Problemlösning hos unga elever

BENGT JOHANSSON

Under de senaste 5—6 åren har forskningen kring den grundläggande matematikundervisningen gjort mycket stora framsteg. Det gäller speciellt barns taluppfattning och hur barn tänker när de räknar och löser problem. *Bengt Johansson* presenterar här några av de viktigaste resultaten från denna forskning.

Problemlösning — inget nytt

Problemlösning har tidigt varit ett mycket viktigt inslag i den grundläggande matematikundervisningen i vårt land. Som exempel kan nämnas att när Fritz Wigforss på 1930-talet utarbetade diagnosinstrument och standardprov för folkskolans matematikundervisning, ansåg han att problemlösningstestet var det viktigaste. Vid normeringen av Sveriges första standardprov i matematik gav han t ex elevernas problemlösningsförmåga dubbelt så stor vikt som deras aritmetikkunskaper (Johansson 1984, Wigforss 1934, 1938, 1956).

Problemlösningsarbetet har i skolan, nästan uteslutande, utgått från problemställningar, givna i form av textuppgifter i våra läroböcker. Hur detta arbete brukar gå till i svenska klassrum, hur komplicerad relationen är till olika typer av räknefärdigheter och hur lätt eleverna kan komma in på en icke önskvärd problemlösningsaktivitet, har jag beskrivit tidigare i Nämnaren (Johansson 1983 a, b) och nöjer mig därför här med att hänvisa till dessa artiklar.

De s k benämnda uppgifterna har väl aldrig riktigt bra kunnat simulera verkligheten utanför skolan. Men när vårt samhälle under 50- och 60-talen blev allt mer komplicerat hängde skolmatematikens innehåll inte alls med. Det ställdes allt större krav på olika vardagskunskaper i matematik, samtidigt som allt fler elever gick allt längre i skola. Vardagsmatematiken i våra kursplaner och läromedel spårade helt enkelt ur. Detta var en av de viktigaste orsakerna till att "den nya matematiken" från USA relativt lätt kunde konkurrera ut "den gamla". Ingen kunde presentera ett konkurrenskraftigt alternativ, även om vissa försök gjordes (Wigforss och Roman 1951, Wigforss 1952, Wigforss och Nilsson 1952, Lindström 1968, Johansson 1986, Johansson och Kilborn 1986).

Under början av 70-talet startade i USA den s k "back to basic-vågen". Den var en reaktion mot "den nya matematiken" och bl a ett resultat av upprepad utvärdering och analys av elevernas allt sämre räknefärdigheter. Fortsatt utvärdering visade på katastrofalt dåliga resultat på enkla vardagsproblem, speciellt uppgifter som kräver två eller flera uträkningar (Carpenter m fl 1980, 1981). Satsningen på basfärdigheter övergick då i en kraftig satsning på "problemsolving" (Johansson 1982). Kulmen nåddes 1980 när NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) publicerade sin "AGENDA FOR ACTION". Under rubriken "Recommendations for school mathematics of the 1980s" inledde man t ex med:

> *Problem-solving must be the focus of the school-mathematics in the 1980s*

Att vi här i vårt land har påverkats mycket starkt även av denna utveckling framgår inte minst av att det första huvudmomentet i gällande kursplan i matematik har rubriken Problemlösning.

Satsningen på "problemsolving" i USA kom att i hög grad gälla det vi i Sverige idag brukar kalla matematikdidaktiskt forsknings- och utvecklingsarbete. En lång rad forskningsprojekt med inriktning mot problemlösning startade i slutet av 70-talet. De projekt som utan tvekan varit mest framgångsrika har letts och leds av prof Thomas P. Carpenter vid University of Wisconsin, Madison. I första hand har man studerat hur unga elever löser enkla additions- och subtraktionsproblem. Med utgångspunkt i en mycket noggrann analys och beskrivning av olika typer av additions- och subtraktionsproblem (Carpenter 1985) har man intervjuat elever i åldern 5—9 år. I ett tidigare nummer av Nämnaren har jag sammanfattat vilka uppgiftstyper som varit föremål för dessa intervjuer (Johansson 1983 b).

