ADVENTSKALENDER 2022
FACIT

1. Tomten ska dela ut paket och vill börja med de orter som har ett namn som innehåller ett tal eller siffra. Orten som Tomten börjar dela ut i är Tvååker. Kan du komma på fler platser som har nummer i sina namn som Tomten kan fortsätta till? Hur många kan ni komma på tillsammans?

   Här finns det många orter att välja bland, några är Enköping, Tullinge, Trehörna, Fyrås, Femundshytta, Sexdrega, Sjuntorp ... Hittar ni några utländska orter?

2. När tomtenissan Juli är dubbelt så gammal som hon är nu kommer hon att vara tre gånger så gammal som hon var för tre år sedan. Hur gammal är tomtenissan Juli nu?

   Åldern när hon är dubbelt så gammal som nu måste vara ett tal som är delbart med både 2 och 3.
   6 år fungerar inte eftersom $3 \cdot 0 = 0$
   12 år fungerar inte eftersom $3 \cdot (6 - 3) = 9$
   18 år däremot stämmer bra: $18 = 3(9 - 3)$
   Alltså är Juli 9 år nu.
   Algebraisk lösning: $2x = 3(x - 3)$, lösning $x = 9$.

3. Längden på Tomtens renspann är 20 meter plus halva dess längd. Hur långt är renspannet?

   20 m måste vara halva längden, det vill säga hela ekipaget är 40 m.
   Algebraisk lösning: $20 + 0{,}5x = x$ med lösning $x = 40$ m.

4. Julius kastar tre tärningar. När de tre talen på tärningarna multipliceras blir produkten 90. Vilka är talen på tärningarna?

   Julius primtalsfaktoriserar talet 90,
   $90 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$
   Han har tre vanliga tärningar med siffrorna 1–6 på sidorna, vilket resulterar i att den enda lösningen är 3, 5, 6.

5. Tomten och nissen Olof väger tillsammans 90 kg. Tomten och julgrisen väger tillsammans 70 kg. Nissen Olof och julgrisen väger tillsammans 40 kg. Hur mycket väger var och en av dem?

   Vi kallar Tomten för T, nissen Olof för O och julgrisen för J.
   $T + O = 90$ kg
   $T + J = 70$ kg
   Lägger vi ihop det första och andra uttrycket får vi $2T + O + J = 90 + 70$
   Men sista påståendet i problemet ger att $O + J = 40$ kg så $2T$ måste vara 120, och $T = 60$. Vidare blir då $O = 30$ och $J = 10$.

   När vi har valt problemen låter vi flera lösa dem för att se att formuleringar är tydliga och att vårt facit stämmer. Sen ”julifierar” vi åtminstone några av problemen och låter tomtefamiljen få sätta sin prägel på adventskalendern. Då vi hade skickat kalendern till tryck kom vi att tänka på att detta problem av den anledningen blev lite för orealistiskt när Tomtens, en tomtenisses och en julgris vikt ska bestämmas. Korrekt lösning ger att de nog väger i minsta laget. Om de ingående värdena i problemet fördubblas blir det mer realistiskt, även om grisen fortfarande är i magraste laget.

   Låt gärna eleverna försöka sätta nya värden på Tomtens, tomtenissens och grisen vikt så de blir helt realistiska.

6. Det första udda talet är 1. Vilket är det hundrade udda talet?

   Vartannat tal är udda, det vill säga 199 blir det hundrade udda talet.

7. Använd siffrorna 1, 2, 3, 4 och 5 en gång var. Gör två tal som när de multipliceras ger ett så stort tal som möjligt.

De båda talen som bildas av siffrorna 1, 2, 3, 4 och 5 bör vara ett tvåsiffrigt och ett tresiffrigt tal.
Vi kan kalla talen för ABC och DE. Vi vill att $ABC \cdot DE$ ska vara så stort som möjligt.
Produkten $ABD \cdot DE$ kan då skrivas: $(A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1) \cdot (D \cdot 10 + E \cdot 1)$
De delprodukter vi får att addera är:
$A \cdot D \cdot 1000$
$A \cdot E \cdot 100$
$B \cdot D \cdot 100$
$B \cdot E \cdot 10$
$C \cdot D \cdot 10$
$C \cdot E \cdot 1$
Vi vill att $A \cdot D$ ska vara så stort som möjligt eftersom de utgör tusentalen.
Alltså är $A = 5$ och $D = 4$ eller $A = 4$ och $D = 5$
Vi vill att $C \cdot E$ ska vara så litet som möjligt eftersom de utgör entalen.
Alltså är $C = 1$ och $E = 2$ eller tvärtom. Eftersom E förekommer bland hundratalen och C som högst bland tiotalen vill vi ha $E = 2$ och $C = 1$.
Endast 3 återstår vilket innebär att $B = 3$
Nu tittar vi på hundratalen som utgörs av $A \cdot E + B \cdot D$. Vi testar de olika varianterna som kan förekomma med $E = 2$ och $B = 3$
$A = 5, D = 4$ $\quad 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 10 + 12 = 22$
$A = 4, D = 5$ $\quad 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 8 + 15 = 23$
Slutsatsen är att det största talet bör ha $A = 4$ och $D = 5$
Vi får talen 431 och 52 med produkten $431 \cdot 52 = 22412$

