

Bråk och språk

–vad som är förnuftigt och logiskt

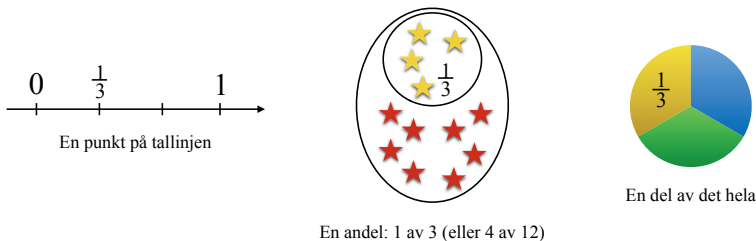
De termer och uttryck som används vid räkning med bråk kan för olika språk ha helt olika innebörder. Artikelförfattarna gör här en jämförelse mellan begreppen för några olika språk. Kan språkväxling vara till hjälp för lärande och förståelse? Artikeln anknyter till förra numrets diskussion av språkväxling.

ett matematiskt begrepp kan ha funnits i två tusen år eller vara ganska nyligen infört. Det kan ha namn på många olika språk och dessutom kan benämningarna variera över tid. Stabilitet är något i sig önskvärt, men å andra sidan är ju utveckling inom vetenskap, utbildning eller av språkbruket något som sker och som påverkar hur vi tänker.

En term kan ge associationer som hjälper förståelsen eller tvärtom vara missledande. Vi vill här diskutera ordens betydelse för förståelsen av vissa begrepp vid räkning med bråk.

Bråkdelar

Bråk är något som alla kommer i kontakt med, vissa redan i förskolan, där barnen ritar fina cirkelskivor och delar upp dem i lika stora tårtbitar för att illustrera hälften, en tredjedel, en fjärdedel och så vidare. Det är faktiskt förståeligt att man blir fixerad vid tårtbitar (eller pizzor), eftersom själva namnet på bråk antyder att man bryter av, eller skär ut, bitar av en viss helhet. Man ska dock inte glömma bort att det finns åtminstone tre olika representationer av begreppet bråk:



Ordet *bråk*

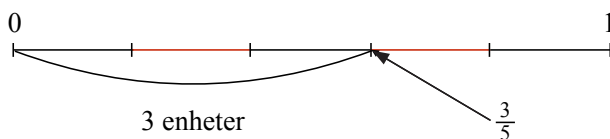
kommer från det lågtyska ordet *brok* 'brytning, brott' som är, precis som det nederländska *breuk* och polska *ułamek*, ett översättningslån från latinets *fractio*, taget från sanskrit (*bhinna* 'bruten') via arabiska. Även på svenska, trots associationen med gräl och slagsmål, känner man igen den ursprungliga betydelsen genom liknelsen med verbet *att bryta*. I engelskan har man däremot lånat in *fractio* och bara modifierat det till *fraction*.

Det kan underlätta för elever att förstå bråk om det görs tydligt att talet under bråkstrecket *nämner* enheten som vi kommer att använda – om det nu är fjärdedelar, femtedelar eller tiondelar – och att talet ovanför bråkstrecket *räknar* hur många gånger enheten används. Det sitter liksom i språket, men det bör få lite mer uppmärksamhet. Vi har hört från några elever att de fick följande förklaring: talet ovanför bråkstrecket heter täljaren och talet under strecket heter nämnaren; kom ihåg: *T uppe i taket och N nere vid golvet*. Inget fel på det. Man får gärna använda olika minnesknep för att underlätta inläring, men man kan samtidigt ge en förklaring av termerna.

| Språk | Talet ovanför bråkstrecket | Är associationen självklar? | Talet under bråkstrecket | Är associationen självklar? |
|--------------|----------------------------|---|--------------------------|--|
| Svenska | täljaren | nej (<i>tälja</i> , gammalt ord för 'att räkna') | nämnaren | ja |
| Polska | licznik | ja | mianownik | nej (<i>miano</i> , gammalt ord för 'namn') |
| Engelska | numerator | ja | denominator | oklart |
| Nederländska | teller | ja | noemer | ja |
| Tyska | Zähler | ja | Nenner | ja |

I tabellen har vi samlat termer motsvarande *täljare* och *nämnare* från några europeiska språk. I alla dessa språk ser man samma princip i benämningen av talen ovanför och under bråkstrecket: talet under strecket namnger enheten och talet ovanför räknar upp hur många gånger enheten ryms i talet. På vissa språk är associationen självklar; på andra måste eleverna göras uppmärksamma på detta, eventuellt med en extra förklaring. Till exempel ger det svenska ordet *tälja* en omedelbar association till 'att skära i trä', medan det i själva verket kommer från det gamla ordet *tälja*, som betyder 'att räkna' (sambandet är att man räknade dagar genom att skära skårar i en trästav). På andra språk är associationen till att räkna uppenbar, eftersom man känner igen ordet i termen (*liczyć, tellen, zählen*), och dessutom har ordet också en vardaglig betydelse: 'en mätare'. Det engelska *numerator* är också ganska självförklarande.

