

Riskorn, schack och perfekta tal

Att undersöka, hitta och generalisera mönster är ett naturligt arbetsätt inom matematiken. I en resa från det klassiska problemet med riskorn på ett schackbräde tar vi vägen via talföljder och kommer till de perfekta talen – hela tiden på jakt efter intressanta samband värda att undersöka. Som av en händelse passerar vi också förbi flera centrala begrepp inom den grundläggande aritmetiken.

Matematiken verkar för många elever framstå främst som en stor samling räkneregler. Troligen bär skolans matematikundervisning en del av skulden till detta och skolan har då misslyckats med uppgiften att bibringa en god taluppfattning. När lärarens roll reduceras till hjälprea, som får rycka ut när en elev kör fast och inte mår med problem av ettstegskaraktär, blir möjligheten att styra adepterna mot de stigar som leder till intressanta iakttagelser och samband liten.

Goda räknefärdigheter kan istället uppnås som biprodukt till ett arbetssätt som gör eleven till medaktör istället för ett offer som ständigt behöver hjälp. De presenterade problemen kan med fördel vara av flerstegsnatur och ska helst kunna leda till generaliseringar eller nya upptäckter. I denna artikel presenteras några förslag på sådana problem.

Schackmatematik

Det klassiska problemet som handlar om belöning i form av riskorn på ett schackbräde är ett bra och rikt problem. Den man som hade konstruerat det formidabla spelet

schack fick önska sig något värdefullt av den överförtjuste kungen. Monarken blev förvånad över uppfinningsmannens anspråkslöshet när gåvan skulle bestå av riskorn. Antalet sådana bestämdes enligt följande regel: ett korn skulle lämnas för första rutan på ett schackbräde, två korn för andra rutan, fyra för tredje, åtta för fjärde och så ändå till den sista rutan. Hur många korn skulle monarken överlämna till upphovsmannen?

Man kan lämpligen starta med att försöka lägga ut högar med riskorn. Dessa kan gärna placeras på ett schackbrädes fält. Snart inser man hur snabbt högarna växer och överger proceduren på grund av att rutornas utrymme börjar bli knapp redan efter sex steg. Men man kan ju skriva tal för dessa mängder: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 osv. Det är lätt att inse att det blir en maratonuppgift att först räkna ut hur många korn som finns på de enskilda rutorna och sedan till råga på detta behöva lägga ihop de 64 mängderna. Istället kan man undersöka om det finns något mönster i *partiella summor*: 1, 3, 7, 15, 31, 63, dvs summan av korn i den första rutan, de två första rutorna, de tre första rutorna och så vidare. Dessa kan med fördel skrivas i en tabell jämte de enskilda rutornas mängder.

Rutans nummer	1	2	3	4	5	6	7
Antal korn på rutan	1	2	4	8	16	32	64
Summa korn tom rutan	1	3	7	15	31	63	127

Man kan inte undgå iakttagelsen om sambandet mellan talen som ligger i mellersta och de nedre raderna. Man ser tydligt att varje tal i den nedre raden kan fås genom subtraktion med ett från det tal i mellanraden som ligger ett steg längre fram. Detta föder förhoppningsvis en idé om att addition av 64 termer går att ersätta med en enkel subtraktion med 1. Men vi har fler hinder på vägen. Vi vet ju inte det talet som skall subtraheras med 1. Hur hittar man det? Talet måste motsvara antalet i rutan som är ett mer än antalet rutor på schackbrädet, dvs 65.

Antalet riskorn som skulle placeras på den rutan kan man få genom successiva fördubblingar vilket kräver många enkla multiplikationer. Ett bra sätt är att anteckna det vi skall utföra utan att räkna ut det. Det sätet kan ge viss fingervisning och kanske besparingar i det mödosamma arbetet. Det vi får blir: 1, 2, 2·2, 2·2·2, 2·2·2·2 osv. Till att börja med blir man motiverad till att använda ett annat skrivsätt som kortar ner skrivproceduren.

Här är det hög tid att införa potenser om man inte redan gjort det. Om $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ är det naturligt att $2 = 2^1$ och $1 = 2^0$. 2^3 är ju hälften av 2^4 . Av samma anledning är 2^0 hälften av 2^1 ty det innehåller en 2-faktor mindre och därmed är $2^0 = 1$. Vi gör en ny tabell där vi för in vår tvåpotensframställning av antal korn på de enskilda rutorna.

Rutans nummer	1	2	3	4	...	64	65
Antal korn i potensform	2^0	2^1	2^2	2^3	...	2^{63}	2^{64}

Man kan nöja sig här och konstatera att mannen begärde $(2^{64} - 1)$ riskorn. Det finns dock mycket mer att hämta i uppgiften.

