Jonas Hall & Thomas Lingefjärd

Differentialekvationer och komplexa tal med GeoGebra

Författarna som vid det här laget är väl kända för Nämnarens läsare ger här ytterligare konkreta förslag på hur GeoGebra kan användas i matematikundervisningen. Denna gång berör matematikinnehållet de senare kurserna i gymnasieskolan.

Differentialekvationer och komplexa tal kom under 1900-talet in i den svenska gymnasieskolan och utgör på sätt och vis den slutliga kompetensen av många gymnasisters matematiska färdigheter och förståelse av matematik. Både teknisk färdighet och kognitiv förståelse sätts på prov. Den visualisering som är möjlig med dagens teknik gör att elever kan se och undersöka matematiska områden och begrepp på ett sätt som förut var omöjligt. Forskning om lärande i matematik är entydig med att visualisering och interaktivitet är starkt kopplade till ökad förståelse av matematik, förståelse som möjliggörs av programvara som exempelvis GeoGebra.

I gymnasieskolan återfinns numera komplexa tal i kurs 4 och differentialekvationer i kurs 5. GeoGebra kan hjälpa oss att illustrera och levandegöra dessa två områden som eleverna kanske ofta uppfattar som svåra, både begrepps- och beräkningsmässigt. Att se hur komplexa tal visuliseras eller hur riktningsfält och lösningsfunktioner uppträder då parametrar ändras dynamiskt kan leda till intressanta frågeställningar. När de tas upp till diskussion kan det ge eleverna en helt annan insikt än då de bara får konstatera hur en lösning uttrycks som ett algebraiskt resultat eller som en algebraisk funktion.

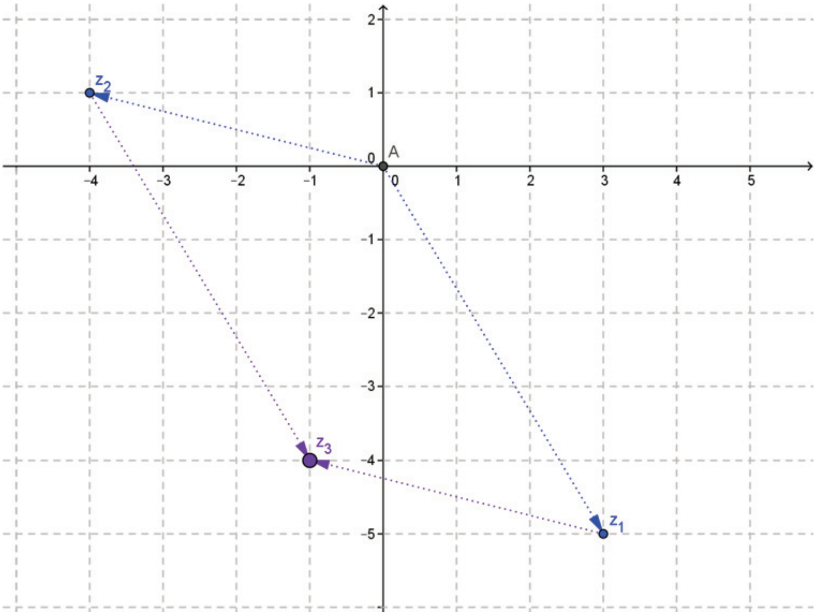
Andra verktyg, exempelvis WolframAlpha, kan också hjälpa oss att lösa problemen men så vitt vi känner till finns inget annat kostnadsfritt verktyg än GeoGebra som så enkelt kan lösa problemen dynamiskt.

Det finns heller ingen uppenbar begränsning av vilka frågeställningar om komplexa tal som kan tas upp eller vilka typer av differentialekvationer som kan behandlas, varken i kursplanen eller i GeoGebra. Det går således utmärkt att studera betydligt mer intressanta problem än de som vi tvingas begränsa oss till med papper och penna. Exempelvis kan vi relativt enkelt lösa system av ickelinjära differentialekvationer där vi har flera interagerande tillståndsvariabler, något som inte behandlas algebraiskt förrän en bit in i universitetsstudierna, men som nu kan studeras interaktivt av gymnasieelever.

På kommande sidor presenterar vi förslag på GeoGebraaktiviteter som behandlar komplexa tal och differentialekvationer.

