

Även mästaren kan fela – en historisk uträkning

Hur bedömer man ett slutresultat och hur avgör man om det är rimligt? Är inte dessa frågor rentav ännu viktigare i dag än när den här berättelsen utspelade sig?

Det var en gång en instrumentbyggare som hittade på en enkel geometrisk figur med vars hjälp man lätt kan bestämma var på greppbrädan man ska placera banden på ett stränginstrument som gitarr eller luta.

Avståndet mellan banden ska bli mindre och mindre efter hand som man rör sig från sadeln ner mot stallet, men inte hur som helst. Banden ska vara så placerade att tonhöjden stiger med precis ett halvt tonsteg när man flyttar fingret från ett band till nästa. Att avstånden mellan banden blir mindre och mindre beror på att den fria stränglängden måste förkortas med samma proportion varje gång, om tonhöjden ska stiga lika mycket i varje steg.

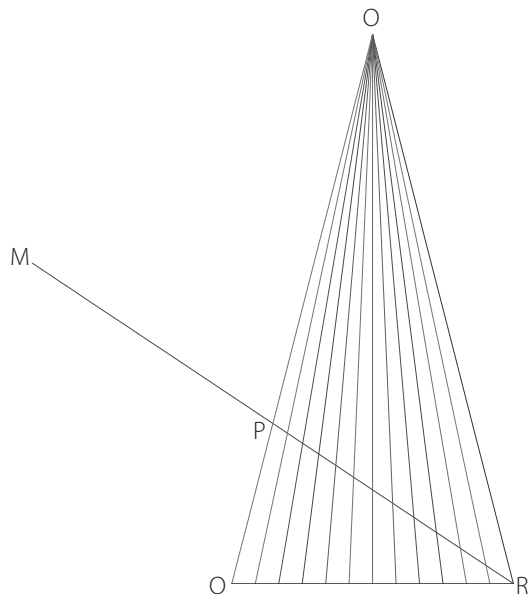
Figuren ser du här till höger.

Lägg nu gitarrens greppbräda under linjen MR så att strängarna börjar vid R (sadeln, uppe vid stämskruvarna) och slutar vid M (stallet, nedanför hålet på gitarren). Placera banden där linjen PR skär linjerna som strålar ut från O, så hamnar de rätt. Det är därför figuren är märklig, om det nu stämmer, förstås.

Så här ritas man figuren:

- ◇ Dra en vågrät linje som är 12 enheter lång och markera enheterna. Kalla den QR, där Q är den vänstra ändpunkten och R den högra.

- ◇ Låt QR bli basen i en likbent triangel där de två övriga sidorna är 24 enheter långa. Toppen på triangeln kallar vi O. Rita triangeln OQR.
- ◇ Sätt passarspetsen i Q och blyertsspetsen 7 enheter bort på QR. Markera en punkt 7 enheter från Q uppåt längs QO. Kalla punkten P.



- ◇ Bind samman P och R med en rät linje och förläng den till en punkt M bortom P så att PM blir lika lång som PR dvs så att P blir mittpunkt på MR.
- ◇ Dra "strålar" (räta linjer) från toppen på triangeln, O, ner till markeringarna på QR.

Stämmer det?

Om man placerar banden enligt beskrivningen, kommer då tonhöjden verkligen att stiga med ett halvt tonsteg när man flyttar fingret från ett band till nästa? Från vilket band som helst? Ett sätt att undersöka saken är förstås att prova på en riktig gitarr och lyssna ordentligt. Men man kan också räkna på det.

Sätter man ett finger på band 12, som går genom punkten P i figuren, så ska man få en ton som ligger 12 halvtoner upp, dvs en oktav ovanför strängens grundton. Där måste då den fria stränglängden ha halverats. Det stämmer bra, enligt konstruktionen delar punkten P strängen mitt itu. Men hur är det med de övriga banden, hur är det med band 1 till 11? Vi numrerar banden från höger i figuren, det första bandet är det som ligger närmast R, det andra ligger två snäpp från R osv.