Om vi försöker ange talet i ickepotensform, måste vi verkligen utföra de 63 multiplikationerna som vi helst skulle slippa? 2^{64} betyder ju en produkt av 64 stycken 2-faktorer. Om vi grupperar dessa faktorer två och två får vi 32 stycken 4-faktorer som antecknas som 4^{32} . Vi kan upprepa proceduren tills vi kommer till en faktor. Detta tack vore att exponenten 64 är tvåpotens i sig självt. Vi får alltså

$$2^{64} = 4^{32} = 16^{16} = 256^8 = \dots$$

Här framträder potenslagar i ett meningsfullt sammanhang. Om man vill göra sig besväret går det att räkna ut det på en halvtimme utan miniräknare. Miniräknaren klarar högst nästa steg ty den har inte plats för så många siffror i sitt fönster.

Under uträkningarnas gång lägger man kanske märke till att vissa delprodukter upprepar sig när siffrorna i faktorerna gör det. Slutresultatet i sig självt är nog inte så åtråvärt som vinningarna under resans gång.

Geometrisk summa

Övningen ovan kan utveckla sig till andra matematiska erövringar. Det vi har studerat är exempel på en geometrisk summa. En geometrisk talföljd kännetecknas av att kvoten mellan två konsekutiva element är konstant, i vårt fall lika med 2. Vi kan undersöka summor av geometriska talföljder med första elementet 1 och kvoter: 3, 4, 5, på liknande vis. Tabell 1 visar en serie med kvot 3.

Om vi upprepar proceduren och jämför summor med tal som står ett steg till höger i raden ovanför kommer vi fram till att varje summa kan fås genom subtraktion med 1 ifrån elementet med 1 nummer högre än summan, åtföljd av division med 2. Med andra ord blir den n :te summan

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Vi blickar på motsvarande vis mot följden med kvoten 4 som vi kan se i tabell 2. Om vi gör som ovan får vi följande formel

$$S_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Tabell 1

Elementets nummer	1	2	3	4	5	6	...	n
Element	$3^0=1$	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$		3^n-1
Summa	1	4	13	40	121			

Tabell 2

Elementets nummer	1	2	3	4	5	6	...	n
Element	$4^0=1$	$4^1=4$	$4^2=16$	$4^3=64$	$4^4=256$	$4^5=1024$		4^n-1
Summa	1	5	21	85	341			

Detta kan lätt generaliseras till en summaformel med godtycklig naturlig kvot q nämligen

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

och om man hade startat med ett annat element än 1, låt oss säga a , så hade distributiva lagen gett oss det mera allmänna resultatet

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \\ &= a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= a \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Styrkan i detta ligger i att innan man härleder formel för godtyckliga reella tal q så har man gjort en upptäckt först och detta är en naturlig gång i matematiskt arbete.

Perfekta tal

Schackproblemet kan agera inspirationskälla till ett område inom talteori. Detta brukar vara högt uppskattat av de flesta elever och studenter. Man kan starta med att bedöma olika naturliga tal ur "bekvämlighets-synpunkt". Oftast inser man utan övertalningsförsök att 24 känns bekvämare än 22 exempelvis. Detta beror på att en grupp föremål om 24 kan delas på fler olika sätt i lika stora grupper än 22 kan.

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \\ 22 &= 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11 \end{aligned}$$

Talet 24 har alltså åtta faktorer av vilka sex är äkta. Faktorerna 1 och 24 kallar vi triviala av uppenbar anledning. Talet 22 är betydligt mer anspråkslös ur den synpunkten. Istället för att tillämpa antal faktorer i ett tal som mått på deras flexibilitet har man ett annat system. Systemet tar även hänsyn till själva talets storlek. I annat fall hade många stora tal hamnat i den bekvämare kategorin mestadels på grund av deras storlek medan små tal inte hade fått en chans.

Man har bestämt att dela tal i *rika* och *fattiga* enligt följande: Om talets faktorsumma exklusive den faktor som är talet självt är högre än talet kallar vi talet för rikt, om däremot samma förfarande leder till mindre summa än talet självt är talet fattigt. Här nedan exemplifieras tillvägagångssätt med talet 24:

$$12 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 > 24$$

gör 24 till rikt. Med talet 22 får vi

$$11 + 2 + 1 = 14 < 22$$

vilket gör 22 till fattigt. Man kan med fördel låta sin klass välja tal och kategorisera i fattiga och rika. Uppgiften har nog inte så stort värde i sig men överträffar ändå många vanligt förekommande multiplikationstabellövningar. Det som inträffar efter en viss tid är att någon konfunderad elev villrådigt frågar "Var skall jag placera det här? Det är varken rikt eller fattigt." Detta brukar liva upp hela gruppen, i synnerhet om man berättar att det finns betydligt fler tal med den egenskapen, dvs att faktorsumman

är lika med talet självt. Arbetet blir mestadels febrilt och efter ett tag dyker 6 upp om det förra var 28 eller 28 om det förra var 6. Man kan se nästan vädjande blickar då man avbryter arbetet med förkunnelsen att sådana tal, som kallas *perfekta* tal, är sällsynta och det kan ta dagar att hitta nästa. Men som tur är så finns det tröst. Det finns nämligen perfekta tal som följer ett visst mönster.