Komplexa tal

Öppna GeoGebra, mata in $3-5i$ och tryck på enter så skapas det komplexa talet $z_1=3-5i$. Mata sedan in $-4+i$ som då får namnet z_2 och därefter additionen $z_3=z_1+z_2$ vilket ger $z_3=1-4i$. Observera att z_1 och z_2 är dynamiska och lätt går att flytta eller omdefiniera. Om vi gör det kommer z_3 att beräknas igen och placeras på ett nytt ställe. Vi kan också enkelt åskådliggöra den vektoriella kopplingen till visualiseringen.



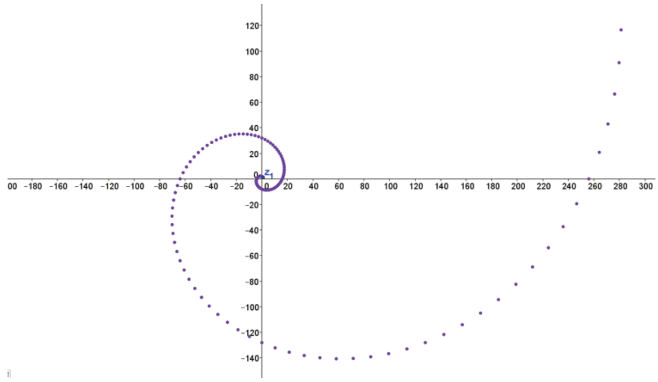
Dynamiska komplexa tal

Den här konstruktionen kan upprepas för multiplikation av komplexa tal genom att vi skapar talet $z_4=z_1\cdot z_2$. Elever brukar snabbt upptäcka vinkelsambandet. De kan efter lite experimenterande även upptäcka sambandet mellan absolutbeloppen och därefter formulera sambandet

$$(r_1, \theta_1)\cdot(r_2, \theta_2)=(r_1\cdot r_2, \theta_1+\theta_2)$$

Detta samband är vackert i sin enkelhet men lyser med sin frånvaro i svenska läromedel till förmån för formuleringar i ren polär eller trigonometrisk form.

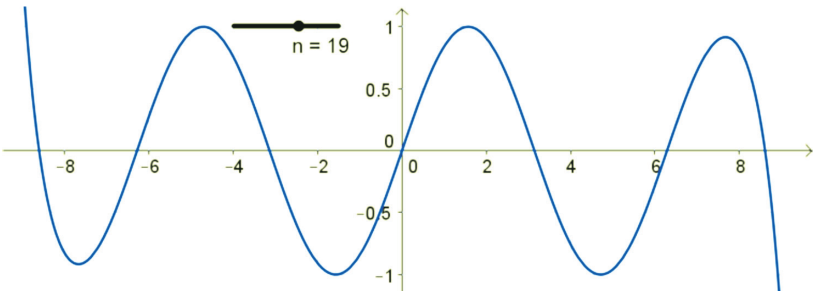
Om vi startar ett nytt fönster och återigen matar in $1+i$ som z_1 och dessutom skapar en glidare n som vi låter löpa från 1 till 25 kan vi studera vad som händer om vi bildar $Z=z^n$. Det hade varit så gott som omöjligt utan ett digitalt verktyg. Vi markerar Z med ny färg och slår på spårning med höger musknapp. Slutligen animerar vi glidaren n och får följande bild.



En komplex spiral

Vi kan skapa den kompletta komplexa spiralen med hjälp av att välja verktyget geometrisk ort varefter vi först klickar på talet Z sedan på talet n. Om vi nu markerar talet z_1 och använder piltangenterna för att ändra talet kan vi se effekterna på spiralen.

För många elever framstår säkert Eulers formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ som ren magi – helt tagen ur luften. Den kan troliggöras genom att studera så kallade Taylorutvecklingar. Först kan vi visa vad en Taylorutveckling är genom att skapa en heltalsglidare n i ett nytt fönster och sedan mata in kommandot Taylorutveckling[sin(x), 0, n].