Utgå från vad barn kan!

Istället för att som Piaget och hans lärjungar, studera *feltyper* och elevernas *missuppfattningar* har man koncentrerat sig på *vad barn faktiskt kan* (Groen & Kieran 1983). Och till skillnad från tidigare forskning om problemlösning som ofta utgått från kluriga, fristående uppgifter, typ

"Towers of Hanoi" (och där man försökt studera den "rena" problemlösningsförmågan), har man studerat hur elever tänker när de löser uppgifter som finns (eller borde finnas) i våra vanliga läromedel. Man använder helt enkelt matematikämnets innehåll för att man *i första hand vill förbättra matematikundervisningen* och inte som exempel i en annan teoribildning — och det är en stor skillnad!

De viktigaste resultaten från Carpenter och hans medarbetare visar, att barnen i huvudsak använder sig av tre kvalitativt skilda förfaringssätt, när de löser additions- och subtraktionsproblem. I följande beskrivning har jag använt problem som kan lösas med $6+8=14$ respektive $12-3=9$:

Addition

I Uppräkning av alla

● ● ● ● ● ●

● ● ● ● ● ● ● ●

"En, två, tre, fyra, fem, sex, . .
sju, åtta, nio, tio, elva, tolv,
tretton, *fjorton*"

IIa Uppräkning från början

"En, två, tre, fyra, fem, sex, . . .
sju, åtta, nio, tio, elva, tolv
tretton, *fjorton*"

IIb Uppräkning från första

"Sex, . . . sju, åtta, nio, tio,
elva, tolv, tretton, *fjorton*"

IIc Uppräkning från största

"Åtta, . . . nio, tio, elva, tolv
tretton, *fjorton*"

IIIa Härledd tabell

"Sex plus sex är tolv.
Tolv plus två är *fjorton*"

IIIb Automatiserad tabell

"Sex plus åtta är *fjorton*"

Uppräkning av alla (I) innebär att barnen räknar föremål ett och ett. I exemplet ovan räknar de först upp 6, sedan 8 och därefter alla. Den andra kategorin (II) innehåller i huvudsak tre olika typer av ramsräkningsrutiner — uppräkning från början, från första och från största. I den första av dessa strategier vågar barnet inte börja på 6 eller 8 utan måste "ta sats" från ett. För dessa barn är ofta räkneramsan en odelbar helhet. Samtliga tre strategier kräver barnet på någon form av *dubbelräkning*. Eftersom hjärnan har svårt att administrera denna dubbelräkning, tar barnen ofta till fingrarna för att vara säkra på när det är dags att sluta ramsräkna. Den tredje kategorin (III) innehåller mer eller mindre automatiserade tabellkunskaper. De s k "härledda" tabellkunskaperna finns i ett stort antal varianter, ofta uppbyggda kring lättare åtkomliga "dubblor" och kort upp- eller nedräkning.

Subtraktion

Ia "Ta bort".
Uppräkning av återstoden

● ● ● ● ● ● ● ● ● □ □ □

"En, två, tre.
En, två, tre, fyra, fem, sex,
sju, åtta, *nio*"

Ib "Lägga till".
Uppräkning av tillägget

● ● ● □ □ □ □ □ □ □ □ □

"En, två, tre, . . . fyra, fem, sex,
sju, åtta, nio, tio, elva, tolv.
En, två, tre, fyra, fem, sex,
sju, åtta, *nio*"

Ic "Jämföra".
Uppräkning av överskottet

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
□ □ □

"En, två, tre, fyra, fem, sex,
sju, åtta, nio, tio, elva, tolv.
En, två, tre.
En, två, tre, fyra, fem, sex,
sju, åtta, *nio*"

