Multiplikation i åk 3

— glimtar från ett undervisningsexperiment

*Lektor **Andrejs Dunkels**, Luleå, visar hur man kan nå automatiserade ''tabellkunskaper'' utan att undervisningen byggs upp kring ''tabeller'', utantillinlärning och ''drill''.*

Bakgrund och syfte

Multiplikation i grundskolan har intresserat mig så länge jag kan minnas. Intresset ökade av rapporterna om att många mellanstadieelever har svårt att förstå att multiplikation kan ''göra mindre'' när man multiplicerar med ett tal mellan 0 och 1. Jag hade också slagits av att de flesta läroböcker ägnar så lite utrymme åt begreppsutvecklingen i åk 3 och att tyngdpunkten i undervisningen ligger på ''tabellinlärning'' och ''drill''.
Jag ställde mig bl a följande två frågor:

1) Kan man undervisa om multiplikation med begreppsutveckling i fokus och få ''tabellkunskaperna'' på köpet?
2) Kan man hitta en begreppsbild som är matematiskt riktig, pedagogiskt acceptabel och som går att utveckla bortom heltalen så att speciellt multiplikation med tal mellan 0 och 1 bygger på tidigare tankeformer för heltalen.

Jag genomförde ett undervisningsexperiment under läsåret 86/87 vid Munkebergsskolan i Luleå i två klasser i åk 3. Det gick till så att jag tog ansvaret för multiplikation och undervisade varje klass i stort sett en lektionstimme per vecka, vilket sammanlagt blev 28 lektionstimmar per klass under läsåret. Klasslärarna Ingegerd Lundholm och Berit Blomberg var med vid varje lektionstillfälle. Vissa veckor följde de upp moment i klasserna mellan mina besök. Efter lektionerna hade vi en diskussion. En kortare förstudie gjorde jag under läsåret 84/85 dels hos Ulla Denarp vid Öhemsskolan, dels hos Birgitta Niska vid Stadsöskolan i Gammelstads rektorsområde.

Det som jag ännu inte kan utvärdera är om den valda begreppsbilden klarar utvidgningen till tal mellan 0 och 1, ty eleverna som deltog har ännu inte börjat med bråk. Jag hoppas emellertid få tillfälle att följa båda klasserna genom mellanstadiet och följa upp experimentet. Det jag hittills fått besvarat kan sammanfattas på följande sätt:

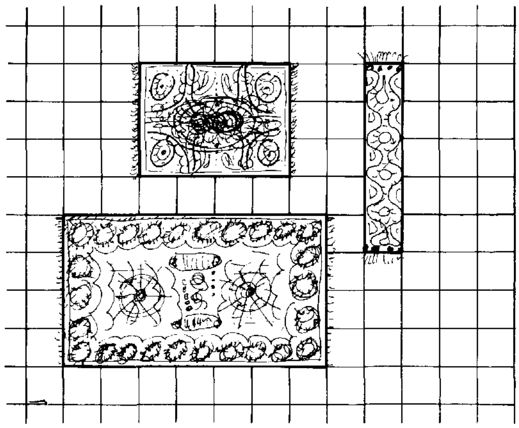
1) Alla eleverna i båda klasserna kunde tabellerna fr o m $1 \cdot 1$ t o m $10 \cdot 10$ när de lämnade åk 3. Detta bekräftas dels av utvärderingar inom försöket, dels av mottagande lärare och speciallärare i åk 4.

2) "Rektangelmönster" i rader och spalter ger en matematiskt riktig begreppsbild och är samtidigt en acceptabel representation av upprepad addition, som ju utgör inkörsporten till multiplikation. Som objekt i raderna och spalterna i den grundläggande begreppsbilden valde jag den kvadratiska rutan. Då kan man lätt utvidga bortom heltalen genom att titta på delar av rutor.