Vad gäller termen för talet under bråkstrecket så är orden inte riktigt självklara på polska och (möjligen) på engelska. Med hjälp av läraren bör det ändå gå bra. Det polska ordet *miano* används fortfarande i en fix fras *określać mianem* 'att kalla, att benämna' och ordet finns som en del av ett vanligare ord *mianowanie* 'utnämning'. Ordet *mianownik* har dessutom en annan betydelse inom språkvetenskap: det betyder 'nominativ', alltså den grundläggande grammatiska formen av ett substantiv, den namngivande. Vi vet inte hur självklar kopplingen från det engelska *denominator* till ordet 'benämning' är, men det är möjligt att den är lätt att förstå, t ex genom associationen till ordet *denomination*, som bl a betyder 'valör'.



I figuren ovan illustrerar vi talet $\frac{3}{5}$ som en punkt på tallinjen. Vid addition, subtraktion och jämförelse av bråk blir det uppenbart att man måste hitta en gemensam enhet för alla inblandade bråk, en lämplig passbit – precis som vid addition, subtraktion och jämförelse av längder eller vikter uttryckta i olika enheter. En sådan passbit är då $\frac{1}{n}$, där n är en *gemensam nämnare* till alla bråk som ska adderas, subtraheras eller jämföras. Två exempel kan illustrera detta:

Exempel 1: Skillnad

Vid slutet av skolåret hade en tredjedel av eleverna i en skola körkort. Efter sommarlovet hade fem sjundedelar körkort. Vilken andel av skolans elever fick körkort under sommarlovet?

Här blir passbiten $\frac{1}{21}$ och svaret $\frac{8}{21}$ eftersom

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{3} = \frac{15}{21} - \frac{7}{21} = \frac{8}{21}.$$

Exempel 2: Jämförelse

Två tredjedelar av skolans elever kan tala franska, fem sjättedelar kan tala tyska och åtta niondelar engelska. Vilken grupp är störst och vilken är minst?

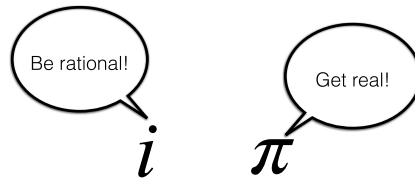
Här blir enheten $\frac{1}{18}$ och svaret att andelen elever som kan engelska är störst och andelen elever som kan franska är minst eftersom

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{18} < \frac{5}{6} = \frac{15}{18} < \frac{8}{9} = \frac{16}{18}.$$

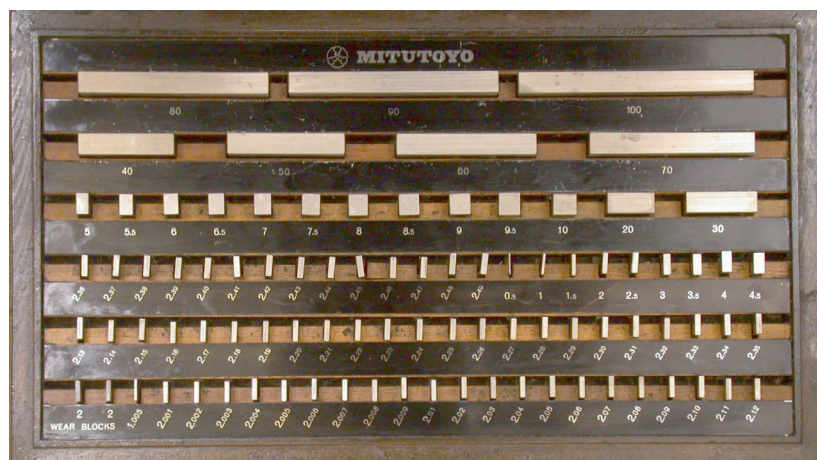
Låt oss nu återvända till bråket $\frac{3}{5}$. På svenska heter det *tre femtedelar*, men på många andra språk heter det helt enkelt något motsvarande *tre femte*, med ordningstalet *femte* och utan att några delar nämns, t ex på engelska *three fifths*, på polska *trzy piąte*, på nederländska *drie vijfde*, på franska *trois cinquièmes* och liknande på grekiska. Medför detta att talarna av dessa språk tänker på ett annat sätt om talet? Är det möjligt att det är därför elever och lärare i Sverige matas med bilder av bråk representerade av sektorer i en cirkelskiva och att därför andra representationer av tal i bråkform inte får tillräcklig uppmärksamhet? Vi tänker här framförallt på begreppet andel. I Johannes uppenbarelse berättas att "tredjedelen av träden brändes upp"; på grekiska uttryckt som det tredje av träden. Då tänker man på ett av tre träd, och därmed också på andelen av alla träd, inte på tårtbitar.

