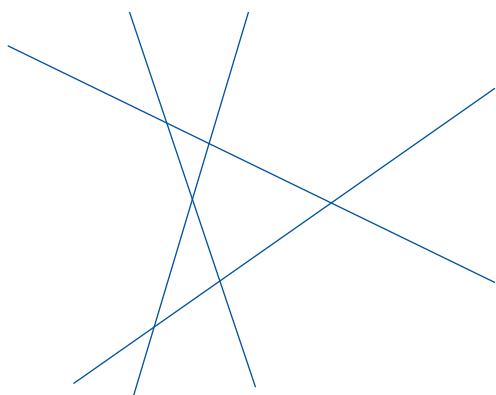


# Ett undersökande arbets sätt i geometri

Många geometriska samband kan undersökas med ett laborativt arbets sätt. Här visar artikelförfattarna några av möjligheterna med programmet *The Geometer's Sketchpad* och vilka resultat som kan anas i behandlingen av de bilder som arbetas fram.

**I** en geometrikurs för blivande tidigare- och senare-lärare vid Jönköpings högskola, fick en av studenterna följande uppgift:

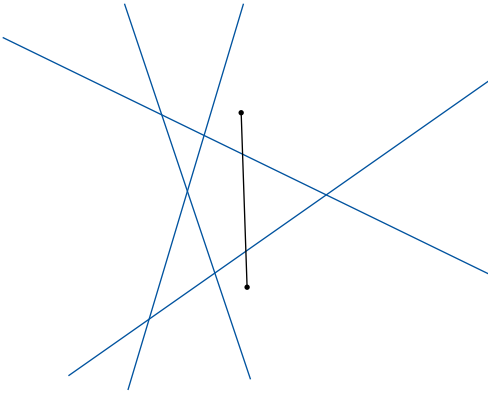
Fyra korsande linjer bildar fyra trianglar som i figuren. Undersök samband mellan de ingående triangelns egenskaper med avseende på medianer, höjder, omskriven cirkel och inskriven cirkel. Utför dina konstruktioner och undersökningar med hjälp av datorprogrammet *The Geometer's Sketchpad*. Argumentera för dina slutsatser!



Veronica: Jag startade med att i *The Geometer's Sketchpad* (GSP) konstruera de fyra korsande linjerna som bildar fyra trianglar för att kunna undersöka sambanden i de ingående triangelns egenskaper med avseende på höjder, medianer, omskriven cirkel och inskriven cirkel.

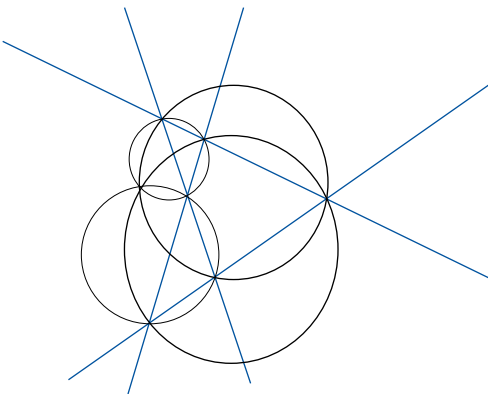
## Triangelns höjder

Därefter valde jag att börja undersöka sambandet mellan höjderna i de olika ingående triangelna. Höjderna konstruerade jag med hjälp av en normal från triangelhörn till motstående sida eller sidans förlängning. Höjderna i en triangel skär varandra i en gemensam punkt. När jag hade gjort klart min konstruktion tyckte jag att de fyra olika skärningspunkterna såg ut att ligga på en rät linje. För att undersöka om detta antagande stämde markerade jag de yttre skärningspunkterna och konstruerade ett segment där emellan. Det visade sig att antagandet var korrekt. Hur jag än flyttade figuren så låg höjdernas skärningspunkter på en rät linje. De olika höjdernas skärningspunkter i de ingående triangelna ligger på en rät linje. Se bild överst på nästa sida.



## Omskriven Cirkel

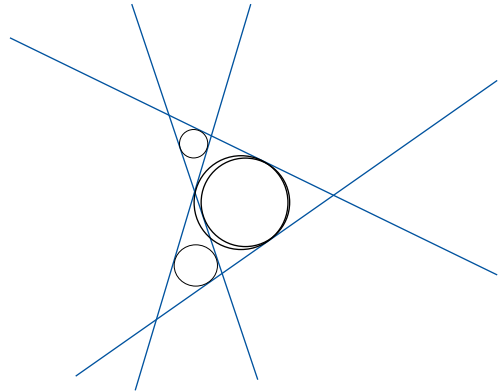
I nästa moment undersökte jag de ingående trianglarnas omskrivna cirklar. Mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en gemensam punkt, den omskrivna cirkelns medelpunkt. Medelpunkten för den omskrivna cirkeln kan ligga utanför triangeln precis som skärningspunkten till höjderna. För att få den omskrivna cirkeln markerar jag den omskrivna cirkelns medelpunkt och ett av hörnen i triangeln och konstruerar den omskrivna cirkeln. För att kontrollera att jag gjort rätt varierar jag läget för linjerna för att se om alla cirklar följer med. Det samband som jag kan se är att de omskrivna cirklarna skär varandra i en och samma punkt.