Anm. En bidragande orsak till svårigheterna med att acceptera att produkten kan bli mindre skulle kunna ligga i att man håller kvar eleverna vid multiplikationen som upprepad addition alltför länge. Då finns det risk att vissa elever befäster tanken att multiplikation "gör större" och får senare svårt att frigöra sig från den. Detta gör att man antagligen bör vara försiktig med "skutt-räkning" (t ex 6, 12, 18, . . .) som övning på multiplikation i inledningsskedet. "Skutträkning" vid multiplikation motsvarar uppräkning en åt gången vid addition, en metod vars faror bl a Dagmar Neuman och flera japanska didaktiker starkt varnar för.

Några exempel från experiment

Efter att ha introducerat multiplikation som upprepad addition och genomfört en del konkreta övningar, byggde vi upp rutmönstret utifrån en blunda-övning. Eleverna fick blunda och föreställa sig en stor sal med ett rutigt golv. Alla möblerna kastades ut. Så flög det in mattor och la sig snyggt och prydligt på golvet. Och alla mattorna var alltid såna att de täckte ett helt antal rutor. Mattorna la sig alltid så att de låg rakt och fint längs med golvets rutor. Eleverna fick så öppna ögonen igen och hade framför sig ett centimeterrutat papper på vilket de skulle rita en av de mattor de hade sett på sitt salsgolv. I fig 1 visas exempel på tre såna mattor.

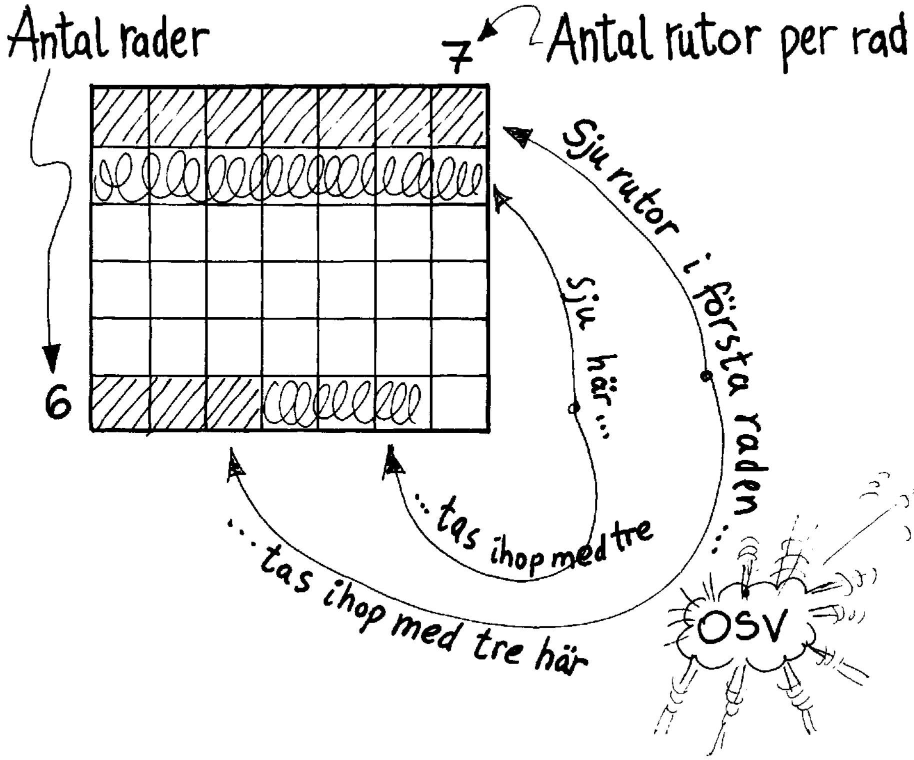


Figur 1.
Tre mattor som täcker ett helt antal rutor. Det är lätt att se hur många rader som täcks och hur många rutor det är i varje rad. Alltså kan man räkna ut totala antalet rutor under mattan, trots att de individuella rutorna inte syns.