Sätter man fingret på band 1, 2, 3, ... blir den fria stränglängden M_1, M_2, M_3, \dots Den *relativa* förändringen av den fria stränglängden blir då i tur och ordning

$$M_1/MR, M_2/M_1, M_3/M_2, \dots, M_{12}/M_{11}.$$

För att tonhöjden ska stiga lika mycket för varje band, måste den relativa förkortningen av strängen alltid vara lika stor från ett band till nästa. Annorlunda uttryckt: Den fria stränglängden ska i varje steg *multiplieras* med *samma* faktor och värdet på den anges av kvoterna ovan. För att allt ska stämma, måste därför alla tolv kvoterna vara lika stora. De fria stränglängderna kan vi beräkna ur figuren och därmed också kvoterna. Då ser vi om de är lika eller ej. Även om de inte skulle vara exakt lika, så kanske de ändå är tillräckligt lika för vanliga musikaliska behov.

En bekant till instrumentbyggaren tog itu med att beräkna allt detta. För honom



låg det närmast till hands att lösa problemet geometriskt. Han var nämligen lantmätare och erfaren lärare i trigonometri. Räknare hade han dock ingen, bara papper och penna och tabeller med kvadratrötter, logaritmer och trigonometriska funktioner. Han hade samma hjälpmedel som svenska gymnasieelever fick klara sig med så sent som för 30–40 år sedan.

Problemet går att lösa med gymnasie-matematik. Prova!

Faggot och Strähle

Men nu är det 1743. Jacob Faggot heter lantmätaren. Han är sekreterare i den nyligen bildade Vetenskapsakademien i Stockholm och därmed även redaktör för de *Handlingar* som akademien ger ut, fyra häften om året.

Handlingarna innehåller korta artiklar om allt mellan himmel och jord som kan tänkas komma till praktisk nytta i samtiden. Man jämför olika slags lädersmörja, man ger råd om djuravel, Linné berättar om nya växter, Polhem beskriver goda konstruktioner, osv, allt på *svenska* och allt grundat på *Wetenskapens* senaste rön. Handlingarna finns fortfarande kvar, ända från början, inbundna i små årsböcker. Numera kallas de *Kungliga Vetenskapsakademiens Handlingar*, förkortat *KVAH*.

Hit kommer orgelbyggaren och klavermakaren Daniel Strähle och överlämnar en artikel med titeln *Nytt Påfund, till att finna Temperaturen, i stämningen för thonerne på Claveret och dylika Instrumenter*. I den beskriver han sin märkliga figur och vad man kan använda den till. Han säger ingenting om gitarrer och greppbrädor – han är ju klavermakare. Han talar i stället om liksvävande temperatur. I vilket fall som helst handlar det om att dela in oktaven i tolv lika stora delar, tolv lika stora intervall.

Strähle är en framstående man på sitt område. Han är elev till Cahman och har studerat mekanik i ett par år hos Christopher Polhem i Stiernsund. Kan det vara Polhem som har uppmuntrat honom till att skriva artikeln? Eller gör han det självmant och söker nu stöd för att få den publicerad i Vetenskapsakademiens *Handlingar*?

Vad vi vet är att Faggot räknar på saken och sedan redovisar, inte själva beräkningarna, men hela beräkningsgången och alla delresultat i en artikel med titeln *Trigonometrisk Uträkning, på den nya Temperaturen för thornernes stämning å Claveret*. Hans uträkning visar att Strähles påfund dessvärre delar in oktaven i tolv delar som är alltför olika stora för att det ska vara musikaliskt brukbart. Så var det med den saken.

Ändå publicerar han båda artiklarna och i samma häfte av *Handlingarna*! Varför gör han det om Strähles påfund inte funkar? Varför drar inte Strähle tillbaka sin artikel när han får se Faggots uträkning? Eller får

han inte se den förrän den är tryckt? Hur känner Strähle och Faggot varandra? De är jämngamla, båda nu i 40-årsåldern. Polhem är en gemensam bekant och Faggot är musikintresserad. Är det Strähle som ber Faggot kontrollera figuren eller är det Faggot som kräver att få räkna på saken före en eventuell publicering?

Ett långt kliv framåt i tiden

Här kunde berättelsen ha slutat, om det inte senare hade visat sig att Faggot räknade fel. I början av sin långa uträkning kommer han fram till att vinkeln PRQ är ca 40°. I själva verket är den bara ca 33,5°. Det felet hänger sedan med hela vägen. Faggots siffror kommer därför att bygga på att punkten P ligger en bra bit högre upp från Q än vad Strähle föreskriver (8,2 i stället för 7 enheter).

