

Vad varje matematiklärare borde kunna

Geogebra för nybörjare – del 2

I en tidigare artikel beskrevs de första stegen på vägen till att använda Geogebra som ett verktyg i matematikundervisningen. Författarna har nu kommit fram till steg 4 och 5 där de nu på allvar låter eleverna arbeta med Geogebra.

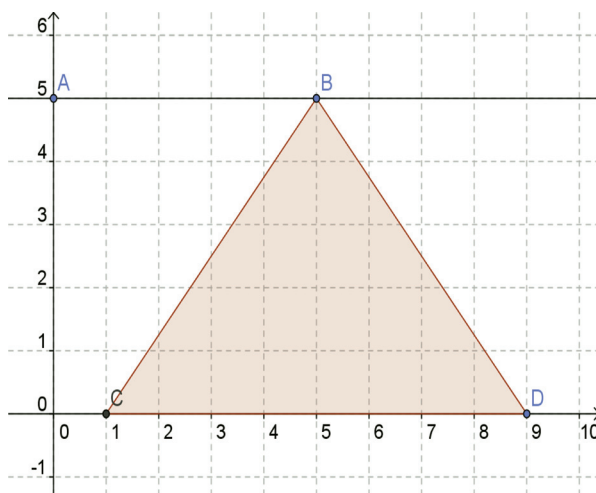
Steg 4 – Skapa elevinstruktioner

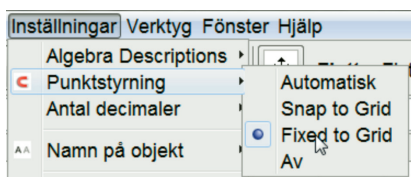
Bortsett från tillgång till dator – antingen det rör sig om datorsal, grupparbeten kring klassrumsdatorerna eller en dator per elev – krävs oftast skriftliga instruktioner. En sådan blir mycket lättare att förstå med utsnitt av skärmbilder (som i denna artikel) för att visa ikoner och menyer. I Windows 7 finns *Skärmmklipsverktyget* (i *Alla program – Tillbehör*) och i Mac OSX använder man tangentkombinationen `Kommando+Shift+4`. Till båda operativsystemen finns dessutom ett antal program, både fria och kommersiella, som på olika sätt underlättar hanteringen av skärmbilder.

Ett praktiskt råd är att i början begränsa aktiviteten till en relativt enkel undersökning, särskilt om du och klassen inte har arbetat tillsammans med datorer förut. Exempelvis skulle du vid introduktionen av triangelns area kunna låta eleverna bygga följande konstruktion. Arealen kan till en början läsas av i algebrafältet vilket inte visas här.

Det är dock mycket enkelt att senare göra dynamiska texttrutor som uppdateras med aktuella värden då konstruktionen ändras genom att välja verktyget för texttrutor: 

Det är viktigt att inse att elevcenterade undersökningar måste tillåtas ta tid. Till viss del kan eleverna göra övningar hemma, tex kan du ange att vissa uppgifter ska lösas med Geogebra, men lektionstid under din ledning kommer också att krävas. I gengäld börjar eleverna lära sig mer och mer av ett verktyg som är riktigt användbart och fungerar som ett matematiskt laboratorium där experiment och undersökningar kan utföras.





De verktyg som du behöver instruera eleverna om varierar givetvis med uppgiften du ger dem, men det skulle kunna inkludera:

- ◊ *Konstruktionsverktyg* (Vinkelräta och parallella linjer, cirklar ... i verktygsfältet)
- ◊ *Låsa punkter till rutnätet* för att slippa decimaler (se figur)
- ◊ *Skapa och använda glidare*

Elever tycker undervisningen normalt blir roligare när de får använda datorer. Forskning visar dessutom att elever som själva bygger upp de modeller de studerar förstår dem bättre (Doerr & English, 2003; Lesh & Carmona 2003; Lesh & Doerr 2003).