IIa Nedräkning till
återstoden

"Tolv, . . . elva, tio, *nio*"

IIb Nedräkning till
delen

"Tolv, . . . elva, tio, nio,
åtta, sju, sex, fem, fyra, tre.
Nio"

IIc Uppräkning från
delen

"Tre, . . . fyra, fem, sex, sju,
åtta, nio, tio, elva, tolv.
Nio"

IIIa Härledd tabell

"Tre minus två är ett.
Tio minus ett är *nio*"

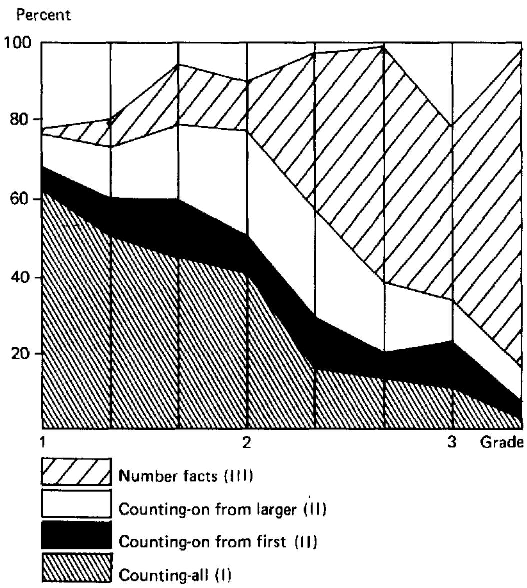
IIIb Automatiserad tabell

"Tolv minus tre är *nio*"

I subtraktion har man också funnit tre kategorier (I—III). Beroende på problemtyp löser barnen uppgiften med material genom att *ta bort, lägga till* eller *jämföra*. Barnens strategier visar på ett mycket fint sätt subtraktionsbegreppets många ansikten. Den andra kategorin (II) består liksom i addition av olika typer av ramsräkning, två med nedräkning och en med uppräkning. Den dubbelräkning som eleverna måste utföra vid nedräkningen är emellertid betydligt mer krävande än den i addition. *Eleverna måste nämligen kunna räkna upp samtidigt som de räknar ner!* Lägg speciellt märke till skillnaden mellan att räkna ner *till 3* och att räkna ner *3 steg*. (Skillnaden mellan de båda strategierna framgår kanske ännu tydligare om man jämför 401 - 2 med 401 - 398.) Slutligen finns en lång rad olika, mer eller mindre automatiserade tabellkunskaper (III).

Barns tankeutveckling

Det kanske mest intressanta är att man också studerat hur elevernas tänkande förändras med tiden.



Strategy use over time on join addition problems with larger number facts and manipulative objects available. (Reprinted from Carpenter & Moser (1984) by permission of the Journal for Research in Mathematics Education.)

Innan eleverna har fått formell undervisning i matematik (eleverna börjar åk 1 ett år tidigare än i Sverige) kan hela *80 %* lösa ett problem som kräver en addition av typen $6+8=14$. Flertalet använder då den strategi jag ovan kallat I men det finns också ganska många elever som redan i 6-årsåldern använder strategi II och III. Vissa elever *förädlar* sedan successivt sitt tänkande och *byter upp sig* till allt bättre tankeformer medan andra behåller det förfaringssätt de hade när de kom till skolan. Medan lösningsfrekvensen varierar ganska lite (mellan 80 % och 98 %) så sker stora kvalitativa förändringar av elevernas tänkande. Motsvarande förändring sker också i subtraktion.

Man kan då fråga sig varför vissa barn inte byter upp sig under arbetets gång utan behåller ett mer primitivt tänkande. Jag tror inte att det beror på för lite färdighetsträning. Istället tror jag att färdighetsträningen för dessa barn sätts in vid fel tillfälle och att de fått den uppfattningen att man skall försöka få så många rätt som möjligt — oavsett vilken tankekvalitet som de använder sig av vid färdighetsträningen. Och så upprepas och befästes tankeformer som istället borde bytas ut (Johansson 1986).