Ett bra sätt att gå vidare, och möjligen det enda, är att uppdelade de två funna perfekta talen i primfaktorer. Om man inte har berört primtalsbegreppet tidigare så finns det ett ypperligt tillfälle nu. Primtal är ju de absolut fattigaste tal som finns. De innehåller endast triviala faktorer och följaktligen blir deras faktorsumma 1.

$$\begin{aligned}6 &= 2 \cdot 3 \\ 28 &= 2 \cdot 2 \cdot 7\end{aligned}$$

Det kanske ser ut att ge så mycket information men om man har god taluppfattning, som inte byggs upp genom ensidigt räknande utan genom talanalys, så finns det goda förutsättningar för elever att hitta spåret. De gissar snabbt att nästa tal kanske har formen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot p$, där p är ett primtal. För att hitta ett fungerande primtal kan man ha olika strategier, men jag bestämmer mig här att testa med några primtal:

$$\begin{aligned}2^3 \cdot 11 &= 88 \\ 2^3 \cdot 13 &= 104 \\ 2^3 \cdot 17 &= 136\end{aligned}$$

Vid undersökning av 88 får vi faktorsumman 92. 104 ger något närmare resultat nämligen på 106 och 136 får också differensen 2 mot det förväntade värde fast som underskott i kontrast mot de andras överskott.

Ett annat sätt att uttrycka detta är att om vi väljer primtalet 11 får vi ett överskott på 4 och väljer vi 13 får vi ett överskott på 2. Primtalet 17 ger däremot ett underskott på 2. Man kan inse att ett större primtal än 17 ger ett ännu större underskott än primtalet 17 osv.

Finns det då något tal som inte orsakar någon avvikelse? Tankarna går tvångsmässigt mot 15. En del inser det omöjliga medan andra testar. Till sin besvikelse konstaterar man att talet är rikt med råge.

Har man arbetat enligt god matematisk sed och inte förkastat sina gamla resultat så märker man förhoppningsvis att faktoriseringarna av $2^3 \cdot 15 = 120$ har både likheter och olikheter med de tidigare. Stryker man över de faktoriseringar som inte har motsvarighet i de tidigare dvs $3 \cdot 40$, $5 \cdot 24$, $6 \cdot 20$ och $10 \cdot 12$ så skulle 120 kunna vara perfekt. Här framkommer tydligt en anledning till att 120 inte är perfekt. Talet 15 är ju inte primtal och ger följaktligen upphov till många extra faktorer. Slutsatsen blir att $2^3 \cdot p$ inte kan vara perfekt för något primtal p . Men om talet 15 hade varit primtal så skulle 120 bli perfekt. Om vi för ett ögonblick kallar 120 för ett falskt perfekt tal så har vi följande lista

$$\begin{aligned}6 &= 2 \cdot 3 \\ 28 &= 2 \cdot 2 \cdot 7 \\ 120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 \text{ (falskt perfekt tal)}\end{aligned}$$

Genom att leta efter mönster i denna lista kan vi förhoppningsvis hitta nästa kandidat till perfekt tal. Ett sätt att gissa fortsättning är att blicka tillbaka på det ursprungliga problemet med riskorn där de partiella summorna var

$$\begin{aligned}1, 3, 7, 15, \dots &= \\ 2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, \dots\end{aligned}$$

En möjlig gissning är alltså

$$2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496.$$

som faktiskt visar sig vara ett perfekt tal. Nyckeln till detta är att 31 är ett tal på formen $2^n - 1$ som samtidigt är primtal, till skillnad från 15. Det visar sig att de jämna perfekta talen är exakt talen på formen $2^m(2^{m+1} - 1)$ där talet $2^{m+1} - 1$ är ett primtal. Detta är inte så svårt att bevisa, men det går något utanför ramen för denna artikel.

Den ovan beskrivna proceduren visar ett matematiskt sätt att arbeta där det inte finns endast rätt eller fel. Och om man inte hittar det man letar efter med det samma, så kan de skenbart felaktiga resultaten leda till nya tankar och strategier.