal. Vi avstår från det av utrymmesskäl.

En tredje typ av räkneregel knyter ihop addition och multiplikation. Den kallas den distributiva lagen och säger följande:

$$r \cdot (m+n) = r \cdot m + r \cdot n$$

för godtyckliga heltal m, n och r. Att multiplicera en summa med ett tal ger alltså samma resultat som om vi först multiplicerar talet med varje term i summan och sedan addera produkterna. Vi säger att vi multiplicerat in r i parentesen $(m+n)$. Denna lag är för många svårare att inse och en bild kan åskådliggöra den.

$$\begin{array}{c|ccccc|cccc|}
\uparrow & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
r & \dots & & & & & & & & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
\downarrow & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
\hline
 & \leftarrow & & m & & \rightarrow & \leftarrow & & n & \rightarrow
\end{array}$$

Den stora rektangeln innehåller r rader om $(m+n)$ kolonner. Den innehåller alltså $r(m+n)$ prickar. Den högra delrektangeln innehåller r rader och m kolonner och den vänstra r rader och n kolonner. De båda delrektanglarna innehåller alltså $r \cdot m$ respektive $r \cdot n$ prickar och eftersom antalet prickar i den stora rektangeln är lika med summan av antalet prickar i de båda deltrianglarna följer den distribution lagen.

Med hjälp av den distribution lagen kan vi nu multiplicera två parenteser. Vi har

$$(r+s)(m+n) = (r+s)m+(r+s)n = m(r+s)+n(r+s) = mr+ms+nr+ns.$$

Här har vi först använt distributiva lagen och multiplicerat in $(r+s)$ i parentesen $(m+n)$, därefter den kommutativa lagen och till slut den distributiva lagen två gånger. Produkten av de båda summorna är alltså lika med summan av de produkter som fås genom att multiplicera varje term i den ena parentesen med varje term i den andra och sedan addera de fyra produkterna.

Ett viktigt och användbart specialfall är uttrycket för kvadraten av en summa av två termer. Vi har

$$(m+n)^2 = (m+n)\cdot(m+n) = m\cdot m+m\cdot n+n\cdot m+n\cdot n = m^2+2mn+n^2.$$

Räkneregeln

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

kallas för kvadreringsregeln.

Räknelagarna innehåller resonemang som kan vara rätt komplicerade. Att kunna räkna sig fram till samband utan att behöva göra omfattande förklaringar underlättar det matematiska arbetet. Argument som annars skulle upprepas gång på gång har vi byggt in i en räknelag som vi sedan kan använda mekaniskt. Nackdelen är att abstraktionsnivån ökar. Det är nödvändigt att vänja sig vid symbolerna och för det krävs det övning. Ibland kan det vara bra att gå tillbaka till en mer konkret beskrivning av ett samband. Kvadreringsregeln kan t.ex. illustreras på följande sätt :

$$\begin{array}{|ccc|cc|}
\hline
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
\end{array}$$

Den stora kvadraten har sidan $(m+n)$ och den innehåller $(m+n)^2$ prickar. Kvadraten längst upp till vänster har sidan m och innehåller m^2 prickar medan den nederst till vänster har sidan n och n^2 prickar. De båda rektanglarna som blir över har sidorna m och n och innehåller mn prickar vardera.

En sats om kvadrattal I det första kapitlet gav vi ett utdrag från en dialog ur Robert Recordes *The Whetstone of Witte* som handlade om kvadrattal d.v.s. tal som är lika med produkten av ett heltal med sig själv. Vi återknyter nu till kvadrattalen och visar några enkla egenskaper hos dem. De fjorton första är

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196.$$

Kvadraten på ett jämnt tal är jämnt och kvadraten på ett udda tal är udda. Det följer av våra tidigare resonemang. Ett jämnt tal är ett tal som ger resten 0 vid division med 2 och ett udda tal är ett tal som ger resten 1. Vi noterar att kvadraten på ett tal med resten 0 också ger resten 0 och att ett kvadraten på ett tal med resten 1 ger resten 1. Situationen är enkel.

Vad händer nu om vi istället studerar resterna vid division med 3? De kan vara 0, 1 eller 2. Talet 6 har t.ex. resten 0 vid division med 3, talet 7 har resten 1 och 8 resten 2. Vilka rester har kvadrattalen? Vi gör en tabell

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1

där vi på den undre raden skrivit upp resterna vi division med 3.

Vi ser ett mönster. Tydligen ger aldrig ett kvadrattal resten 2 vid division med 3. Vart tredje kvadrattal ger resten 0 och det är kanske inte så underligt. Om ett tal är delbart med 3 så är också dess kvadrat delbart med 3 och ger därför resten 0 vid division med 3. Men varför ger alla de övriga resten 1?

Om ett heltal divideras med 3 så är resten 0, 1 eller 2. Det betyder att varje heltal kan skrivas

$$3k, 3k+1 \text{ eller } 3k+2 \text{ där } k \text{ är heltal.}$$

I det första fallet är talet delbart med 3 och ger alltså resten 0. I det andra fallet ger talet resten 1 vid division med 3 och i det sista resten 2. Uppenbart är att kvadraten på det första talet

$$(3k)^2 = 3 \cdot 3k^2$$

ger resten 0 vid division med 3. Vi kvadrerar det andra talet och får

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3q + 1$$

där $q = 3k^2 + 2k$ är ett heltal. Alltså ger $(3k+1)^2$ resten 1 vid division med 3. Slutligen kvadrerar vi det tredje talet och får

$$(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = (9k^2+12k+3)+1 = 3(3k^2+4k+1)+1 = 3q'+1$$

där $q' = 3k^2 + 4k + 1$ är ett heltal. Den tredje typen av heltal ger alltså också resten 1 vid division med 3. Vi har alltså visat att kvadraten på ett heltal som inte är delbart med 3 alltid ger resten 1 vid division med 3.

Det är naturligtvis möjligt att utan algebra genomföra ett resonemang som visar samma sak. Men det blir omständligt och de figurer som skall hjälpa oss blir komplicerade och svåröverskådliga. Algebran blir ett effektivt verktyg. Det krävs visserligen att man har en färdighet att omforma algeriska uttryck och att tolka dem, men om man väl uppövat den förmågan så är vinsterna stora. Algebran ger oss dessutom bättre möjligheter att undersöka om det resultat som visats kan generaliseras eller förstärkas. Vi skall titta närmare på det i nästa avsnitt.

Kan bevis utnyttjas för att skärpa påståenden?

Summan av två på varandra följande positiva heltal är alltid udda. Av dessa båda tal måste nämligen det ena vara udda och det andra jämnt och summan av ett jämnt och ett udda tal är, som vi tidigare sett, udda. Vad kan vi säga om summan av kvadraterna på två på varandra följande positiva heltal? Den måste också vara udda. Kvadraten på det jämna av de båda talen är jämn och kvadraten på det udda är udda. Alltså är summan udda. Vi kan också visa det algebraiskt. Om vi betecknar de båda talen med n och $n+1$ så är summan av kvadraterna lika med

$$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + (n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1$$

och eftersom $(n^2 + n)$ är ett heltal så är talet $2(n^2 + n) + 1$ udda och vi har visat vårt påstående även på detta sätt. Vi kan nöja oss med det. Men vi kan också stanna upp ett slag och analysera uttrycket för kvadratsumman nämligen $2(n^2 + n) + 1$. Vi kan nämligen skriva om den första termen på följande sätt

$$2(n^2 + n) = 2n(n+1).$$

Ett av de båda talen n och $n+1$ måste vara jämnt och då är också produkten $n(n+1)$ jämn. Talet $n(n+1)$ kan alltså skrivas $2r$ där r är ett heltal och vi kan alltså skriva kvadratsumman

$$n^2 + (n+1)^2 = 2 \cdot 2r + 1 = 4r + 1.$$

Genom att analysera det algebraiska beviset för att summan av kvadraterna av två på varandra följande positiva heltal är udda har vi kunnat visa ett betydligt skarpare påstående nämligen:

> Summan av kvadraterna av två på varandra följande positiva heltal ger alltid resten 1 vid division med 4 .

En sådan summa kan alltså inte ge någon av resterna 0, 2 eller 3 vid division med 4. Naturligtvis kan vi i förutsättningen ta bort villkoret att talen skall vara positiva och då få en mera generell sats.

Kanske hade vi genom några enkla tester kunnat komma fram till samma påstående och därefter bevisa det utan att blanda in jämna och udda tal. Men i all sin enkelhet ger vårt resonemang ett nytt perspektiv på bevis. Vi har tidigare slagit fast att ett bevis övertygar oss om att ett påstående är sant. Vi har också sett att bevis kan förklara varför påståendet är sant. Ett påstående kan förklaras med hjälp av ett enklare. Emellertid kan ett bevis kan också ge oss ny information. En analys av det kan leda till upptäckten att det går att bevisa mer än vad vi från början avsett. Den kan också innebära att vissa förutsättningar är onödiga och kan strykas. Kort sagt: En analys av ett bevis för ett påstående kan medföra att påståendet kan skärpas.