Rationella och irrationella tal

På så gott som alla germanska och romanska språk – och även på många slaviska språk – heter ett tal som är kvoten av två heltal *rationellt tal*, med några små variationer i stavningen (*rational, rasjonal, rationale, racional, ...*). Anledningen till att talet heter så är att det kan framställas som en kvot, alltså som ett förhållande mellan två hela tal, *ratio*. Ett *irrationellt tal* kan inte framställas så. Det tråkiga med namnet är att de flesta elever kanske förknippar namnet med en annan betydelse av orden *rationell* och *irrationell* – alltså förnuftig, logisk och motsatsen till dessa – snarare än med kvoten.



Skämtet här ovan låter sig inte överföras från engelska till polska då man på polska använder en annan mental bild för termerna. Rationellt tal heter *liczba wymierna* och irrationellt tal *liczba niewymierna*. Ordet *wymierny* har också en vardaglig betydelse, framförallt i frasen *wymiernie korzyści* 'konkreta (betydande/påtagliga/mätbara/kännbara) fördelar'. Ordens ursprung ligger i verbet *mierzyć* 'att mäta'. Ett (positivt) tal är rationellt om man kan mäta en sträcka med längd uttryckt med detta tal med hjälp av en enhet $1/n$ för något positivt heltal n . För det rationella talet $4\frac{2}{7}$ kan enheten (passbiten) vara $1/7$ och längden 30 enheter – det går åt 30 passbitar för att man ska få exakt fyra och två sjundedelar. För negativa tal undersöker man förstas sträckan med längden minus talet. Och, till slut, ett tal är irrationellt (*liczba niewymierna*) om sträckor med längden uttryckt med detta tal (eller talet med ett minustecken) inte kan mätas upp med hjälp av någon enhet $1/n$, där n är ett positivt heltal – det finns ingen passbit som duger. Vi erinrar här om Carl Edvard Johanssons passbitar, som kunde fogas tätt ihop och som en gång hade stor betydelse för noggranna konstruktioner.



Kommensurabilitet

Trots att begreppet *kommensurabilitet* inte är alltför komplicerat förekommer det inte i den svenska läroplanen. Två sträckor kallas för *kommensurabla* om de har ett gemensamt mått, dvs att de kan mätas med samma enhet (samma passbit) som ryms ett helt antal gånger i båda sträckorna. Så är till exempel alla par av sträckor med rationell längd kommensurabla: ett gemensamt mått är talet 1 delat med deras minsta gemensamma nämnare (eller 1 om båda längderna är heltal). Ingen sträcka med rationell längd är kommensurabel med en sträcka med irrationell längd. Två sträckor med irrationella längder kan dock vara kommensurabla. Till exempel är $\frac{1}{45}\sqrt{2}$ ett gemensamt mått (en passbit) för $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ och $\frac{2}{9}\sqrt{2}$. Två tal a och b är i sin tur kommensurabla om sträckorna med längderna $|a|$ och $|b|$ är kommensurabla.

Ordet *kommensurabel* är antagligen rätt så intetsägande för svenskspråkiga elever som inte är språkintresserade. På polska har man dock bokstavligen översatt det latinska namnet till *odcinki wspólnierne*, alltså 'tillsammans mätbara sträckor'. Ordet *wspólnierny* har, precis som ordet *wymierny*, en vardaglig betydelse. Frasen *jest wspólnierny z* betyder 'står i proportion till, motsvarar'.

Ett måttfullt förslag

Det har ett visst värde att de tre orden *rationell*, *irrationell* och *kommensurabel* har samma kärna på polska: *wymierny*, *niewymierny* och *wspólnierne*, och att det finns ett tydligt samband mellan dessa begrepp och processen att mäta längden på sträckor. Detta hör nära samman med själva sättet att tänka på tal i bråkform, med nämnaren som nämner en enhet och täljaren som *täljer*, dvs räknar, antalet enheter i sträckan. Plötsligt hänger allt ihop och man kan underlätta inlärningsprocessen. Det är inget konstigt med att mäta längden på sträckor. Om man ville skapa svenska termer enligt den polska modellen skulle man kunna använda idén med passbitarna:

- ◇ rationellt tal (*liczba wymierna*): passbart tal
- ◇ irrationellt tal (*liczba niewymierna*): icke passbart tal
- ◇ kommensurabla tal (*liczby wspólnierne*): sampassbara tal.

Man kan ju alltid fundera på saken.

Även ordet *mätbar* på polska, *mierzalny*, har sitt ursprung i verben *mierzyć* 'att mäta', och detta är förstås en annan sort mätning: alla sträckor är ju mätbara! Detta är dock begrepp som eleverna ser först på universitetet och då är risken för förvirring liten. En sak till som man kan nämna är att ordet *mierny* också har en annan betydelse: 'medioker', 'medelmåttig'; det är också namnet på betyget E i skolan; det är dock inte associationen som orden *wymierny*, *niewymierny* och *wspólnierne* väcker!

LITTERATUR

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
Online Etymology Dictionary, www.etymonline.com