## Inskreven cirkel

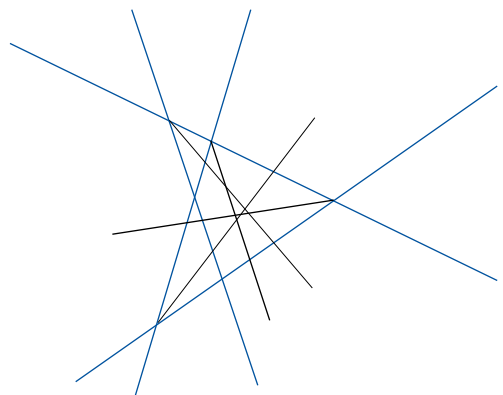
För att konstruera de inskrivna cirklarna började jag med att dra bisektriserna till vinklarna i trianglarna. Bisektriserna delar vinkeln mitt itu och skär varandra i en gemensam

punkt, den inskrivna cirkelns medelpunkt. Därefter drog jag en vinkelrät linje från en av sidorna genom bisektrisens skärningspunkt i varje triangel. Först markerade jag den inskrivna cirkelns medelpunkt och därefter den punkt som blev där sidans linje och den vinkel räta linjen korsades. När jag gjort det valde jag att konstruera en cirkel som har medelpunkten som mittpunkt och som skär igenom den andra punkten som jag valde, på så sätt fick jag fram den inskrivna cirkeln i varje ingående triangel. Det samband som jag kan se är att om de små trianglarna är lika stora, så ligger de inskrivna cirklarna för de stora trianglarna på varandra.



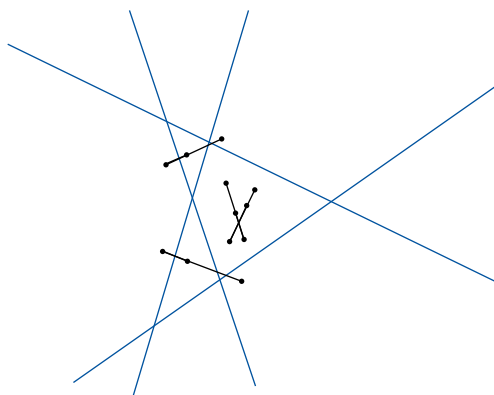
## Medianer

Genom att konstruera en linje från vinkeln till motsatta sidans mittpunkt i varje triangel bildas en skärningspunkt i varje triangel, triangelns tyngdpunkt. Något samband mellan de olika medianerna i de olika ingående trianglarna har jag inte kunnat upptäcka.



## Eulers linje

Sist men inte minst så undersökte jag det som kallas Eulers linje i de ingående trianglarna. Här har jag använt mig av höjdernas skärningspunkt H, medianernas skärningspunkt M och omskrivna cirkelns medelpunkt O. Mellan O och H har jag lagt ett segment. Segmentet går i en rät linje genom O, M och H, detta är Eulers linje. Det samband som finns är att hur jag än ändrar på trianglarna så ligger punkterna på en rät linje. Ytterligare något är att hur jag än flyttar på trianglarna, gör dem större eller mindre, så korsas Eulers linje i de stora ingående trianglarna.



## Sammanfattning

Efter att jag har undersökt de olika trianglarna i *The Geometer's Sketchpad* upptäckte jag några olika samband gällande bland annat höjdernas skärningspunkt, omskrivna cirkeln, inskrivna cirkeln och Eulers linje. När det gäller medianen har jag inte kunnat se något samband.

Jag har lärt mig att använda *The Geometer's Sketchpad*. Med hjälp av det programmet har jag också lärt mig att konstruera och undersöka olika geometriska samband. Jag anser att det är till stor hjälp för förståelsen av geometriska samband att få något konkretiserat på det sätt som man får med hjälp av *The Geometer's Sketchpad*. Mer specifikt har jag också lärt mig att de omskrivna cirkelarna skär varandra i en och samma punkt.

En demoversion och mer information om programmet *The Geometer's Sketchpad* finns att hämta på [www.keypress.com/sketchpad](http://www.keypress.com/sketchpad). På Nämnares webbplats finns en tillhörande GSP-fil till vart och ett av de olika moment som beskrivs i denna artikel.

---

Not: Det samband för trianglarnas höjder som Veronica upptäckte kallas ibland Wallace's theorem och punkten för de omskrivna cirkelns skärningspunkt kallas Miquels punkt.