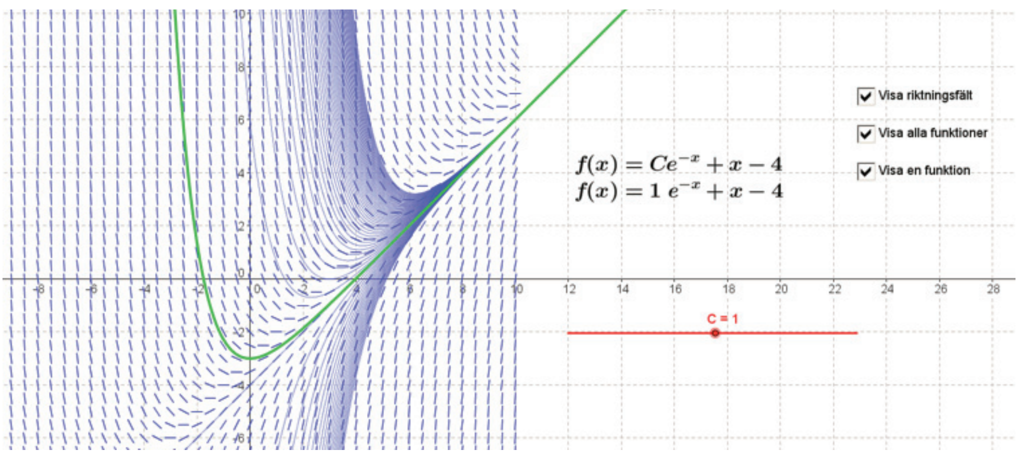


Dynamisk Taylorutveckling av sin(x)

Genom att variera n får eleverna en tydlig bild av vad som händer. Därefter kan de få övertyga sig om att formeln gäller genom att studera Taylorutvecklingarna för sin(x), cos(x) och e^x till något bestämt gradtal, samt därefter ersätta x med $i\theta$ i polynomen.

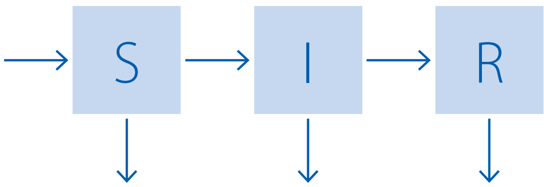
Differentialekvationer

I nästa figur ser vi ett exempel på en lösning av en linjär icke-homogen differentialekvation av första ordningen. Den exakta klassificeringen spelar mindre roll då vi löser differentialekvationer med GeoGebra. Vi kan åstadkomma en lösning dels genom att skapa ett riktningsfält med kommandot Riktningsfält[-y + x – 3], dels genom att skapa en lösning med kommandot LösODE[-y + x – 3]. Detta genererar en specifik lösning med en integrationskonstant som sedan kan visas som en glidare. Fler lösningskurvor kan åskådliggöras genom att sätta på spårning på lösningen och variera glidaren.



Visualisering av riktningsfält, här för differentialekvationen dy/dt = -y + t – 3

GeoGebra klarar även av numeriska lösningar av icke-linjära system av differentialekvationer. Den så kallade SIR-modellen för infektioner bygger vi upp genom att studera tre "lådor" som var och en innehåller ett visst antal individer som betecknas som mottagliga (susceptibles, S), infekterade (infectivs, I) och återställda (recovered, R).



SIR-modellen för infektioner

Vi antar att sjukdomen i fråga är sådan att man får immunitet mot sjukdomen när man har haft den. Om sjukdomen inte är dödlig kan vi ignorera den nedåtgående pilen från I-lådan. Om sjukdomsförloppet är snabbt jämfört med en livstid kan vi ignorera födslar (pilen in mot S-lådan) och övriga dödsfall (nedåtgående pilar). Kvar blir då endast pilarna mellan lådorna.

Det här är en mycket vanlig metod för att ställa upp differentialekvationer men har inte tidigare undervisats på gymnasiet därför att det leder till system av differentialekvationer som är svåra att lösa för hand.