Och nu gällde det att tala om hur många rutor som varje matta täcker. Hur många rader av rutor täcker den? Hur många i varje rad? Hur många rutor allt som allt?

Mattorna blev vårt sätt att klara multiplikationer. Så fort någon inte klarade en viss multiplikation så var det bara att ta fram ett centimeterrutat papper, rita motsvarande matta och räkna antalet rutor.

Alla fann snabbt att det lätt blev fel om man räknade rutor en och en. Vi utarbetade därför en mer systematisk och tillförlitlig metod som bygger på vårt talsystem. Man grupperar helt enkelt tiotalsvis. Se fig 2.



Figur 2.
Ett sätt att systematiskt räkna antalet rutor. Man kombinerar första raden med så många i sista så att det blir 10, sedan andra raden, osv tills det inte går att få ihop något mer helt tiotal. Så länge man i ett ögonkast ser hur många rutor man har behövs inte detta sätt att räkna.

En talföljdsövning utnyttjades för att eleverna skulle bekanta sig med multiplikation. Den går ut på att man börjar med att välja två ensiffriga tal. Låt oss som exempel ta 3 och 4. Man bildar nästa tal genom att helt enkelt multiplicera talen och sen bara ta vara på entalssiffran i resultatet. Denna entalssiffra är nästa tal:

3, 4, 2

Startvärden som man själv väljer	Entalssiffran i $3 \cdot 4 = 12$

Sen fortsätter man och multiplicerar ihop de två sista talen och tar vara på ental, som ger 8 (i detta fall är ju hela produkten bara ett ensiffrigt tal), så att följden blir

3, 4, 2, 8

På detta sätt fortsätter man. Eftersom $2 \cdot 8$ är 16 så kommer nästa tal i följden att vara 6 och man har

3, 4, 2, 8, 6

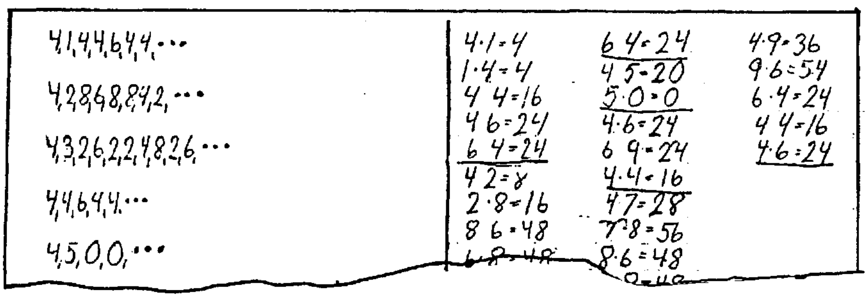
och efter ytterligare några multiplikationer får man

3, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, . . .

och rätt som det är dyker två tal upp som man haft redan tidigare. Man behöver inte räkna vidare för fr o m nu kommer allt att upprepas.

Hur blir det om man väljer andra startvärden? Och vilka valmöjligheter finns det? Eleverna föreslog att man borde ta startvärdena 1,1 och sen ta 1,2 därefter 1,3 osv ända till 9,8 och

9,9. (Egentligen skulle man ha kunnat börja redan vid 0,0, men i så fall får man ett antal triviala följder i början. Nollor skulle ju ändå dyka upp rätt som det var, och det var lika bra att vänta med dem.) Det fanns alltså massor av arbete och det var bara att sätta igång. Nu kände jag att det kunde finnas en viss risk att följden 2, 8, 6 hos någon kunde ge oönskade tankar som ”2 gånger 8 är lika med 6”, och för att undvika alla sådana risker införde vi ett speciellt redovisningssätt. De olika talföljderna skrevs på vänstersidorna i räknehäftet och på högersidorna måste alla de fullständiga multiplikationerna skrivas ut. Vänstersidorna kom på detta sätt att innehålla det som tillhörde vår speciella lekvärld med dess regler som bara gällde för oss i just den här leken, och som vi när som helst skulle ha kunnat ändra på. Högersidorna var reserverade för den matematiska världen med dess allmängiltiga regler, som dels logiskt hänger ihop på olika sätt, dels gäller för alla och som vi inte kan ändra på. I fig 3 visas en elevs arbete med denna övning.