Steg 5 – Använd riktiga verktyg till riktiga problem

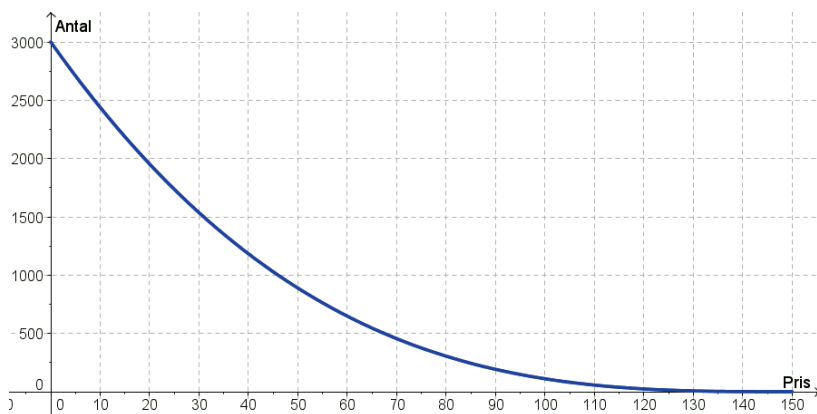
Geogebra kan användas för att bygga kraftfulla dynamiska modeller för att studera verklighetsnära problem. Efter att ha tränat eleverna i att använda Geogebra så att de blivit mer självständiga kan instruktionerna övergå allt mer till det matematiska innehållet. Vi visar här tre exempel på vad man med kortfattade instruktioner kan göra med Geogebra.

Fiskodlingen

Du ärver en fiskodling av din farmor. Det enda du får veta är:

- ◊ Om du sätter priset till 150 kr per fisk så får du inte sälja en enda fisk.
- ◊ Om du ger bort dem så blir du inte av med mer än 3000 fiskar per månad i alla fall.
- ◊ Det är fasta kostnader på 15000 kr per månad och varje fisk kostar 19,50 kr att föda upp.

Efter en inledande diskussion ger du eleverna några olika exempel på utbudsfunktioner, det vill säga funktioner som ger antalet sålda fiskar som funktion av priset. I figuren visas en kubisk utbudsfunktion. Andra alternativ kan vara en rät linje eller en kvadratisk funktion.



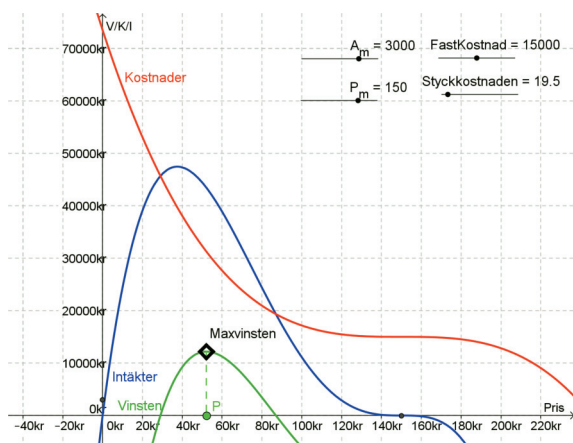
När eleverna valt utbudsfunktion kan de relativt lätt hitta det optimala priset och vinsten genom att definiera funktionerna (x är priset på fisken).

$$\text{Intäkter}(x) = x \cdot \text{Antal}(x)$$

$$\text{Utgifter}(x) = \text{Antal}(x) \cdot \text{KostnadPerStyck} + \text{FastKostnad} \text{ (definierade som glidare)}$$

$$\text{Vinst}(x) = \text{Intäkter}(x) - \text{Utgifter}(x)$$

I figuren nedan är vinstfunktionen grön och maximipunkten markerad.



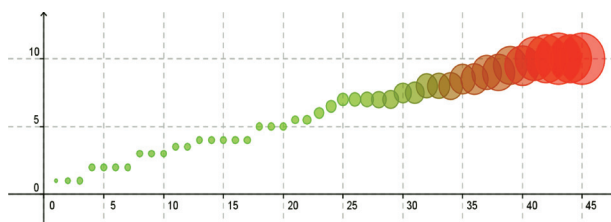
När modellen är färdigbyggd kan man ställa de riktigt intressanta frågorna. Vad händer med vinsten om kostnaden per fisk ökar lite grand? Ställ upp en differenskvot och tolka svaret. Vad betyder det om värdet är högt? Vi kan då säga att vinsten är känslig för den varierade parametern. Vilka parametrar är vinsten känslig för? Det här problemet har visat sig vara bra för att belysa derivatans betydelse i ekonomiska sammanhang.

Modellera musik

I ett projekt där vi ville föra in estetiska dimensioner i matematiken fick eleverna "mäta" musik. De delades in i grupper om fyra där en höll rätt på tiden och de övriga uppskattade musikens upplevda tempo, styrka och "mood" var femte sekund. I kalkylbladet i Geogebra fick eleverna sedan först normera sina skattningar till en skala mellan 0–10. Därefter fick de skapa cirklar där

- ◇ x -axeln representerade tiden
- ◇ y -axeln representerade tempot
- ◇ storleken representerade styrkan
- ◇ färgen representerade deras upplevelse av musikens "mood".