Några exempel från Fermats arbeten

Fermats lilla sats - ett värdefullt resultat I ett tidigare avsnitt behandlade vi den brevväxling mellan Pascal och Fermat som brukar betecknas som starten av sannolikhetsläran. Amatörmatematikern Fermat bidrog med många viktiga matematiska resultat inom många områden inte bara inom sannolikhetsläran utan också inom t.ex. analys. Men han stora intresse var att undersöka egenskaper hos de hela talen. Han var en av talteorins pionjärer. Hans intresse för talteorin framgår också av brevväxlingen med Pascal. Även om hasardspelen är anledningen till brevväxlingen och det är diskussionerna kring dessa som han gjort den berömd, så kommer Fermat i många brev in på talteoretiska frågor som inte har någon koppling till huvudproblematiken. Han vill ha Pascals synpunkter på sina tankar och teorier. Nu är inte Pascals intresse för talteori tillräckligt stort och han hänvisar Fermat till andra som är mer insatta i frågorna.

Ett berömt resultat av Fermat är det som ofta kallas Fermats lilla sats. Den formulerades i ett brev 1640 och lyder som följer:

> Om p är ett primtal och a är ett godtyckligt heltal så är p delare till $a^{p-1} - 1$ förutsatt att p inte delar a.

Vi har här använt den gängse terminologin. Att ett heltal b delar ett annat heltal a betyder att $a = bc$ där c också är ett heltal. Ett heltal p kallas primtal om $p \geq 2$ och om de enda positiva heltal som delar p är 1 och p.

Fermats lilla sats medför alltså att t.ex. 17 är en delare till $100^{16} - 1$ och att 23 är en delare till $2016^{22} - 1$. Talen 17 och 23 är ju primtal och 17 och 23 är inte delare till 100 respektive 2016. Satsen är för den oinvigde komplicerad till sitt innehåll och verkar dessutom sakna all praktisk betydelse. Det är uppenbart att påståendet är så komplext att det kräver någon form av generellt resonemang som visar att det är sant. Det krävs med andra ord ett bevis. Fermat bevisade aldrig själv satsen. Det gjorde den tyske matematikern och filosofen Gottfried William Leibniz ett halvsekel senare. Från början hade satsen endast teoretiskt intresse. Det är ett vackert och överraskande resultat. På senare tid har talteorin fått en stor betydelse inom kryptering och Fermats lilla sats är ett viktigt hjälpmedel inom den verksamheten. Satsen med bevis är nu standard inom grundläggande kurser i talteori. För att på ett rimligt sätt genomföra ett bevis av satsen är färdigheter i algebra oundgängliga.

Fermatska primtal och en mindre lyckad hypotes Fermat upptäckte flera samband som han trodde gällde generellt. Ibland var han lyckosam, som i fallet med Fermats lilla sats. Ibland var han mindre lyckosam. I det brev till Pascal som är daterat 29 augusti 1654, tar han upp en typ av primtal som senare skulle komma att kallas Fermatska primtal. Han skriver

> Reflektera, om du finner det lämpligt, kring följande sats: De kvadrerade potenserna av 2 adderade med 1 är alltid ett primtal. Det vill säga
>
> Kvadraten på 2 adderat med 1 ger 5 som är ett primtal;
>
> Kvadraten på kvadraten ger 16 som adderat med 1 ger 17, ett primtal;
>
> Kvadraten på 16 ger 256 som adderat med 1 ger 257, ett primtal;
>
> Kvadraten på 256 ger 65536, som adderat med 1 ger 65537, ett primtal;
>
> och så i oändlighet.
>
> Detta är en egenskap vars sanning jag ber om svar från er.

> Beviset är mycket svårt och jag försäkrar er att jag ännu inte klarat det helt. Jag vill inte visa det för förrän har fullbordat det.

Vad Fermat påstår är att talen

$$2^{2^n} + 1$$

är primtal för alla heltal $n \geq 1$. Det stämmer för $n = 1, 2, 3$ och 4 och det får Fermat att tro att det stämmer för alla positiva heltal n. Gissningsvis tyckte han att det inte kan vara en tillfällighet att det stämmer så väl för de första heltalen. Nästa heltal i serien är

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

och det är inte helt enkelt att avgöra om detta tal är primtal eller inte åtminstone inte om man som Fermat saknade maskinella hjälpmedel. Nu visade Leonard Euler 1732 att talet inte är ett primtal. Vi har nämligen att

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Några fler primtal i serien än de fyra första har man inte hittat. Tyvärr är det så. I modern kryptering är det viktigt att finna stora primtal. Om Fermats hade haft rätt så skulle man ha man haft ett effektivt hjälpmedel men hans förmodande är felaktigt. Det räcker inte alltid att ett slående resultat stämmer i några exempel. Generella bevis krävs.

Fermats stora sats - en korrekt hypotes med ett svårfångat och svårförståeligt bevis[4] I en rätvinklig triangel är enligt Pythagoras sats summan av kvadraterna på de båda kortare sidorna, kateterna, lika med kvadraten på den längsta sidan, hypotenusan. Det är en av de mest berömda satserna i matematiken och den har varit känd i flera tusen år. Vi kan formulera den på följande sätt: Om kateterna har längderna x och y och hypotenusan längden z uttryckt i någon längdenhet så uppfyller x, y och z ekvationen

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Talen $x = 3, y = 4$ och $z = 5$ uppfyller ekvationen liksom $x = 5, y = 12$ och $z = 13$. Om heltalen x, y och z uppfyller ekvationen kallas de pythagoreiska. Det finns tabeller på pythagoreiska tal på lertavlor från Babylonien. Den grekiske matematikern Diofantos, som levde på 200-talet efter Krtistus, studerade i problemsamlingen *Arithmetika* bl.a. pythagoreiska

[4] En utmärkt bok om Fermats stora sats är Simon Singh, *Fermats gåta*. Norstedts. 1998

tal och han kunde ge en metod för att bestämma dem. Det var *Arithmetika* som Fermat studerade när han gjorde den anteckning i marginalen som kom att ge generationer av matematiker huvudbry. Han skrev att om man istället studerade ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

för $n \geq 3$ så saknas positiva heltalslösningar och han tillade: ”Jag har hittat ett underbart bevis för det men det får inte plats i marginalen.”

Påståendet kallas Fermats stora sats eller Fermats förmodan. Något enkelt bevis har man inte funnit. Man lyckades visa att satsen är sann för ett stort antal n och trots tappra försök kunde man inte hitta något motexempel. Förmodligen är detta tillräckligt övertygande för att tro på Fermats förmodan. Men inom matematiken räcker inte detta. För att satsen skall vara en etablerad sanning så krävs ett generellt resonemang. Under mer än trehundra år försökte många framstående matematiker förgäves lösa problemet. Till slut lyckades den engelske matematikern Andrew Wiles år 1994 konstruera ett bevis, som emellertid är mycket komplicerat och som använder begrepp och teorier som var helt obekanta på Fermats tid. Så om Fermat verkligen hade lyckats bevisa sin förmodan så måste det ha varit på ett helt annat sätt. Det troliga är att hans bevis inte hållit för en närmare granskning.

Gemene man är, som jag tidigare sagt, förmodligen övertygad om att Fermats förmodan är sann för alla n om den är sann för ett mycket stort antal n och att man trots tappra försök inte lyckats hitta något motexempel. Naturligtvis stärks övertygelsen när det blir bekant att det finns ett generellt matematiskt bevis. Men att förstå beviset är förbehållet en liten grupp av specialister. De flesta professionella matematiker har knappast möjligheter att avsätta den tid som krävs för att sätta sig in i de mycket komplicerade resonemangen som kräver kunskaper i avancerad algebra. Spelar det då inte någon roll att satsen är bevisad? I detta fallet kan det ha stor betydelse eftersom Wiles lyckats knyta samman skilda delar av matematiken och därmed fördjupat förståelsen för centrala matematiska begrepp.

Fermats stora sats är ett exempel på ett påstående som är sant men där själva beviset inte är förståeligt ens för många professionella matematiker. Själva vetskapen om att beviset är granskat av specialister stärker satsens trovärdighet. Men det förklarar inte för den vanlige matematikern och än mindre för gemene man varför den är sann.

Precision och logisk stringens

Logik inom matematiken - ett strängt krav

Vi har gett exempel på och diskuterat olika perspektiv av bevis. Men vilka krav skall bevisen uppfylla? Vi har betonat att de resonemang vi gör skall vara generella. Att visa ett påstående i ett antal speciella fall räcker inte. De skall också vara korrekta i logisk mening. De skall följa logiska slutledningsregler. Vad innebär det? I detta avsnitt skall ta upp några aspekter av logiska resonemang och analysera kraven de enskilda stegen i ett bevis.

Begrepp som ”logik” och ”logisk” har olika betydelser i olika sammanhang och för olika personer. Ibland används ordet ”logiskt” i betydelsen ”förnuftsmässigt” eller ”enligt sunda förnuftet”. Låt oss ta ett exempel. I en stor skål med karameller är alla röda utom möjligen en vars färg man inte känner till. Katarina uppmanar Alex att ta en karamell och tala om vilken färg den har. Alex säger innan han kontrollerat färgen: ”Rent logiskt skall den vara röd” och menar då att enligt sunda förnuftet skall den vara röd eftersom de röda karamellerna är så många och att den som inte är det, om den överhuvudtaget finns, knappast kan komma ifråga. Men i ett strängt matematiskt resonemang kan man inte dra slutsatsen: ”Om Alex tar en karamell ur den aktuella skålen så är den röd”. Vän av ordning säger kanske att vi kan byta ordet ”skall” mot ”bör” och då är påståendet i högsta grad rimligt. Men den typen av påståenden hör inte hemma i en strikt logisk framställning av matematik. Där skall påståenden eller satser vara otvetydiga.