Felet upptäcktes inte förrän på 1950-talet av musikvetaren J. Murray Barbour. Det verkar som han tyckte det var bra synd att kasta ut en så intressant konstruktion som Strähles figur, bara för att lutningen på linjen PR förmodligen inte blivit den bästa. Men vilken lutning är då den bästa?

Enligt Faggots uträkning är felet störst mitt i oktaven, runt F#. Hur ska då PR luta för att F# ska bli korrekt? Barbour räknar och räknar. Han verkar inte ha haft bättre hjälpmedel än Faggot och nu måste han lösa ett trigonometriskt ekvationssystem med två obekanta. Till slut kommer han fram till att P bör ligga 7,028 enheter från Q. Men då är ju Strähles konstruktion mitt i prick! *Kan Faggot ha räknat fel?*

Barbour räknar vidare. Troligen går han nu igenom Faggots beräkningsgång. Han hittar felet där i början, rättar det, fullföljer uträkningen och kommer fram till att Strähles påfund i själva verket delar in oktaven i tolv nästan exakt lika stora intervall. Poäng till Strähle!

Auktoritetstro?

Barbour förefaller vara den förste som verkligen har kollat Faggots uträkning (eller åtminstone den förste som har hittat felet). Flera tidigare musikteoretiker har beskrivit Strähles påfund. Alla har litat på Faggots

siffror, om än med beklagande. Ingen verkar ha kollat uträkningen. Och varför skulle man ha gjort det, ens om man behärskade trigonometrin? Faggot var ju fackman, *Öfver-Dirrecteur* för Lantmäteriet m.m. Att göra om hela hans långa uträkning vore sannolikt bortkastad möda. Det tyckte nu inte Barbour, men det var först efter att han hade misslyckats med att förbättra Strähles figur. Det gav honom nya fakta i målet – nu framstod det som väl värt besväret att gå igenom Faggots uträkning.

En sentida kommentator, matematikern Ian Stewart, visar att att Strähles konstruktion är anmärkningsvärt bra ur viss matematisk synvinkel. "Om bara Faggot hade gjort sig besväret att *mäta* vinkeln PRQ!" utbrister han och visar sedan varför Strähles "linjära" figur blir en så bra approximation till den exponentialfunktion man egentligen är ute efter. "Hur i all världen kom Strähle på sin figur?"

Prova själv

Vilka kontroller Faggot än må ha gjort så missade han uppenbarligen den här vinkeln. Om man vill kan man själv prova att komplettera hans uträkning med att mäta vinklar och sträckor i figuren, antingen på ett A4-papper eller i större skala på väggen eller golvet. Man kan också prova att lösa problemet med dagens hjälpmedel, både trigonometriskt som Faggot och algebraiskt med analytisk geometri. Ger metoderna samstämmiga resultat får man också viss kontroll av att resultatet är rimligt.

Sensmoral

Hur övar man sig i att bedöma ett slutresultat? Att avgöra om det är rimligt? Att kontrollera det? Den sortens färdighet är kanske ännu mer värdefull nu, när vi låter snabba maskiner sköta alla beräkningar. Men snabbheten gör också att vi faktiskt har bättre om tid till kontroll av resultatet. Och även kontrollerna går ju fort!

Att hitta på bra kontroller blir en allt viktigare del av problemlösningsförmågan.

LITTERATUR

- Strähle, Daniel (1743). Nytt påfund, til at finna temperaturen, i stämningen för thonerne på claveret och dylika instrumenter. *Kungliga vetenskapsakademiens handlingar, vol 5* (s 281 – 286). Stockholm.
- Faggot, J. (1743). Trigonometrisk uträkning, på den nya temperaturen för thonernes stämning å claveret. *Kungliga vetenskapsakademiens handlingar, vol 5* (sid 286 – 291). Stockholm.
- Barbour, J. M. (1951). *Tuning and temperament: a historical survey*. East Lansing: Michigan State College Press.
- Stewart, I. (2003). Faggot's fretful fiasco. I J. Fauvel, R. Flood & R. J. Wilson (red), *Music and mathematics: from Pythagoras to fractals* (s 60–75). Oxford Univ Press.

Kompletterande material finns på *Nämnares nät*, namnaren.ncm.gu.se