Hastigheten med vilken man smittas (i personer per tidsenhet) är proportionell mot både antalet smittobärare, I, och antalet mottagliga, S. Kalla proportionalitetskonstanten för β. Proportionalitetskonstanten som styr med vilken hastighet man återställs med kan vi kalla γ. Genom att på detta sätt resonera kring förändringar kan vi nu ställa upp följande tre ekvationer till höger. I GeoGebra skapar vi en lösning genom att först definiera derivatorna som flervariabelfunktioner:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta IS \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

Sprim(t, S, I, R) = $-\beta$ I S (acceptera att skapa glidare för β)

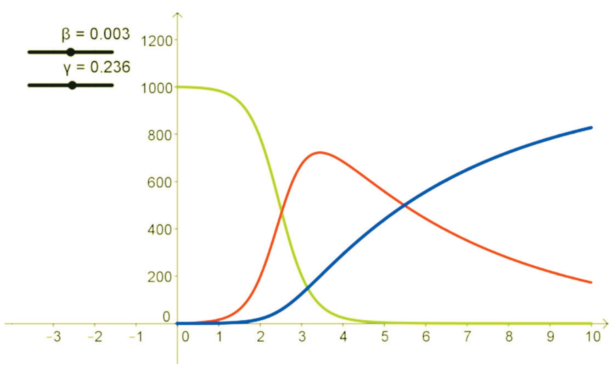
Iprim(t, S, I, R) = β S I $-$ γ I (acceptera att skapa glidare för γ)

Rprim(t, S, I, R) = γ I

Därefter löser vi systemet med kommandot

NLösODE[{Sprim, Iprim, Rprim}, 0, {1000, 1, 0}, 10]

Kommandot har alltså fyra parametrar: en lista över derivator, ett startvärde för den oberoende variabeln, en lista över startvärden för funktionerna och ett slutvärde för den oberoende variabeln. Vi har här antagit att en befolkning på 1000 friska individer får besök av en enda smittbärare. Efter att ha färglagt de olika lösningskurvorna och lekt med parametrarna β och γ får vi ett resultat.



GeoGebra löser ett system av differential-ekvationer

Som en fördjupning överlåter vi åt läsaren att ställa upp ekvationerna då vi har en endemisk epidemi som lever kvar i befolkningen under lång tid. Vi kan då inte bortse från födslar och dödsfall och behöver representera även dessa faktorer med matematiska termer. Om vi antar att populationen är konstant och att sjukdomen inte är dödlig räcker det med en enda parameter till, a, för att beskriva dessa nya ekvationer. Ställ upp ekvationerna och lös dem. Studera vad som händer över lång tid. Förklara även det du ser.

Att på det här sättet fundera över mer realistiska problem, ställa upp differentialekvationerna, anpassa parametrar och undersöka lösningarnas egenskaper ger troligtvis djupare förståelse för matematiken än att enbart träna in mekaniska procedurer. Vi beräknar inte längre kvadratrötter för hand och vare sig lärare, elever eller samhället i övrigt beklagar nog detta faktum. Kanske det har blivit dags att göra en omställning även för lösning av differentialekvationer?

Du finner länkar till hur du använder GeoGebras kommandon och till de konstruktioner som förekommer här i artikeln på Nämnaren på nätet.

Vilseledande om svensk matematikutbildning

Skolans matematikundervisning har fått mycket uppmärksamhet i tidningar, radio och tv den senaste tiden. Det beror förstås på fortsatta rapporter om att svenska elevers kunskaper i matematik inte är vad många menar att de borde vara, och dessutom inte är vad de var för några år sedan. Dessutom bidrar säkerligen det faktum att det är valår till intresset för skolfrågor.

Det är naturligtvis i grund och botten bra att skol- och undervisningsfrågor uppmärksammas i olika medier och att det finns en diskussion om vad vi kan göra åt den nuvarande situationen med alltför många elever som misslyckas i matematik. Det är också viktigt att olika synsätt kommer fram. Därför är det olyckligt när inslagen ger en förenklad och osaklig bild av hur matematikundervisningen ser ut, vad som är orsaker till försämrade resultat och vad vi kan och bör göra för att resultaten ska bli bättre.

Massmediabevakningen kännetecknas ofta av en ensidigt negativ bild av vad lärare gör och lyckas sällan lyfta fram det positiva engagemang som många lärare har och som är en grogrund för hopp om förändring.

Den vinkling som Kalla Fakta gör av problemen med svenska elevers matematikkunskaper har ingen vetenskaplig grund.

Med anledning av TV4:s granskning av svensk matematikundervisning och den debatt som följt, kommenterar NCM:s föreståndare Peter Nyström inslaget och debatten på ncm.gu.se/node/7195.