Vårt exempel uppfyller alltså inte de krav som matematiken kräver av en logisk korrekt slutsats. Kan man utanför matematiken ge exempel på sådana? Det är naturligtvis möjligt. Påståendena ”Om Hässleholm är en kommun i Sverige och om William bor i Hässleholm så bor William i Sverige” eller ”Om alla elever i klassen är över 10 år och Eva går i klassen så är Eva över 10 år” är sanna. Inom matematiken har vi visat påståenden ”Om två hela tal är udda så är summan udda” eller ”Om ett heltal är udda så är har heltalets kvadrat resten 1 vid division med 3” eller ”Om en triangel i planet är given så är dess vinkelsumma 180 grader”. Dessa matematiska påståenden följer av ett antal slutledningar och är inte, som de båda exemplen från vardagslivet, uppenbara.

Vi skall inte i detalj gå in på hur logiska slutledningar är uppbyggda. Logik är en egen vetenskap som har sina rötter i både filosofi och matematik. Den har mycket gamla anor och den grekiska filosofen Aristoteles, som levde på 300-talet före Kristus, ägnade ett av sina stora arbeten *Organon* åt logik. En svensk översättning är ordet ”organon” är ”verktyg” och Aristoteles verk handlar alltså tankeverktyg. Idag är logiken ett viktigt redskap inom de vetenskaper som växt fram kring utvecklingen av datatekniken. Även ett mycket elementärt studium av logik skulle kräva en egen bok. Vi skall nöja oss med att diskutera påståenden som i stort sett är av formen ”Om ... så ......” Innan vi gör det skall vi diskutera begreppet definition. Om vi skall ha stränga krav på logiken i de olika stegen i ett bevis måste också de begrepp vi arbetar vara preciserade. Men först ger vi ytterligare exempel på logiska slutsatser och de är direkt hämtade från Aristoteles och inspirerade av slaget vid Salamis.

> ”Om några atenare föll i sjön och alla som föll i sjön blir blöta så blir några atenare blöta.”
>
> Denna slutledning är korrekt, men om vi varierar påståendet till
>
> ”Om några atenare var blöta och alla som föll i sjön blir blöta så föll några atenare i sjön”
>
> så är inte slutledningen korrekt. De atenare som blev blöta kunde ha blivit det på annat sätt än att de ramlade i sjön. Det kanske regnade eller så blev de nedstänkta då en projektil slog i vattnet intill båten.

Matematiska begrepp. Definitioner

Krav på precision och operationalitet I matematiken arbetar vi med begrepp. Inom aritmetiken kan det vara begrepp som delare, primtal, kvadrattal och rester och inom geometrin trianglar, kvadrater, rektanglar, cirklar, tangenter och bisektriser bara för att nämna några exempel. Vi formulerar påståenden om begreppen och om vi kan bevisa dem i strängt logisk mening kallar vi dem satser. Men om vi, som vi redan påpekat, kräver att bevisen skall vara strängt logiska så måste de begrepp som vi arbetar var välfdefinierade. Det är ju de egenskaper som karakteriserar begreppen som vi skall använda oss av. I ett avsnitt om det matematiska språket i kapitel 1 framhöll vi att i ett vanligt samtal behöver inte de ord vi använder vara preciserade. Ordens betydelse kan variera beroende på person och omständigheter. Den typen av vaghet är inte tillåten vid matematisk bevisföring. Där skall begreppen ha en exakt innebörd.

I det första kapitlet citerade vi Platons definition av en cirkel som alla punkter som ligger på ett givet avstånd från en given punkt. I en av Robert Recordes dialoger definierade läraren ett kvadrattal på ett relativt invecklat sätt som medförde att eleven missuppfattade innebörden. Läraren kunde emellertid med en bild och en enklare beskrivning få eleven på rätta tankar. En lämplig definition av kvadrattal är: Ett kvadrattal är ett heltal som kan skrivas som produkten av ett heltal med sig själv eller med hjälp av algebra:

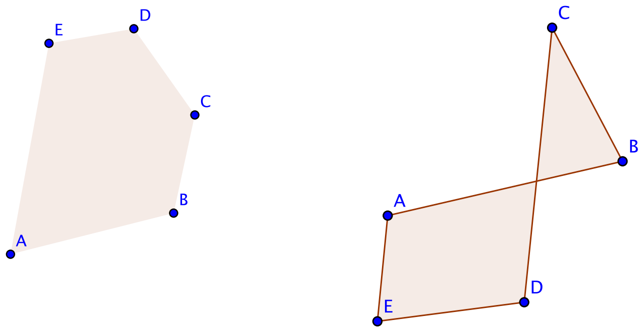
> Ett heltal a kallas ett kvadrattal om det finns ett heltal b sådant att $a = b^2$.

Den algebraiska formuleringen har sina förtjänster. Förutom att den är tydlig så är den användbar vid problemlösning och bevisföring. Den är operationell. Detsamma gäller också den definition av cirkel som vi nämnt tidigare. Vi tar ett ytterligare ett exempel. Hur skall vi definiera begreppet tangent till en cirkel? Vår intuition säger oss att det är något som bara nuddar cirkeln. Vi vill gärna använda verb som nuddar, snuddar vid eller touchar. De kanske beskriver vad det är fråga om men de är inte särskilt behjälpliga om vi vill bevisa påståenden eller lösa problem om tangenter. En kanske mindre suggestiv men ur matematisk synpunkt bättre definition är

> En tangent till en cirkel är en rät linje som skär cirkeln i precis en punkt.

Vi sammanfattar: En definition av ett matematiskt begrepp skall karakterisera begreppet entydigt. Det är definitionen som fastlägger det. Den skall vara operationell i den meningen att den skall kunna användas i bevisföring och problemlösning. Naturligtvis skall definitionen också fånga vår intuitiva föreställning om begreppet.

Definitioner och figurer För att få sann förståelse för ett begrepp krävs enligt Platon bl.a. tre grundläggande saker. Begreppets benämning, dess definition och en bild d.v.s. ”det man ritar upp och suddar ut.” En figur bidrar i hög grad för att skapa sig en förståelse för ett begrepp. Det räcker inte att kunna formulera definitionen av en cirkel vi måste också kunna rita upp den. När läraren i Robert Recordes dialog formulerade definitionen av ett kvadrattal missuppfattade eleven den, men kom på rätt spår när läraren illustrerade begreppet med en figur. Ofta har vi en inre bild av ett begrepp, vi ser en figur framför oss. Det är den bilden som ligger till grund för den definition som formuleras i ord. Detta gäller naturligtvis speciellt inom geometrin. De geometriska begreppen är verktyg för att beskriva former och mönster i vår omgivning. Bilden är det primära, den formella definitionen är sekundär. Inom aritmetiken är det kanske ofta tvärtom. Begrepp som udda och jämna tal och kvadrattal är lätta att illustrera men det är svårare med t.ex. primtal. Här är oftast definitionen det primära och illustrationen kommer i andra hand. Men båda aspekterna är viktiga och det är angeläget att både kunna formulera en definition med ord och att kunna åskådliggöra det.



Figur 2:

Inom geometrin kan ibland det vara svårt att ge exakta definitioner av det som vi har eller tycker oss ha en konkret bild av. Låt oss ta exempel. Begreppet månghörning har de flesta av oss en gemensam bild av. En femhörning ser ut som den vänstra delen av figur 2. Den begränsar ett område i planet. Sidorna är sträckor och hörnen är gemensam ändpunkter för två sträckor. Men är denna beskrivning tillräcklig? Den bild som vi har i högra delen av figur 2, där de två sidorna AB och CD skär varandra, kanske några av oss också kallar en femhörning andra inte. En definition av den typ av femhörnig vi ser i vänstra delen av figur 2 skulle kunna formuleras på följande sätt:

> Antag att A, B, C, D och E är fem olika punkter i planet. Antag vidare att sträckorna AB, BC, CD, DE och EA är sådana att om två av dem inte har en gemensam ändpunkt så har de inte heller någon gemensam punkt. Vi säger då att de fem sträckorna AB, BC, CD, DE och EA bildar en femhörning $ABCDE$ med hörnen A, B, C, D och E och sidorna AB, BC, CD, DE och EA.

Definitionen blir omständlig och en figur där vi talar om att det endast är närliggande sidor som får ha en punkt gemensam är kanske tillräcklig för våra ändamål. Missuppfattningar kan inte uppstå, men ju mer grundläggande frågor som ställs desto viktigare blir det att precisera begreppen och inte bara lita på figurer. Det finns t.ex. en sats som säger att en sluten kurva i planet som inte skär sig själv delar planet i två områden, ett inre och ett yttre. För att satsen skall bli meningsfull och för att sedan kunna bevisa den krävs att vi preciserar begreppen kurva, sluten kurva och område. Vi måste också tala om vad menar med att en kurva skär sig själv. Definitionerna måste vara så operationella att vi kan konkretisera våra resonemang t.ex.i ett algebraiskt språk.