Figur 3

Ett uppslag ur en elevs räknehäfte. På vänstersidan finns vår lekvärld med talföljder som successivt uppstår. På högersidan finns den matematiska världen. Varje multiplikation har tecknats fullständigt. Denna elev har också satt ett streck på högersidan för varje gång som en talföljds multiplikationer är slut.

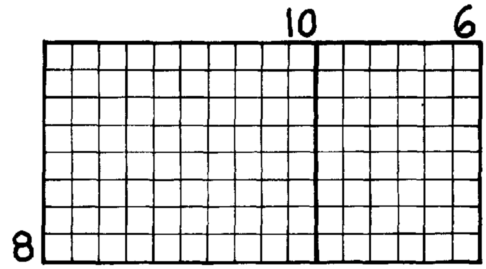
Mellan mina besök hände det då och då att eleverna tog fram sina räknehäften med den här talföljdsövningen och räknade några rader när de hade en stund över. Vissa av talföljderna blir mycket korta, andra blir lite längre, ingen blir irriterande lång.

Den här övningen är på sätt och vis en ”drill-övning”. Den innehåller emellertid moment som den traditionella drill-övningen med godtyckliga siffror utan sammanhang saknar. Här gäller det ju att vara uppmärksam och spana efter regelbundenheter och mönster, vilket de flesta upplever som spännande. Man får också öva på att utnyttja tidigare resultat eftersom dels vissa kombinationer dyker upp flera gånger på högersidorna, dels vissa kombinationer kan delas upp i delar som man räknat ut tidigare (t ex $7 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8$).

Så småningom var det dags att bygga upp multiplikationstabellen systematiskt, dvs bygga upp ett kvadratiskt schema med produkterna fr o m $1 \cdot 1$ t o m $10 \cdot 10$. Varje horisontell rad i detta schema utgörs av ”en tabell”, liksom varje vertikal spalt. (*Anm.* Uttrycket ”multiplikationstabell” kan betyda två olika saker. Dels kan man använda ordet för hela schemat, dels för enskilda rader eller spalter. När man säger att man ”kan multiplikationstabellen” syftar man i allmänhet på att man behärskar hela schemat. Men de enskilda raderna kallas ju som bekant ”ettans tabell”, ”tvåans tabell”, ”treans tabell”, etc.) Jag bestämde mig för att bygga bakifrån, dvs börja med tians (spalten längst till höger) och sen gå åt vänster, nians, åttans, sjuans osv. Det finns flera fördelar med detta. För det första får man ta nians tabell tidigt. Den är ju så rolig och spännande och därför är det bra om man får lära känna den så snart som möjligt. För det andra så kan man nöja sig med att lära sig lite drygt halva multiplikationstabellen om man börjar bakifrån. T ex 10 • 9 behöver man inte lära sig, ty man har ju i tians tabell redan klarat av 9 • 10 och det faktum att man kan kasta om ordningsföljden mellan två faktorer utan att produkten ändras. När man kommer till åttans tabell behöver man aldrig bry sig om 10 • 8 och 9 • 8. Antalet kombinationer som man ska kunna reduceras med 1 för varje ny tabell. När man är framme vid tvåans tabell finns det inte många kombinationer kvar. För det tredje är det en fördel att få ta de svårare tabellerna först. På det sättet blir de på ett naturligt sätt mer övade än de lättare. (*Anm.* Jag skriver här ”lättare” och ”svårare” men jag vill understryka att jag aldrig med eleverna uttryckte mig så under experimentet. Jag anser att det är förödande för vissa elever om man säger t ex att nu ska vi ta itu med den svåra delen av tabellen. Det bäddar för ängslan och onödiga misslyckanden.)