8. I tomteverkstadens kök finns det 11 skåp. En del har en dörr, andra har två dörrar. Det finns 15 dörrar. Hur många skåp med två dörrar finns i köket?

Alla skåp kan omöjligt ha endast en dörr, då skulle antalet dörrar vara 11. Det blir 4 dörrar över, alltså har fyra skåp två dörrar.

9. Kan du få talet 2000 genom att addera konsekutiva tal?

”Konsekutiva” betyder på varandra följande tal, och om vi ska ha sådana tal som tillsammans blir 2000, som är ett jämnt tal, måste det vara ett udda antal tal i följd (två tal efter varandra är alltid ett jämnt och ett udda, vilket blir en summa som är udda).
Om det är tre tal i följd måste det bli som medeltal runt 2000/3 , det vill säga ungefär 667, och ett förslag är då $665 + 666 + 667 = 1998$. Då fattas det två till 2000, men nästa taltrippel är då $666 + 667 + 668 = 2001$ vilket är för stor.
Vi då tar fem tal i rad och tittar på medeltalet $2000/5 = 400$. Talen ska alltså ligga runt 400. Då kan vi få den korrekta summan genom $398 + 399 + 400 + 401 + 402 = 2000$.

10. Vid ett tillfälle under uppväxten var tomtesysterns ålder fem gånger tomtebroderns ålder. Senare var den fyra gånger och ännu senare tre gånger hans ålder. Nu är hon dubbelt så gammal som brodern. Hur gamla är de båda nu?

Vi börjar med lägsta ålder på systern och prövar oss systematiskt fram:

År	Syster	Bror	
År 0	1 år	5 år	5 gånger så gammal
År 1	2 år	6 år	3 gånger så gammal

Det finns inget alternativ med 4 gånger så gammal.

År	Syster	Bror	
0	2 år	10 år	5 gånger så gammal
1	3 år	11 år	
2	4 år	12 år	3 gånger så gammal

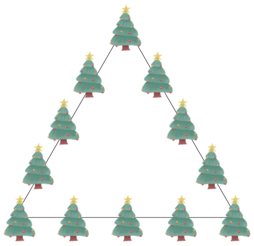
Det finns inget alternativ med 4 gånger så gammal.

År	Syster	Bror	
0	3 år	15 år	5 gånger så gammal
1	4 år	16 år	4 gånger så gammal
2	5 år	17 år	
3	6 år	18 år	3 gånger så gammal
4	7 år	19 år	
5	8 år	20 år	
6	9 år	21 år	
7	10 år	22 år	
8	11 år	23 år	
9	12 år	24 år	2 gånger så gammal

Nu är syskonen alltså 12 år och 24 år.

11. På ett triangulärt torg i staden står en julgran i varje hörn och det är fem julgranar längs varje sida av torget. Hur många julgranar finns det sammanlagt?

Svar: 12 granar.



12. Om den femte november infaller en lördag, vilken veckodag är det då på julaftonen det året?

November har 30 dagar. Det är 25 dagar kvar i nov och sedan 24 till julafton. Det blir 49 dagar.
Varje vecka är 7 dagar lång så efter 7 veckor har det gått 49 dagar och det är precis ett helt antal veckor så det blir återigen lördag.

13. Lucia skriver alla tal från 0 till 600. Hur många gånger skriver hon siffran 5?

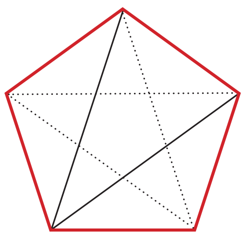
I talen 0–100 finns femman med i 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85, 95. Det blir totalt 20 femmor. På samma sätt blir det för varje hundratal, vilket ger 100 stycken femmor. Alla tal mellan 500 och 599 börjar på en femma. De är totalt 100 stycken. Allt som allt finns det alltså 200 femmor.

14. En ljusslinga blinkar var sjätte minut och en klocka ringer var åttonde minut. Plötsligt händer det att slingan blinkar och klockan ringer samtidigt. Hur lång tid tar det tills det händer igen?