Systematik Det är inte bara i matematiken som det är starka krav på precision i beskrivningen av de begrepp och objekt man arbetar med. En skillnad kan vara att matematikens objekt oftast är abstrakta och bestäms helt av definitionen. I andra vetenskaper är det ofta konkreta objekt som karakteriseras så exakt som möjligt av sina egenskaper. Det är lätt att associera till Carl von Linnés *Systema Naturae* från 1735. De olika arterna beskrivs ingående och ordnas i ett system. Bokens fullständiga titel översatt till svenska är *Naturens system: naturens tre riken, underordnade klasser, ordningar, släkten och arter med dessas karakteristika, skillnader, synonymer och lokaler.* Linné utarbetade ett hierarkiskt system för att beskriva naturen. Inom många delar av matematiken kan man se liknande system. Vi ger ett exempel från geometrin.

Vi har tidigare definierat begreppet femhörning. Naturligtvis kan definitionen generaliseras till en godtycklig månghörning. Månghörningar kan delas in i trianglar, fyrhörningar, femhörningar o.s.v. beroende på antalet hörn. En speciell typ av trianglar kallas likbenta, en annan kallas rätvinkliga. En speciell typ av fyrhörningar är parallelltrapetser där två av sidorna är parallella, en speciell typ av parallelltrapetser är parallellogrammer där motstående sidor är parallella, en speciell typ av parallellogrammer är romber där alla sidor är lika stora, en annan är rektanglar där alla vinklar är lika stora. Kvadrater slutligen är både en typ av rektanglar och en typ av romber. Den karakteriseras av att alla sidor och vinklar är lika stora.

Analogin med Linnés *Systema Naturae* haltar något men den blir tydligare i mer avancerad matematik där abstrakta begrepp som t.ex. grupper, ringar och kroppar byggs upp i en hierarkisk ordning.

Implikationer och ekvivalenser

Vikten av att tydliggöra förutsättning och slutsats. Implikationer Ett matematiskt påstående som är sant brukar kallas en sats. En sats skall bevisas och det är då angeläget att var tydlig med vad man kan utgå ifrån och vad man förväntas bevisa. Om satsen formuleras på formen ”Om A så B” så får man utgå från A och skall bevisa B. Vi kallar i fortsättningen A för förutsättning och B för slutsats. Ett av matematikens mest klassiska verk är Euklides *Elementa* från 300-talet före Kristus. Där samlade Euklides den tidens geometriska kunskap i ett antal satser. Varje sats (och de är många - 468 tycken) behandlas enligt samma mönster. Först formuleras satsen, en figur ritas, förutsättningarna preciseras under en särskild rubrik och det som skall bevisas formuleras under rubriken ”Slutsats”. Därefter genomförs beviset och det avslutas med orden ”Vilket Skulle Bevisas”. Beviset skall alltså formuleras så att den sista meningen blir naturlig. Framställningen kan verka omständlig och upprepningarna blir många. Men den blir tydlig. Vi skall återkomma till *Elementa* i ett senare avsnitt.

Ett annat och kanske smidigare sätt att tydliggöra förutsättningar och slutsats är att använda s.k. implikationspilar. Istället för ”Om A så B”, som vi kallar en implikation, skriver vi ”A $\Rightarrow$ B”. Våra tidigare påståenden kan då skrivas, om vi förutsätter att x och y är heltal,

> x och y är udda $\Rightarrow x + y$ är jämnt.
> x är udda $\Rightarrow x^2$ ger resten 1 vid division med 4.
> x och y är två på varandra följande heltal $\Rightarrow x^2 + y^2$ ger resten 1 vid division med 4.

När vi använder implikationspilar är det ofta, som i exemplen, naturligt att införa beteckningar på de objekt som studeras.

Ofta använder man andra uttrycksätt sätt för implikationen ”Om A så B”. Vi säger också ”A är ett tillräckligt villkor för B” eller ”B är ett nödvändigt villkor för A”, t.ex. ”x och y är udda är ett tillräckligt villkor för att $x + y$ är jämnt” eller ”x^2 ger resten 1 vi division med 4 är ett nödvändigt villkor för att x är udda”.

Omvändningen av en sats. Ekvivalenser Antag att vi har visat satsen ”Om A så B” eller med vår nya beteckning ”A $\Rightarrow$ B”. Vi byter förutsättning och slutsats och i stället betraktar satsen ”Om B så A” eller ”B $\Rightarrow$ A”. Vi kallar det påståendet för omvändningen av ”A $\Rightarrow$ B”. Antag att ”A $\Rightarrow$ B” är sann. Vad kan vi då säga om ”B $\Rightarrow$ A”? Om den också är sann säger vi att satsen ”A $\Rightarrow$ B” är omvändbar. Vi kontrollerar med några av våra exempel och förutsätter också här att x och y är heltal

> Omvändningen till påståendet
> S_1: x och y är udda $\Rightarrow x + y$ är jämnt
> är
> $x + y$ är jämnt $\Rightarrow x$ och y udda.
> Detta påstående är uppenbarligen inte sant eftersom $x+y$ är jämnt också då både x och y jämna. Satsen S_1 är alltså inte omvändbar.
>
> Omvändningen till påståendet

S_2: x är udda $\Rightarrow$ x^2 ger resten 1 vid division med 4
är
x^2 ger resten 1 vid divison med 4 $\Rightarrow$ x är udda
som är sann. Om x vore jämnt så skulle också x^2 vara jämnt och kan då inte ge resten 1 vid division med 4. Satsen S_2 är alltså omvändbar.

Omvändningen till påståendet
S_3: x och y är två på varandra följande heltal $\Rightarrow$ $x^2 + y^2$ ger resten 1 vid division med 4
är
$x^2 + y^2$ ger resten 1 vid division med 4 $\Rightarrow$ x och y är två på varandra följande heltal.
Detta är inte sant eftersom om t.ex $x = 1$ och $y = 4$ så är $x^2 + y^2 = 17$, som ger resten 1 vid division med 4, trots att 1 och 4 inte är två på varandra följande heltal. Satsen S_3 är alltså inte omvändbar.

Ibland, men som vi sett långtifrån alltid, är båda påståendena "A $\Rightarrow$ B" och "B $\Rightarrow$ A" sanna. Vi skriver då "A $\Leftrightarrow$ B". Vi säger att A är ekvivalent med B eller A är ett nödvändigt och tillräckligt villkor B eller "A om och endast om B". För att gå tillbaka till våra exempel så har vi att

"x^2 ger resten 1 vid divison med 4 $\Longleftrightarrow$ x är udda"

där vi som förut antar att x är ett heltal.

Beviset av en ekvivalens "A $\Leftrightarrow$ B" brukar delas upp i två delar. I den ena delen visas "A $\Rightarrow$ B" och den andra "B $\Rightarrow$ A". Många gånger kräver de båda delarna helt olika tekniker. Vi ger ett exempel. Pythagoras sats säger att summan av kvadraterna på kateterna i en rätvinklig triangel är lika med kvadraten på hypotenusan. Vi kan skriva det som en implikation på följande sätt

a, b och c är sidor en i en rätvinklig triangel där den längsta sidan är $c \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Det finns många bevis för Pythagoras sats, men inget är enkelt. Det krävs alltid av ett resonemang i flera steg. Vi skall inte gå in på det här utan vi frågar oss istället om omvändningen gäller d.v.s.

a, b och c är sidor i en triangel och $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow$ triangeln är rätvinklig och c är den längsta sidan.

Om vi först har visat Pythagoras sats visar det sig att beviset för omvändningen är relativt enkelt. Vår givna triangel har ju enligt förutsättningen sidorna a, b och c där $a^2 + b^2 = c^2$. Vi konstruerar en rätvinklig triangel med kateterns a och b. Kvadraten på den tredje sidan, hypotenusan, är då enligt Pythagoras sats lika med $a^2 + b^2$ d.v.s. lika med c^2 där c är sidan i vår ursprungliga triangel. Men då måste också hypotenusan i den rätvinkliga triangel vi konstruerat vara lika med c. I de båda trianglarna är alltså motsvarande sidor är lika stora. Då säger en av de grundläggande satserna i geometrin att också motsvarande vinklar är lika stora. Det betyder att vinkeln mellan sidorna med längderna a och b i vår ursprungliga triangeln är rät och alltså är den rätvinklig.

Implikations- och ekvivalenspilar tydliggör vad man får förutsätta och vart man vill komma. De kan också vara ett viktig hjälpmedel vid resonemang i flera steg och inte minst vid ekvationslösning. Vi ger några exempel i nästa avsnitt.

Implikationer, ekvivalenser och ekvationslösning Ordet ekvation betyder likhet och i matematiken betecknar det en likhet som innehåller en eller flera obekanta. Att lösa en ekvation innebär att bestämma de värden på de obekanta som uppfyller likheten. Man utgår alltså från en likhet och vill bestämma värden på de obekanta som ingår i den. Från början vet man egentligen inte om det finns någon lösning överhuvudtaget och om den är lösbar så vet man inte heller hur många lösningar den har. Vi skall studera några exempel och visa hur användningen av implikations- och ekvivalenspilar kan hjälpa till att tydliggöra tankegångarna. Först löser vi en enkel ekvation som skulle kunna vara hämtad från en lärobok från grundskolan .