Denna definition av cirkeln kunde göras på en rad i kalkylbladet varefter den kopieras nedåt på vanligt sätt och cirkelarna framträder i diagrammet. Kalkylbladet kan alltså genom uttryck av typen $\text{Cirkel}[(x,y),r]$ även hantera geometriska objekt. Färgen definieras genom objekttegenskapen

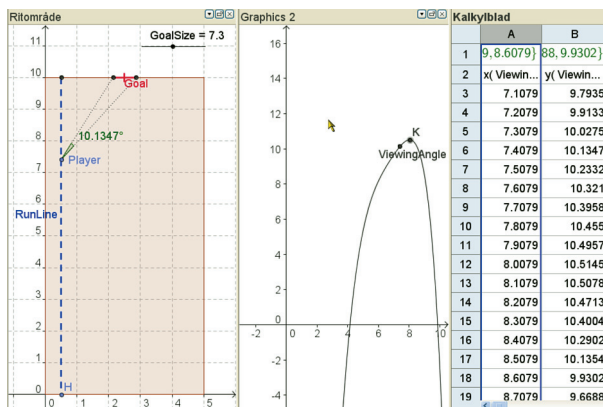


”dynamisk färg” där man kan ange uttryck för mängden rött och grönt. I figuren är rött = $\text{Mood}/\text{MoodMax}$ och grönt = $1 - \text{Mood}/\text{MoodMax}$ vilket ger en gradvis övergång mellan grönt och rött där MoodMax (största förekommande värdet av ”Mood”-variabeln) anges manuellt för varje grupp.

Musiken då? Ovanstående figur hörde till en grupp som valt Griegs *I bergakungens sal*. Andra grupper hade valt modern musik, enda kraven var att det skulle vara stor dynamik i musiken. Grupperna fick redovisa kort så samtliga hört alla stycken och vi avslutade med en diskussion om modellering och klassifikation utifrån modeller i allmänhet.

Fotbollsskytten

Ett annat problem är det med fotbollsspelaren som löper parallellt med långsidan på planen. När blir skottvinkeln som störst? Problem som dessa lämpar sig fint att modellera i Geogebra. Här nedan ser vi till vänster den geometriska modellen med en fotbollsplan och spelarens löpväg markerad i blått och skottvinkeln i grönt. I version 4 av programmet har du möjlighet att använda två grafiska områden. I område 2 i bilden nedan har vi skapat en punkt vars x -koordinat är avståndet från den egna baslinjen och y -koordinaten är skottvinkeln. Genom att låta denna punkt dels lämna spår efter sig och dels automatiskt samla in koordinaterna till kalkylbladet som syns till höger kan vi sedan anpassa ett polynom (här ett femtegradspolynom) till punkterna kring maximipunkten för att mer exakt kunna beräkna dess koordinater. Att ha en digital modell innebär att undersökningen lätt kan utvidgas, exempelvis hur den maximala skottvinkeln förändras om spelaren löper ett visst antal meter från sidolinjen. Samspelet och skillnaden mellan teoretisk härledning och mätdata blir tydligare och leder till intressanta diskussioner om hur man ”gör matematik i verkligheten”.



Att låta eleverna få utvecklas i ett digitalt verktyg till en nivå där de kan använda det till att lösa verkliga problem ger eleverna ett självförtroende att klara matematiska problem utanför skolvärlden. Dessutom tror vi att detta arbetssätt gör det lättare för fler elever att nå de högre betygsstegen. Förhoppningsvis kommer vi i framtiden slippa kommentarer av typen *Jag har aldrig använt den matematik jag lärde mig i skolan*.

Om det är något som kommer att förändra skolan och undervisningen på djupet, kommer det inte att vara något program, utan det är de metoder för samverkan och diskussion som programmet uppmuntrar till som kommer att orsaka förändringen. Det är därför vi tror på Geogebra som ett ypperligt verktyg i matematikundervisningen.

LITTERATUR

- Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (2), 110–136.
- Lesh, R. & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. I R. Lesh & H. M. Doerr (red.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching* (s 71–96). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. I R. Lesh & H. M. Doerr (red.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching* (s 3–34). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Exempelfiler finns och kan studeras (*Visa – Konstruktionsprotokoll*) genom att ladda ned dem från Nämnaren på nätet. Fler Geogebrafiler, mer information och länkar kan du hitta på Svenska Geogebrainstitutets webbplats. Sedan drygt ett år tillbaka finns alltså även ett svenskt Geogebrainstitut, ett av närmare hundra lokala Geogebrainstitut runtom i världen vars huvudsakliga uppgift är att befrämja användandet av Geogebra i matematikundervisningen. Du hittar det Svenska Geogebrainstitutet på www.geogebrainstitut.se.