Vi måste hitta minsta gemensamma multipel för talen 6 och 8. Talet 24 finns i båda talens multiplikationstabell, $6 \cdot 4$ och $8 \cdot 3$. När slingan blinkar sin fjärde gång och klockan ringer sin tredje gång så sker det samtidigt. Detta är efter 24 minuter.

15. Julle ritar en femhörning och drar slumpmässigt två diagonaler. Hur stor är sannolikheten att diagonalerna inte skär varandra?

Här har vi utgått från en konvex femhörning och vi kan rita totalt 5 diagonaler.
Endast i två fall skär de inte varandra, det vill säga sannolikheten är 2/5.



16. Vi har sju heltal vars medelvärde, median, typvärde och variationsbredd är 7. Vilket är det minsta tal som kan finnas bland dessa sju tal?

Det kan inte vara bara en sjua, eftersom typvärdet ska vara sju. Därför utgår vi från att det är minst två sjuor.
Med två sjuor ska de övriga talen (som även kan innehålla ytterligare sjuor) ha summan 35 (eftersom alla talen måste ha summan 49 för att medelvärdet ska bli sju).

Och vi har $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=35$

Och $n_5-n_1=7$

Om vi bildar den lägsta möjliga summan av de mellanliggande talen $n_2+n_3+n_4$ respektive den största möjliga summan av dessa tal för varje värde på n_1 så ska talet 35 finnas i detta intervall för att det lägsta talet ska kunna ge en lösning på problemet.

Vi börjar med $n_1=1$ och prövar oss fram till allt högre värden.

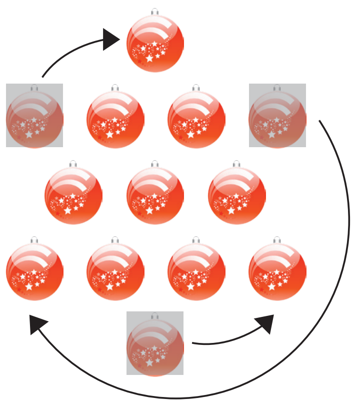
		$n_2+n_3+n_4$	$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$		
n_1	n_5	min	max	min	max
1	8	$2+3+4$	$7+7+8$	18	31
2	9	$2+3+7$	$7+9+9$	23	36
		$3+4+5$	$7+8+9$	23	35

Det minsta värdet kan lägst vara 2.

17. På tallinjen ligger talet x fyra gånger så långt från 33 som från 15. Vilket är talet x?

Antingen ligger talet mellan 15 och 33 eller så ligger talet innan 15.
Mellan 15 och 33 är det 18. Om talen ligger mellan 15 och 33 kan vi dela upp 18 i 5 delar, $18/5=3{,}6$. Då blir talet $15+3{,}6=18{,}6$.
Om det ligger innan talet 15 kan vi dela upp $33-15$ i 3 delar. Varje del blir 6. Alltså är då talet $x=15-6=9$.
Det finns alltså två svar på problemet, 9 eller 18,6.

18. Flytta tre julkulor så att triangeln hamnar upp och ner.



19. Hur mycket blir $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ om man fortsätter tillräckligt länge?

Svar: 2. Låt exempelvis eleverna prova med en miniräknare och se att svaret kommer allt närmare 2.

Det är också möjligt är att övertyga sig om att svaret är 2 genom att programmera och låta datorn räkna ut en allt längre del av följden.

Om man vill ha ett mer matematiskt formellt bevis behövs lite mer avancerad matematik:
Ett sätt att hantera problemet med mer formell matematik, det vill säga med gränsvärden, är att observera att om man tar summan och låter sista termen vara $1/2N$ och sedan lägger till $1/2N$ till, då blir summa hela tiden exakt 2. Till exempel $1+1/2+\ldots 1/16+1/16=2$. Detta går att motivera både tekniskt och praktiskt. Låt nu S_N vara summan (delsumman) med sista term $1/2N$ och låt S vara hela den oändliga summan. Vad skulle det

betyda att $S = 2$? Man kan inte för hand eller ens med dator ta med oändligt många termer. Men man kan se att $S_N < S$ för alla val av N (och att S_N växer med N). Kan det möjligen vara så att $S < 2$? Då är $2 - S > 0$. Det vill säga om man låter t beteckna $2 - S$ så är t något givet tal som är större än 0.

Men $2 - S_N = 1/2N$ är enligt vårt tidigare resonemang Sn + ”en sista extra kvarvarande halva” vilket är lika med 2.