> Bestäm talet x så att det uppfyller ekvationen
>
> $$3x + 7 = x + 15.$$
>
> Den vanliga metoden går ut på att skriva om likheten så att vi får x-termerna till vänster om likhetstecknet och kända termer till höger. Vi börjar med att subtrahera båda leden i likheten med 7 och får
>
> $$3x = x + 8.$$
>
> Resonemanget bakom denna operation är att om x uppfyller den ursprungliga ekvationen så uppfyller den också den andra. Om två tal är lika och vi subtraherar samma tal från båda leden så är ju skillnaderna också lika. Vi fortsätter på samma sätt och subtraherar x från båda leden och får
>
> $$2x = 8.$$

Om talet x uppfyller vår ursprungliga ekvation så måste alltså $2x = 8$. Vi dividerar nu båda leden med 2 och får

$$x = 4.$$

Om två lika stora tal divideras med samma tal så är ju kvoterna lika stora. Vi har nu kommit fram till att $x = 4$ som alltså är vår lösning. Men är vi säkra på det? Analyserar vi vårt resonemang så inser vi att det vi har visat är att om $3x + 7 = x + 15$ så är $x = 4$ d.v.s. det är det enda tal som kan vara lösning till vår ekvation. Vi har visat att

$$3x + 7 = x + 15 \Longrightarrow x = 4$$

men inte att $x = 4$ verkligen är en lösning. Men det är ju faktiskt enkelt att kontrollera. Om $x = 4$ så blir vänsterledet i den ursprungliga ekvationen lika med $3 \cdot 4 + 7 = 12 + 7 = 19$ och högerledet är också lika med $4 + 15 = 19$. Alltså är $x = 4$ verkligen en lösning och vi har löst vår ekvation.

Resonemanget verkar omständligt. Vi brukar nöja oss med att utföra de omskrivningar som behövs för att x skall stå till vänster och en känt tal till höger om likhetstecknet. Måste vi verkligen testa om det x vi fått fram verkligen löser ekvationen. Naturligtvis kan en kontroll vara en viktig säkerhetsåtgärd. Vi kan ju ha räknat fel. Men behövs den för själva logiken i resonemanget? Vi skriver upp de olika stegen i resonemanget och använder implikationspilar för att få en bättre överblick

$$3x + 7 = x + 15 \Longrightarrow 3x = x + 8 \Longrightarrow 2x = 8 \Longrightarrow x = 4.$$

Nu är alla implikationers omvändbara. Om $3x = x + 8$ så får vi, om vi addera 7 till bägge leden, $3x + 7 = x + 15$. Genom att addera x till båda leden respektive multiplicera båda leden med 2 inser vi att den andra respektive den tredje implikationen är omvändbara. Vi kan alltså skriva

$$3x + 7 = x + 15 \Longleftrightarrow 3x = x + 8 \Longleftrightarrow 2x = 8 \Longleftrightarrow x = 4.$$

Eftersom de olika likheterna är ekvivalenta följer det nu direkt att $x = 4$ inte bara är den enda möjliga lösningen utan också att det verkligen är en lösning. Om vi följer pilarna från högre till vänster har vi ju visat att om $x = 4$ så är $3x + 7 = x + 15$.

I exemplet ovan har vi analyserat ett mycket enkelt exempel för att beskriva de logiska slutledningar som ligger bakom de operationer vi är vana vid att göra när vi löser denna typ av enkla ekvationer. Naturligtvis kan vi inte varje gång föra ett så omständligt resonemang utan nöja oss med den sista följden av ekvivalenser. Kanske utelämnar vi också ekvivalenspilarna. Det är underförstått att de olika likheterna är ekvivalenta. Nästa exempel är mer komplicerat och om man inte tänker igenom logiken så kan man få felaktigt resultat.

Bestäm de tal x som uppfyller likheten

$$\sqrt{2x^2 - 26x + 73} = 8 - x.$$

Rotuttrycket i vänstra ledet känns besvärande. Om vi kvadrerar båda sidor får vi en enklare ekvation nämligen

$$2x^2 - 26x + 73 = (8 - x)^2.$$

Vi utvecklar högerledet och får

$$2x^2 - 26x + 73 = 64 - 16x + x^2$$

som efter förenkling kan skrivas

$$x^2 - 10x + 9 = 0.$$

Det finns en standardmetod att lösa andragradsekvationer och med hjälp av den kan lösningarna bestämmas till $x = 1$ och $x = 9$. Den som till äventyr har glömt metoden kan övertyga sig om att dessa värden på x är lösningar genom enkla kontroller. Om vi sätter in $x = 1$ och $x = 9$ i vänsterledet är resultaten i båda fallen lika med 0.

Vår ursprungliga ekvation skulle alltså ha två lösningar. Stämmer det?

Vi kontrollerar först om $x = 1$ är en lösning:

$$\sqrt{2 \cdot 1^2 - 26 \cdot 1 + 73} = \sqrt{49} = 7 \text{ och } 8 - 1 = 7$$

De båda leden är lika och alltså uppfyller $x = 1$ ekvationen.

Kontrollera nu $x = 9$:

$$\sqrt{2 \cdot 9^2 - 26 \cdot 9 + 73} = \sqrt{1} = 7 \text{ och } 8 - 9 = -1.$$

De båda leden är inte lika och alltså är $x = 9$ inte en lösning till ekvationen.

Varför är inte både $x = 1$ och $x = 9$ lösningar? Vi analyserar våra slutledningar. Vi började med att kvadrera ekvationens båda led. Om två tal är lika så är också kvadraterna lika. Vi kan alltså skriva

$$\sqrt{2x^2 - 26x + 73} = 8 - x \Longrightarrow 2x^2 - 26x + 73 = (8 - x)^2.$$

Men kan vi "vända på implikationspilen"? Kan vi dra slutsatsen att om tals kvadrater lika så är talen lika? Svaret är nej. Talen 3 och -3 har ju t.ex. samma kvadrater. Vad vi har visat är att om x är en lösning till ekvationen så måste

$$2x^2 - 26x + 73 = (8 - x)^2$$

och det medför i sin tur att $x = 1$ eller $x = 9$. Några andra tal kan inte uppfylla vår ursprungliga ekvation men de behöver göra det. Vi måste göra en kontroll och då visar det sig att endast $x = 1$ är lösning.

Motsägelsebevis

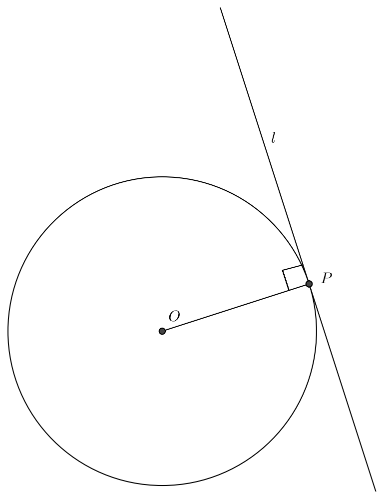
De resonemang och bevis vi hittills använt oss har i viss mening varit okomplicerade. Vi har resonerat oss fram till att vinkelsumman i en triangel är 180 grader genom en enkel konstruktion och genom att utgå från att alternatvinklar då två parallella linjer skärs av en tredje är lika stora. Genom enkla figurer kunde vi åskådliggöra hur jämna och udda tal adderas och multipliceras och genom en kedja av resonemang har vi visat resterna av kvadrattal vid division med olika heltal fördelas. Men ibland fungerar inte de direkta resonemangen. Vi måste använda en form av omvänd bevisföring. Om vi skall bevisa A $\Rightarrow$ B så antar vi att B inte är sant och visar att det ger upphov till en motsägelse. Av det följer att slutsatsen B är korrekt. Ett exempel från geometrin får illustrera metoden.

Vi har tidigare definierat en tangent till en cirkel som en rät linje som skär cirkeln i precis en punkt, som vi kallar tangeringspunkt. Om vi drar en radie till tangeringspunkten så kommer vinkeln mellan radien och tangenten vara rät. Varför? För den som i likhet med mig studerat matematik under en tid då geometrisk problemlösning var en betydande del av matematikundervisningen ifrågasätts inte påståendet. Vi har använt oss av det så många gånger att det blivit något av en självklarhet. Men det var länge sedan geometrin hade en sådan betydelse. I de kurser i klassisk geometri jag gett under de senaste decennierna har det inte varit självklart att radien till tangeringspunkten bildar rät vinkel med tangenten. Studenternas fråga "Varför?"har varit genuin. Hur kan man bevisa påståendet? Naturligtvis har jag själv en gång för länge sedan presenterats ett bevis men det glöms bort då det flitiga användandet av satsen gör den mer eller mindre till en självklarhet. Det bevis som finns i Euklides *Elementa* är ett motsägelsebevis. Vi antar att slutsatsen inte är sann och visar att detta leder till en motsägelse. Här följer satsen med bevis i den form som används i *Elementa*. Först formuleras satsen, därefter preciseras förutsättningar och slutsats med hänvisning till en figur och till slut genomförs beviset. Beviset avslutas med Vilket Skulle Bevisas och slår alltså fast att man uppnått målet. Ibland kan denna mall kännas omständlig men den skapar ordning och reda i resonemangen och det kan vara nog så värdetullt.

Sats En rät linje tangerar en cirkel. Radien till tangeringspunkten är vinkelrät mot tangenten.

Förutsättning. En rät linje l tangerar en cirkel med medelpunkt i O i punkten P.