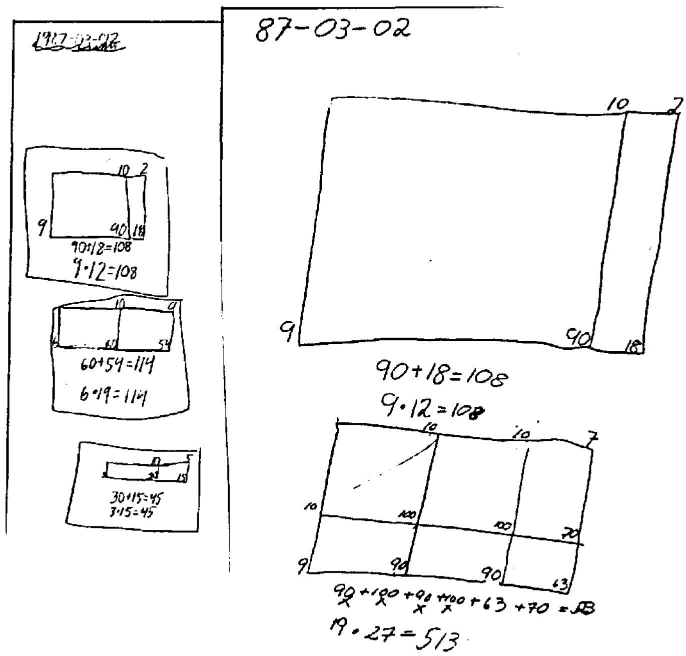
När alla tabellerna var genomgångna hade varje elev fått skriva flera tabeller med alla produkterna uträknade men också en med alla produkterna tecknade. Det kändes angeläget att ta upp båda aspekterna och ägna tid åt att diskutera och läsa tabeller.

Vid ett tillfälle fick vi anledning att fundera över hur mycket 8 • 16 är. Det visade sig att mattorna kunde användas för att klara detta utan att vi hade sysslat med uppställningar. Vi övergick f ö i detta skede till halvcentimeterrutat papper från det centimeterrutade. Talet 16 delades upp som 10 + 6 och det var lätt att räkna ut 8 • 16 så som visas i fig 4.



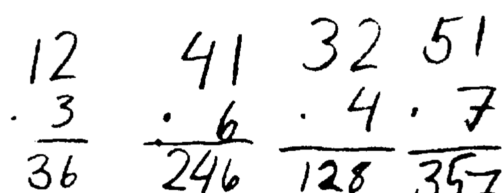
Figur 4.
Ett sätt att föreställa sig multiplikationen 8 • 16. Observera att man här inte gör någon som helst referens till areabegreppet. Det handlar om att räkna antalet rutor, ingenting annat.

Efter att ha övat lite på denna typ av multiplikationer på rutat papper släppte vi så rutorna och övergick till mer abstrakta figurer. Eleverna fick nu helt blanka papper att rita på. Några ville använda linjal, men det vanliga var att bilderna gjordes på fri hand. Dessa figurer skulle ju användas som stöd för tanken och inte för att mäta eller göra avläsningar i. I fig 5 visas exempel på två elevers arbete, där en av uppgifterna var förelagd av mig, 9 • 12, medan de övriga är sådana som varje elev själv skulle hitta på. Lägg märke till att man i denna lärogång inte behöver undvika kombinationer som ger upphov till minnessiffror i additionen, vilket är en stor fördel. Många elever hinner lägga sig till med en tankeform som är svår att



Figur 5.
Ur två elevers anteckningar. Bilderna blir mer symboliska. De individuella rutorna i mattornas rutmönster är inte längre utritade. Uppgiften 9 • 12 är förelagd, de övriga uppgifterna har eleverna själva hittat på.