Så $0 < t = 2 - S < 2 - S_N = 1/2N$

t skulle alltså vara ett tal som samtidigt är större än 0 men mindre än $1/2N$ för vilket val av N som helst. Något sådant tal finns inte. För tänk om t exempelvis är en tusendel, 1/1000. Då kunde man bara välja $N = 1000$ och en tusendel är *större* än en tvåtusendel, tvärtemot antagandet. Därför måste $2 - S = 0$, det vill säga $2 = S$.

Man kan säga att detta resonemang visar att S_N kan göras så nära 2 som man önskar, om man bara tillåter N vara tillräckligt stort. Detta är matematiskt detsamma som att $S =$ ”S_N med $N =$ oändligheten” = 2.

Resonemanget ovan är en beskrivning av hur man matematiskt kan formalisera en idé om hur man kan hantera oändligt många oändligt små tal i matematiken.

Är det alltid så att summan av allt mindre sådana stambråk blir något tal? Nej, $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$, den så kallade harmoniska serien, går mot oändligheten, det vill säga den kan bli hur stor som helst bara man tar med tillräckligt många termer.

20. En undersökning i tomteverkstan redovisades på följande sätt.

Antal tomtenissar	100
Nissar som dricker kaffe	78
Nissar som dricker te	71
Nissar som dricker både kaffe och te	48

”Det kan inte stämma”, sa Tomten. Varför?

Summerar man antalet som blev tillfrågade så blir summan 101, $78 + 71 - 48 = 101$. Men det skulle ju bara vara 100!

21. Placera in talen 1–8 i rutorna så att alla uträkningar blir korrekta. Alla tal från 1–8 ska användas och följaktligen får inget användas två gånger!

Det finns fyra olika lösningar på problemet.

8	−	6	=	2
−				+
7				3
=				=
1	+	4	=	5

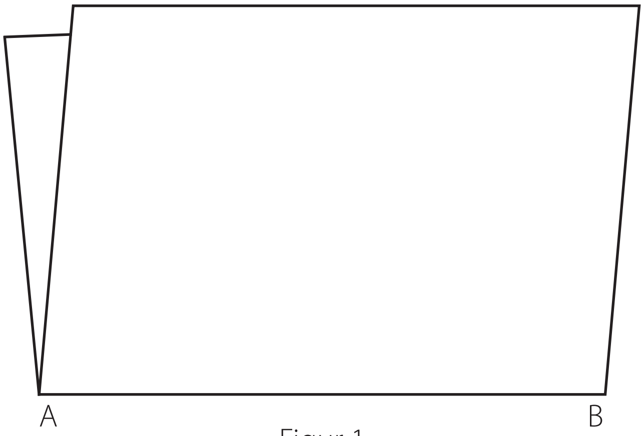
8	−	2	=	6
−				+
5				1
=				=
3	+	4	=	7

7	−	1	=	6
−				+
4				2
=				=
3	+	5	=	8

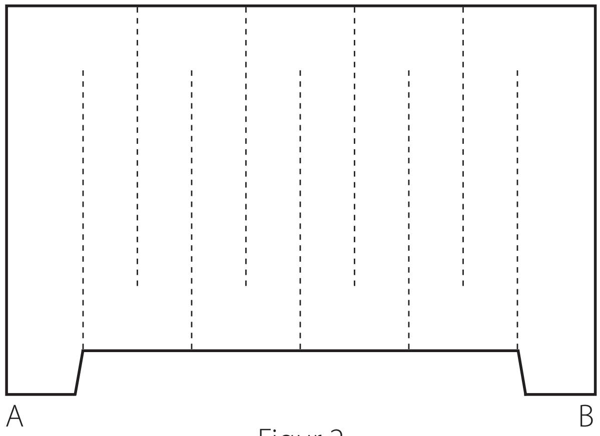
5	−	3	=	2
−				+
4				6
=				=
1	+	7	=	8

22. Tomten funderar: Jag har ett pappersark som är 15 x 21 cm. Går det att klippa ut ett hål i det som en vuxen person som jag kan krypa igenom?

Ja, det gör det. Vik först pappret längs mittlinjen AB som i figur 1. Klipp därefter ut ett jack som i figur 2 och gör ett antal snitt (de streckade linjerna). Vik sedan ut pappret igen. Klart!



Figur 1



Figur 2

23. Tomten har ett kvadratiskt presentpapper med sidan 140 cm. Men han skulle behöva fem kvadratiska papper med sidan 50 cm för att slå in julklappar. Hur är detta möjligt utan att behöva skarva några papper?

Se bild för ett exempel på lösning.

24. Hur många barr har en julgran?

Detta problem är ett så kallat Fermiproblem. Det går att läsa om sådana problem i bland annat Nämnaren, sök på orden Fermi och Fermiproblem på Nämnarens fulltextsökning.