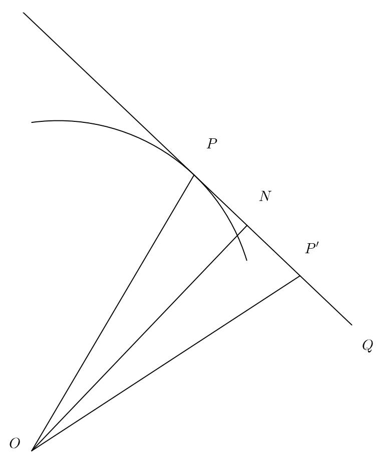
Slutsats. OP är vinkelrät mot l. se figur 3.



Figur 3:

Bevis.

Antag att vinkeln mellan OP och l inte är rät. Se figur 4.



Figur 4:

Vinklarna mellan OP och l är då inte lika stora och eftersom de tillsammans är 180 grader måste en av dem vara mindre är 90 grader.

Låt Q vara en punkt på l sådan att vinkel QPO är mindre än 90 grader. Drag en normal från medelpunkten O till den räta linjen l. Den skär l i N. Låt nu P' vara en punkt på l som inte är lika med P och som är sådan att $P'N = PN$.

I de båda trianglarna OPN och $OP'N$ är vinklarna vid N båda räta, sidan ON är gemensam och sidorna $PN = P'N$. Av detta följer att de båda trianglarna är kongruenta vilket betyder att sidor och vinklar i den ena triangeln är lika stora som motsvarigheterna i den andra. Alltså är sidan OP lika med sidan OP'.

Men OP är en radie och eftersom $OP' = OP$ så måste enligt definitionen på en cirkel punkten P' ligga på cirkeln. Alltså skär den räta linjen l cirkeln i två punkter P och P' och alltså kan inte l vara tangent vilket var förutsättningen.

Vi har fått en motsägelse. Vårt antagande var fel. Vinkeln mellan l och OP måste vara rät.

V(ilket) S(kulle) B(evisas)

Konstruktioner av matematiska teorier

Behovet av struktur

Vi har genomfört ett antal generella resonemang eller bevis för påståenden inom aritmetiken och geometrin. De bevisade påståendena kallar vi satser. En sats som en gång är bevisad kan, som vi tidigare konstaterat, utnyttjas för att bevisa andra satser. Vi kunde t.ex. dra nytta av att vi visat att summan av två jämna heltal är jämnt när vi visade att produkten av ett jämnt heltal och ett annat heltal alltid är jämnt.

Vi tar ett annat exempel. Antag att vi vill undersöka vinkelsumman i en fyrhörning. Vi kan, som vi gjorde med en triangel, först mäta vinkelsumman i ett antal fyrhörningar, beräkna summorna och formulera en hypotes som vi försöker bevisa. Men det är enklare att utnyttja det resultat vi redan visat, nämligen att vinkelsumma i en triangel är 180 grader. Om vi förbinder motstående hörn i vår fyrhörning så delas den i två trianglar och vinkelsumman i varje triangel är 180 grader enligt vad vi tidigare visat. Summan av vinklarna i en fyrhörning är alltså alltid lika med 360 grader. Genom att utnyttja ett redan bevisat påstående kan vi härleda ett nytt. Vi behöver inte börja om från början igen.

Följande fråga inställer sig: Kan vi hitta en struktur åt aritmetiken eller geometrin, de ursprungliga grenarna av matematiken, där det framgår hur de olika satserna hänger samman, vilka satser som bygger på vilka och vilken ordning de bör bevisas?

Frågan är gammal och det första exemplet på en sådan strukturerad framställning är det verk vi tidigare har hänvisat till ett antal gånger nämligen Euklides *Elementa* från 300-talet före Kristus. I den har Euklides samlat den tidens geometriska kunskaper i tretton böcker eller kapitel och gett den en struktur som har blivit modell för framställning av vetenskaplig matematik. Låt oss därför titta litet närmare på *Elementa*.

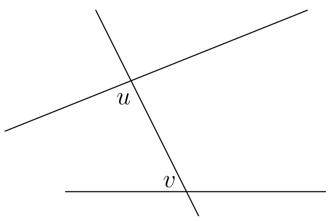
Euklides *Elementa*

Ett stilbildande verk *Elementa* lär vara en av de mest spridda böckerna alla kategorier och har varit läromedel i skolor i århundraden. Den första svenska upplagan är från 1644 och den fanns i någon form med i matematikundervisningen ända fram till 1960-talet. Den har varit stilbildande när de gäller framställning av matematik och den har givit upphov till grundläggande frågeställningar som klarlades först under början av 1800-talet och som därmed kom att ändra synen på matematiken. Vad är det då som gör *Elementa* så speciell? Det är knappast resultaten som presenteras. De var kända långt tidigare. Det Euklides gör i *Elementa* är att ge en sammanfattning av den tidens matematiska eller rättare geometriska kunskap och det är själva metodiken i framställningen som inneburit att verket fått den stora betydelse den har och har haft. Euklides, som verkade i Alexandria, var förmodligen influerad av Aristoteles, som hade angett en ideal modell för framställning av vetenskapliga resultat. Utifrån ett antal postulat, som skall vara noggrant prövade av erfarenheten, skall man med enbart logiska resonemang härleda viktiga konsekvenser av dem. Vi kan kalla en sådan framställning axiomatisk.

Innehåll och struktur *Elementa* inleds med en rad definitioner. Begrepp som t.ex. punkt, linje, rät linje, plan, vinkel och cirkel beskrivs ingående. En del av definitionerna kan för dagens matematiker verka en aning tvivelaktiga t.ex. de av punkt, linje och rät linje, men de flesta är exakta samtidigt som de svarar mot begreppens intuitiva innebörd. Definitionerna är också operationella i den meningen att de fungerar effektivt i den fortsatta framställningen.

Efter definitionerna presenterar Euklides fem axiom och fem postulat. Axiomen är av allmän natur t.ex. ”Det hela är större än sina delar” eller ”Om lika stora adderas till lika stora så blir summorna lika stora”. Postulaten handlar om de geometriska objekten och tjänar som utgångspunkten för framställningen. Fyra av dem är enkla: ”Genom två punkter kan man alltid dra en rät linje”, ”Varje rät linje kan dras ut hur långt som helst”, ”Det går att konstruera en cirkel med en given medelpunkt och med en given sträcka som radie” och ”Alla räta vinklar är lika stora”. Det femte postulatet är mer komplicerat och det ifrågasattes redan under antiken om det inte borde kunna härledas ur de fyra övriga. Det lyder:

> Om två räta linjer skärs av en tredje och summan av vinklarna som bildas på den ena sidan av den tredje linjen är mindre än två räta så skär de båda första räta linjerna varandra på denna sidan om den tredje linjen.



Figur 5: Två räta linjer bildar vinklarna u respektive v med en tredje rät linje. Vinklarna u och v är tillsammans mindre än två räta och de två förstnämnda linjerna skär varandra i en punkt till vänster om den tredje linjen.

Med postulaten som utgångspunkt bevisar nu Euklides ett stort antal propositioner eller satser. Några av satserna är konstruktioner. De enda hjälpmedel som är tillåtna vid konstruktionerna i *Elementa* är passare och linjal d.v.s man får rita cirklar med given medelpunkt och radie och man får dra räta linjer genom två givna punkter. Den första satsen är en konstruktion och lyder ”Konstruera en triangel vars alla sidor är lika långa som en given sträcka”. Förts utförs konstruktionen och därefter bevisas att den konstruerade figuren har de söka egenskaperna. I beviset får man bara använda sig av postulaten och axiomen. I nästa proposition får man förutom postulaten och axiomen också använda sig av den sats man redan bevisat. Ordningen mellan satserna är viktig. För att bevisa den fyrtionde satsen får man alltså använda sig av postulaten, axiomen och de första 39 satserna.

Elementa är ett stort verk. Det är indelat i tretton böcker eller kapitel och antalet satser eller propositioner är totalt 468. Med hjälp av propositionerna tar sig Euklides steg för steg fram mot de mer kända satserna. Den välkända Pythagoras sats är t.ex. den näst sista propositionen, nummer 47, i den första boken. Den sista propositionen, nummer 48, är omvändningen till Pythagoras sats. Det är som tidigare nämnts inte resultaten som gör *Elementa* så speciell utan det är den strikt logiska framställningen. Det krävs både skarpsinne och ett betydande arbete för att hitta en fungerande struktur och i det ingår att välja lämpliga postulat.