vidareutveckla när de först vänjs att räkna uppgifter där man ska multiplicera spaltvis utan att entalsmultiplikationen "stör" tiotalen (se fig 6), vilket kan bädda för svårigheter längre fram när minnessiffror dyker upp. Jag vill här betona att det inte görs någon referens till areabegreppet trots att figurerna kan leda tankarna åt sådant håll. Fortfarande handlar det ju om att räkna antalet rutor, det är bara det att figurerna fått bli mer symboliska och abstrakta. Areabegreppet har vid det här laget inte alls tagits upp.

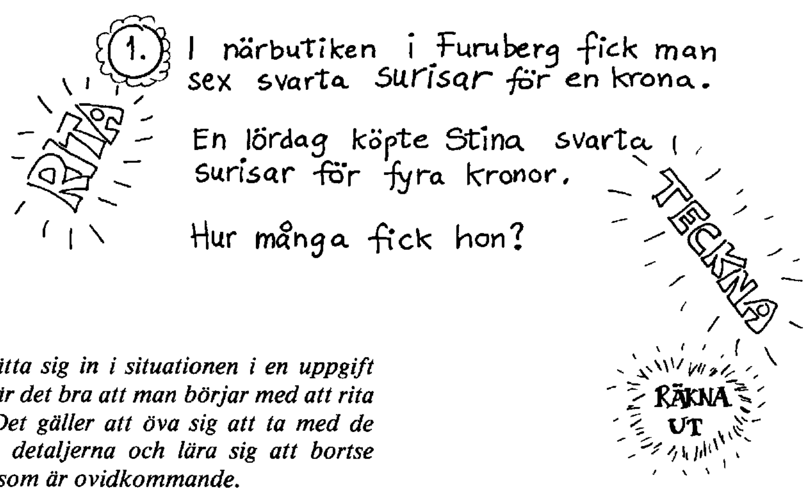


Figur 6.
Några riskabla övningar vid inledningen till multiplikation med flersiffriga tal hämtade från en nioårings anteckningar. I ingen av dessa uppgifter påverkar entalsmultiplikationerna tiotalen. Resultat som 67 • 6 = 3 642 längre fram kommer då inte som någon överraskning.

Vardagsräkning

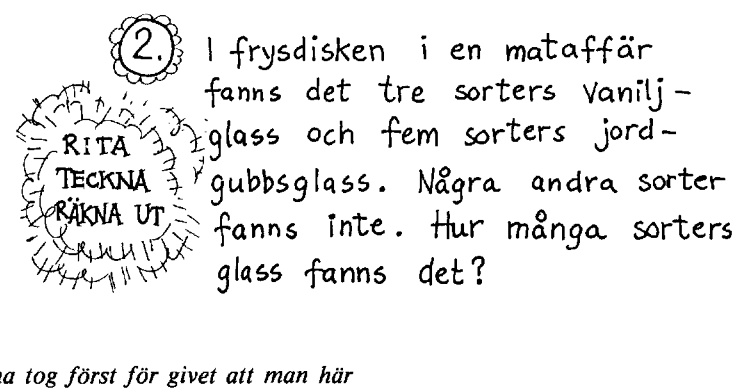
När det gäller vardagsanknytning tog vi upp uppgifter med text (som förr kallades för "benämnda tal"). Ibland fick eleverna lösa problemen individuellt, ibland i smågrupper.

För att lättare kunna sätta sig in i berättelsen i en uppgift med text kom vi överens om att alltid börja med att rita en bild av den aktuella situationen. Därefter skulle den uträkning som var aktuell tecknas, och först som ett tredje steg skulle själva uträkningen komma; rita, teckna, räkna ut. En av lektionerna inleddes med uppgift 1 i fig 7. (Det fanns alltid en uppmaning att hitta på egna uppgifter i anslutning till den förelagda om man blev färdig. Jag delade vid det här tillfället ut uppgifter en i taget så att alla eleverna arbetade med samma uppgift.)