***Elementa* - uppskattat och avskytt** *Elementa* har under århundraden varit ett läromedel i skolor världen över. Det har varit både uppskattat och avskytt. Carl Michael Bellman tolkade nog vad många elever känt när han i sin biografi skrev

> Hjernan ännu i mig vrides
> när Jag tänker på Euclides
> på de Trianglarna,
> a b c - ock c, d, a -
> Swetten ur min panna gnides
> wärre än på Golgata.[5]

Det fanns en tid då kunskap om innehållet i *Elementa* var en självklarhet bland intellektuella. Galilei och Newton hänvisade till det i sina arbeten och förutsatte att innehållet var bekant. Einstein studerade Euklides i tolvårsåldern och lär på en en föreläsning i Oxford ha yttrat: ”If Euclid failed to kindle your youthful entusiasm, then you were not born to

[5]Citatet är hämtat ur Carl Michael Bellmams *Levernebeskrivning* från 1794. Texten återfinns på http://www.bellman.net/texter/levernes.html

be a scientific thinker."[6] Men det finns också vetenskapsmän som varit skeptiska. Ingenjören, fysikern och matematikern Oliver Heaviside, som var aktiv i slutet av 1800-talet och början av 1900-talet, lär ha yttrat:

> It is shocking that young people should be addling their brains over mere logical subtleties, trying to understand the proof of one obvious fact in terms of something equally ... obvious.[7]

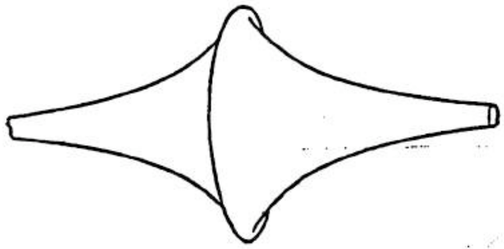
Men även om inte *Elementa* är det ideala läromedlet i matematik för många skolelever så har verket haft betydelse inom matematiken. I *Elementa* skall alla satser bevisas och i bevisen får man bara använda postulat, axiom och tidigare bevisade satser. Naturligtvis måste man också använda logiska slutledningsregler. Bevisen är centrala inom matematiken. Det är först när ett påstående bevisats inom ramen för ett vedertaget system som det är accepterat av det matematiska samhället. Det räcker inte att visa att satsen gäller i ett stort antal specialfall. Beviset måste vara generellt.

Postulaten är grundläggande för framställningen. Olika matematiska teorier baseras på olika system av postulat. En rad frågor inställer sig. Hur väljs postulaten? Är postulaten oberoende av varandra? Räcker de för att beskriva den matematiska teori som vi arbetar med? Bär postulaten på en inneboende motsägelse? Ett positivt svar på den sistnämnda frågan skulle vara katastrofalt för teorin.

En fråga som vi på sätt och vis berört tidigare är om något av postulaten är onödigt i den meningen att det kan visas med hjälp av de övriga. De femte postulatet i *Elementa* är betydligt mer komplicerat till sin natur än de fyra övriga. Redan tidigt ställdes frågan om det femte postulatet kan visas utgående ifrån de fyra andra. Under årtusenden sysselsatte detta problem många framstående matematiker. Under årens lopp omformulerades det femte postulatet på olika sätt och det visade sig bl.a. var ekvivalent med följande påstående: "Genom en given punkt utanför en given rät linje går precis en rät linje parallell med den givna." Postulatet kallas därför ibland parallellpostulatet. Utifrån de fyra första postulaten kan man visa att det går minst en rät linje parallell med den givna räta linjen genom den givna punkten. Men det var svårare att visa att det bara går en. Under första hälften av 1800-talet fann tre matematiker, Carl Friedrich Gauss, Janos Boylai och Nikolaj Lobatchevsky,

[6] Citatet är hämtat från Walter Isaacson, *Einstein. His Life and Universe.* Simon and Schuster. New York. 2007. sid 19

[7] Citatet är hämtat från MacTutors stora Internetbaserade verk om matematikens historia. Det aktuella citatet finns på http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Heaviside.html



Figur 6:

oberoende av varandra lösningen på problemet. Svaret är att det inte går att visa parallellaxiomet utgående från de fyra övriga. Det går nämligen att skapa en geometri där begreppen punkt och rät linje inte har samma betydelse som i *Elementa* och där de fyra första postulaten är uppfyllda, men där det genom en punkt utan för en given rät linje går oändligt många räta linjer som är parallella med den givna d.v.s. de skär inte den givna. Den geometrin realiseras på en s.k. pseudosfär som är avbildad i figur 6. Punkterna i geometrin är punkterna på pseudosfären och de räta linjerna är de geodetiska linjerna d.v.s. de kurvor på pseudosfären längs vilka man skall färdas för att minimera åksträckan mellan två punkter. Den nya geometrien kallas icke-euklidisk och i den är t.ex. vinkelsumman i en triangel mindre är 180 grader.

En axiomatisk framställning av aritmetiken

Vi har hittills diskuterat postulaten inom geometrin. Hur är det då med andra områden inom matematiken? Det kanske mest näraliggande är aritmetiken d.v.s. teorin för de hela talen och dess utvidgningar. Kan man hitta en lämplig uppsättning postulat för dem? Frågan uppkom under andra hälften av 1800-talet då utvecklingen av differential- och integralkalkylen hade lett till att grundläggande frågor om ”det oändligt lilla och det oändligt stora” måste klarläggas. Detta ledde i sin tur till att gränsvärdesbegreppet måste preciseras och att de reella talens natur måste undersökas. En rad matematiker ägnade sig åt dessa frågor bl.a. Karl Weierstrass som i sina föreläsningar läsåret 1859/60 vid universitetet i Berlin gjorde en systematisk genomgång av analysens grunder. Han visade att det är möjligt att utgående från de naturliga talen konstruera i ordning de hela talen, de rationella talen och de reella talen. Mest problematiskt var det konstruktionen av de reella talen utifrån de rationella. Det är emellertid de naturliga talen som utgör grunden. Den italienske matematikern Giuseppe Peano karakteriserade i arbetet *Arithmetices* *principia, nova methodo exposita* från 1889 de naturliga talen med hjälp av fem postulat. Peanos system ser ut på följande sätt

> De naturliga talen har följande egenskaper:
>
> 1. 0 är ett naturligt tal.
> 2. Varje naturligt tal har en efterföljare som är ett naturligt tal.
> 3. Två olika naturliga tal har alltid olika efterföljare.
> 4. 0 är inte efterföljare till något naturligt tal.
> 5. Antag att P är en egenskap hos naturliga tal sådan att
>   (a) 0 har egenskapen P
>   (b) varje gång ett naturligt tal har egenskapen P så har också efterföljaren den.
>
>   Då har alla naturliga tal egenskapen P.

Med hjälp av dessa postulat kan man nu definiera de fyra räknesätten och de räknelagar som gäller för dem. Den uppmärksamme läsaren känner i det femte postulatet igen induktionsprincipen. Det femte postulatet är här precis som i den euklidiska geometrin mer komplicerat än de övriga, men här är det relativt lätt att se att det inte kan härledas från de fyra övriga. Om r är ett rationellt tal så kan vi kalla $r + 1$ för efterföljaren till r. De positiva rationella talen uppfyller då de fyra första postulaten men inte det femte.

Avslutning

Att skapa ny matematik och att lösa matematiska problem kräver inte bara logiskt tänkande. Man måste också behärskar det matematiska språket och man måste ha fantasi och intuition, tålamod och koncentrationsförmåga. Arbetet går ofta i slingriga banor med associationer som ibland leder fel så att man måste backa och tänka om. Ibland leder arbetet ut i tomma intet men de gånger man ser lösningen på ett svårt problem eller ser ett oväntat samband blir man rikligt belönad.

Men det räcker inte med att tro sig ha hittat en lösning eller ett resultat. Det måste också presenteras och presentationen måste fylla kraven på matematisk stringens och struktur. Utan dem blir matematiken alltför lös i kanterna. Antaganden, som i och för sig kan varar välgrundade, räcker inte. Professor Lars Gårding uttrycker detta i en filosofisk dialog, *Metaforer*, på följande sätt:

> Matematiken utgör en sträng ram som inte släpper igenom lösa förmodanden. Sådana kan bara mycket sällan ge upphov till meningsfull matematik.

I arbetet med att skapa en logiskt sammanhängande framställning kan man hitta luckor i argumenteringen som måste täppas till och som ibland innebär att arbetet får en helt ny inriktning. Resultatet måste kanske revideras. Att skapa en lämplig struktur kräver eftertanke och fantasi. Samtidigt som presentationen måste vara logiskt uppbyggd måste man välja en väg som är enkel och där huvudidéerna blir tydliga. Arbetet med att ge framställningen en lämplig struktur och att göra den stringent blir i sig en form av matematisk problemlösning som kräver avancerade matematiska resonemang.

Låt oss återvända till Euklides *Elementa*. Låter man den vara den enda bok man läser i matematik får man med största säkerhet ett intryck av att matematiken är något avslutat. Det finns inget mer att säga. Den innehåller inga frågor och inga öppna problem. Man får inte ta del av hur de olika satserna kommit till och inte hur man kommit på bevisen. Man kan få intrycket av att Gud genom Euklides meddelat människorna några eviga sanningar på samma sätt som när han gav Moses stentavlorna med de tio budorden. Det finns heller inga kommentarer om hur man valt de fem postulaten och varför man bevisat satserna i den ordning som gjorts. Framställningen är klinisk.

Elementa har fått stå modell för åtminstone skriftlig presentation av matematik. Även om framställningen inte behöver vara lika klinisk som hos Euklides så skall den vara deduktiv. Resultaten skall bevisas och de skall presenteras i en strängt logisk ordning. Den process som föregått den slutliga framställningen beskrivs nästan aldrig. Kanske skulle det bli förvirrande för läsaren att ersätta den deduktiva framställningen med en beskrivning av hur författaren kommit fram till sina resultat. Men en sådan framställning skulle kanske göra matematiken mer levande och i beskrivningen av processen kan frågor ställs som kan ge upphov till nya problem och som utvecklar teorin. Diskussioner kring den historiska utvecklingen av matematiska begrepp kan ge dem andra perspektiv och fördjupa förståelsen.

Det finns också mer principiella invändningar mot möjligheterna att skapa en obestridlig framställning av en matematisk teori. År 1961 publicerade den ungerske matematikern Imre Lakatos sin doktorsavhandling *Proofs and refutations.* I den kritiserar han uppfattningen om matematiken som en vetenskap där resultaten är ovedersägliga sanningar. Varje sats och varje bevis innehåller, hur man än anstränger sig, språkliga otydligheter. Genom att utnyttja dem kan man hitta motexempel som visar att satsen eller beviset inte gäller. Motexemplen är valda så att tolkningen av texten inte svarar mot den betydelse som från början avsetts och som i sammanhanget är naturlig. Ett motexempel blir någon form av monster som kräver att begrepp preciseras eller att satser eller bevis omformuleras. På det sättet kan nya samband upptäckas och den matematiska teorin fördjupas. Nya motexempel skapar nya frågeställningar. I en ständigt pågående diskussion förändras perspektiven och kreativiteten sätts hela tiden på nya prov. Teorin bli aldrig avslutad.

Matematiken har två ansikten. Det ena är öppet och speglar en vilja att pröva nya idéer där man med fantasins hjälp kan överskrida etablerade gränser. Det andra är kritiskt granskande och söker inordna resultat i strängt logiska system. Att finna en balans mellan dessa båda perspektiv är en av huvuduppgifterna både för forskare i matematik och för matematiklärare på alla nivåer.

Litteratur och noter

Stora delar av framställningen i kapitel 1 bygger på några klassiska verk nämligen

- Platon. Skrifter. Bok 6. *Brev 7. Från Platon till Dions närstående och anhängare med tillönska om ett gott liv.*. Atlantis. Stockholm. 2009. sid 245-281

- Galileo Galilei. *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*
  Jag har använt den svenska översättning som finns i bokverket *Sigma. Band 2* sidorna 461-495. Verket som helhet finns i svensk översättning utgiven av bokförlaget Atlantis, Stockholm.2005.

- Brevväxling mellan Pascal och Fermat om hasardspel
  Jag har använt engelsk översättning som finns på Internet under http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf.

- Robert Record. *Om nyttan av aritmetik* och *The Whetstone of Witte*.
  Om nyttan av aritmetik finns i bokverket *Sigma. Band 1* sidorna 160-165. *The Whetstone of Witte* finns tillgänglig på Internet under https://archive.org/details/TheWhetstoneOfWitte.

Två skrifter matematikdidaktiska skrifter spelar också en stor roll nämligen

- Inger Wistedt och Mats Martinsson, *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling* Stockholms universitet. Pedagogiska institutionen.1994

Jag har använt en av de fyra samtal som ligger till grund för undersökningen. Samma författare har också publicerat flera arbeten med reflektioner kring elevsamtal t.ex.

- Tomas Bergqvist, *To Explore and Verify in Mathematics* Umeå universitet, Department of Mathematics, Doctoral Thesis No 21, 2001.
  Jag har använt en av de fyra dialoger som används i avhandlingen.

Ett arbete som spelat stor roll för framställningen i kaptel 1 är Anette Jahnke *Skolans och förskolans matematik. Kunskapssyn och praktik*, Studentlitteratur.2016. Där mötte jag för första gången de arbeten av Platon som en stor del av framställningen bygger på.

I det andra kapitlet spelar naturligtvis Euklides *Elementa* en stor roll. Den finns i sin helhet på Internet under
http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html.
De olika aspekterna på bevis finns i Kirsti Hemmi, *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*, Department of Mathematics, Stockholm University, 2006.

I avslutningen hänvisas till Imre Lakatos, *Bevis och motbevis*, Bokförlaget Thales, Stockholm. 1990.

Biografiska data är huvudsakligen hämtade från Mac Tutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Litteraturförteckning

Aristoteles, *Organon* Tillgänglig på http://www.constitution.org/ari/aristotle-organon+physics.pdf

Aurelius, A (1614/1994) *Aritmetica eller en kort och enfaldigh räknebok uthi heel och bruten taal* med förord av Bengt Johansson. Föreningen för svensk undervisningshistoria. Uppsala.
Tillgänglig på http://ncm.gu.se/media/ncm/dokument/aurelius.pdf

Bellman, C.M. (1794) *Levernebeskrivning.* 1794.
Tillgänglig på http://www.bellman.net/texter/levernes.html

Brevväxlingen mellan Pascal och Fermat.
Tillgänglig på http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf.

Bergqvist.T, (2001) *To Explore and Verify in Mathematics* Umeå universitet, Department of Mathematics, Doctoral Thesis No 21.

Cardano. G, (1664/2015) *A Book on Games of Chance.* Engelsk översättning. Dover Publikations. New York.

Chuquet, N (1485/1889) , *Le Triparty en la science des nombres.* Extrait du bullettino de bibliografia e di storia della scienze matematiche e fisiche. Rome. 1889 Tillgänglig på
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62599266/f13.item.r=.langFR.zoom.

Euclides *Elements*, Tillgänglig på
http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html.

Galilei, G, (1632/1993)*Dialoger rörande världens två huvudsystem – det Ptolemaiska och det Kopernikanska.* Atlantis i samarbete med italienska kulturinstitutet.1632/1993

Galilei, G (1638/1959) *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*, Sigma.Band 2. s 461-495

Galilei, G (1638 /2005) *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*, Atlantis. Stockholm.

Gårding, L (2002) *Metaforer*, Dialoger, 62/02, Vetenskap och konst II, Dialoger Förlag och Metod AB. Stockholm.

Hemmi, K (2006) *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*, Department of Mathematics, Stockholm University,

Isaacson, W (2007) *Einstein. His Life and Universe.* Simon and Schuster. New York. 2007.

Jahnke, A (2016) *Skolans och förskolans matematik. Kunskapssyn och praktik*, Studentlitteratur.

Kilpatrick, J, Swafford, J and Findell, B, editors. (2001) *Adding + it up. Helping Children Learn Mathematics.* The National Academies Press. Tillgänglig på http://www.nap.edu/read/9822/chapter/1

Kommentarmaterial till kunskapskraven i matematik. Skolverket. Tillgänglig på
http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser
/grundskoleutbildning/grundskola/matematik

Lakatos, I (1990) *Bevis och motbevisa*, Bokförlaget Thales, Stockholm. 1990.

von Linné, C (1632/1735) *Systema naturae: sive regna tria naturae systematice proposita per classes, ordines, genera, et specie.* 1735. En engelsk översättning finns tillgänglig på
https://www.kth.se/polopoly_fs /1.199546!/Menu/general
/column-content/attachment/Linnaeus–extracts.pdf
Mac Tutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Newton, I (1686), *Philosophiae Naturalis Principia MathemATICA*. London.

Norstedts svenska synonymordbok (2009), Norstedts.

Niss, M och Höjgaard-Jensen, T (2001) *Kompetencer och matematillæring.* Köpenhamn. Undervisningsministerier.
Tillgänglig på http://pub.uvm.dk/2002/kom/

Pacioli, L (1494) *Summa de Arithmdetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* Venetia. En engelsk översättning finns tillgänglig på http://jeremycripps.com/docs/Summa.pdf

Pascal, B (1665) *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Tillgänglig på http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012

Peano,G (1889) *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Fratres Bocca. Rom/Florens. Tillgänglig på
http://www.archive.org/stream/arithmeticespri00peangoog♯page/n14/mode/2up

Platon. (2009) *Skrifter. Bok 6.* Atlantis. Stockholm. sid 245-281.

Polya, G(1945/2014) *How to solve it?* Princeton University Press,

Recorde, R (1543/1959) *En deklaration om nyttan med aritmetik*, Sigma. Band 1. s 160-165.

Recorde, R (1557) *The Whetstone of Witte*. Tillgänglig på https://archive.org/details/TheWhetstoneOfWitte.

Recorde, R (1543/1618) *The Ground of Arts.*
Tillgänglig på https://books.google.com.

Singh, S (1998) *Fermats gåta.* Norstedts. 1998

Swetz. F, Fauvel. J, Bekken. O, Johansson. B, och Katz. V (editors) (1995) *Learning from the masters*, The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. and Smith, D. E. (1987) *Capitalism and Arithmetic: The New Math och the 15th century- Including the Full Text of the Treviso Arithmetic of 1478.* Open Court Publishing Company.

Wistedt, I och Martinsson, M (1994) *Kvaliteter i elevers tänkande över en oändlig decimalutveckling* Stockholms universitet. Pedagogiska institutionen.

Detta är den andra titeln i **NCM**:s nya skriftserie om matematikutbildning. I serien ryms texter som behandlar olika aspekter av matematikutbildning, där författarna står för innehållet under NCM:s redaktionella granskning. Tanken med denna skriftserie är att erbjuda ett forum för texter kring matematikundervisning som författare vill göra tillgängliga för alla.

Anders Tengstrand har skrivit en intressant och innehållsrik text om matematiska resonemang. Han riktar sig främst till blivande och aktiva lärare i grundskolans senare del och i gymnasieskolan. Texten tar bland annat sin utgångspunkt i matematikens historia. Författarens förhoppning är att den ska väcka angelägna frågor och locka till diskussion. Texten ger ett värdefullt bidrag och bör läsas av alla som intresserar sig för matematiska resonemang.

NCM

Nationellt centrum för matematikutbildning
vid Göteborgs universitet

ISBN 9789185143344