Figur 7.
För att sätta sig in i situationen i en uppgift med text är det bra att man börjar med att rita en bild. Det gäller att öva sig att ta med de väsentliga detaljerna och lära sig att bortse från sånt som är ovidkommande.

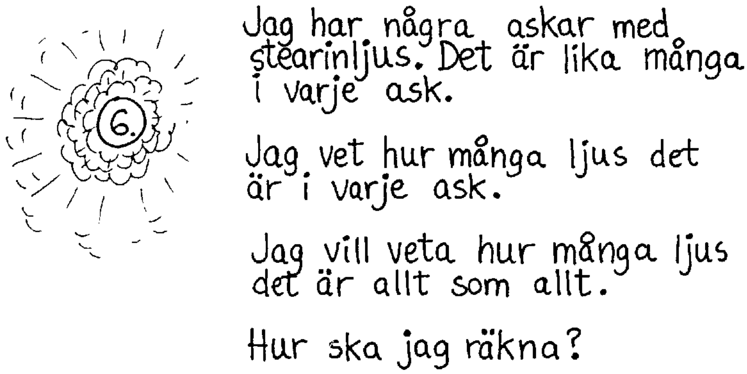
En utomstående observatör skulle måhända ha imponerats av det som hände när eleverna fått uppgift 1. Alla (i båda klasserna) skrev mycket snabbt 4 • 6, innan de började rita. När sedan den uppgiften var avklarad och jag delat ut uppgift 2, se fig 8, skulle kanske den utomstående observatören inte längre varit imponerad utan snarare förskräckt. Nu hände nämligen precis samma sak som förut, alla eleverna i båda klasserna omedelbart skrev 3 • 5 utan att bry sig om att först rita, dvs utan att först försöka sätta sig in i problemets berättelse. Det var lätt att förstå varför. Jag var ju där, det betydde ju multiplikation, och uppgiftstexten innehöll talen 3 och 5.



Figur 8.
Alla eleverna tog först för givet att man här måste räkna 3 • 5. Jag var ju där, och jag representerade multiplikation.

Att jag avsiktligt skrivit talen med ord och inte med siffror i texten hjälper inte. Det finns många studier som visar på detta fenomen vid behandling av uppgifter med text, vissa elever bryr sig inte om att ta del av innehållet (som ju f ö ofta är ointressant) utan chansar på det troligaste räknesättet. Jag tror att det är viktigt att man bemödar sig om att hitta uppgifter som kan fånga elevernas intresse, och att man är observant på chansningsfenomenet.

Låt mig avsluta dessa glimtar med att visa på en typ av uppgift som tvingar eleven att formulera sina tankar och inte bara göra en mer eller mindre mekanisk uträkning; uppgifter med text utan några siffror. (Se fig 9.)



Figur 9.
En uppgift med text men utan siffror. Det är bra att öva på denna typ av uppgifter. Då tvingas man att formulera sina tankar i ord. Förhoppningsvis fortsätter en och annan att göra det även när det finns siffror med.

Eleverna reagerade till att börja med motsträvigt på uppgift 6, och kommentarer som ''det här är ju omöjligt'', ''det här går inte'', ''man vet ju inte hur mycket det är'' var vanliga. Efter att ha hämtat sig från chocken började eleverna resonera och så småningom sa några: ''Man multiplicerar ljusen med askarna.'' Dessa elever hade då tagit ett stort steg framåt, ett utomordentligt första steg mot ett svar som innehåller ordet ''antal'': ''Man multiplicerar antalet ljus med antalet askar.'' Det gäller emellertid att låta eleverna få ta ett steg i taget, låta tankeutvecklingen få ta tid, och tillfälligt acceptera svar som längre fram kanske får modifieras och förbättras.