Ett genombrott

Resultaten från de senaste årens forskning om barns problemlösningsförmåga har lett till ett genombrott vad gäller *kunskaper om barns kunskaper och färdigheter.* De visar hur viktigt det är att studera vad barn kan *i kvalitativa termer* och hur farligt det är att utvärdera matematikundervisning med enbart lösningsfrekvenser och rätt eller fel i olika typer av test.

Genom den refererade forskningen börjar vi få allt fler ''kartor'' över barnens tankeinnehåll när de möter olika delar av vår skolmatematik. Det är min förhoppning att dessa kartor skall kunna användas som verktyg i samtalen mellan lärare och elever. Kartorna gör det möjligt att förstå och utnyttja det barn redan kan. Det ger också nya möjligheter att utvärdera den egna undervisningsinsatsen.

Låt mig avsluta med att citera Thomas Carpenter när han sammanfattar sina resultat om barns tidiga problemlösningsförmåga:

> *Even before they have received formal instruction in arithmetic, almost all children exhibit reasonably sophisticated and appropriate problem-solving skills in solving simple word problems. They attend to the content of the problem; they model the problem; they invent more efficient procedures for computing the answer.* ***Given the limits of their mathematical skills, this performance is remarkable.*** *Contrast this with performance several years later, when many children solve any problem by choosing a single arithmetic operation based on surface details of the problem (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindqvist & Reys, 1980). After several years of instruction in mathematics, children abandon a reasonably good general problem-solving approach for mechanical application of arithmetic skills. This is*

foreshadowed in children's initial use of number sentences in solving word problems. They do not see that the number sentence is in any way related to the real solution which is found by modeling and counting. From the beginning they are learning that mathematics is just an exercise in symbol manipulation and is not related to real problem solving. This suggests that initial instruction in addition and subtraction may be a critical point in developing problem-solving skills and that children's later deficiencies may be traced to this point in the curriculum.

(Carpenter 1985)

Referenser

Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Jr., Lindqvist, M. M., & Reys, R.E. *Solving verbal problems, Results and implications from National Assessment.* Arithmetic teacher 28, 8—12, 1980.

Carpenter, T.P., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Jr., Lindqvist, M.M., & Reys, R.E. *Results from the Second Mathematics Assessment of Educational Progress.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1981.

Carpenter, T.P. *Learning to add and subtract: An exercise in problem solving.* In Silver, E.A. (Ed) Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale, N.J. 1985.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. *The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three.* Journal for Research in Mathematics Education 15, 179—202, 1984.

Groen, G. & Kieran, C. *In search of Piagetian Mathematics.* In Ginsburg, H.P. (Ed) The Development of Mathematical Thinking. Academic Press. New York 1983.

Johansson, B. (1982) *Matematikundervisningen i USA — och i Sverige.* Nämnaren nr 2, 82/83. Temanummer: Grundläggande färdigheter. Liber Utbildningsförlaget 1982.

Johansson, B. (1983 a) *Miniräknaren löser inte problemen.* Nämnaren nr 3, 82/83. Temanummer: Problemlösning. Liber Utbildningsförlaget 1983.

Johansson, B. (1983 b) *Problem med problemlösning.* Nämnaren nr 3, 82/83. Temanummer: Problemlösning. Liber Utbildningsförlaget 1983.

Johansson, B. (1984) *Fritz Wigforss — Utvärdering, standardprov och betyg.* Nämnaren nr 4, 83/84. Temanummer: Diagnos och utvärdering. Liber Utbildningsförlaget 1984.

Johansson, B. (1986) *Sveriges förste forskare i matematikdidaktik.* Nämnaren nr 3, 85/86. Liber Utbildningsförlaget 1986.

Johansson, B. och Kilborn, W. (1986) *Om matematikämnets innehåll och didaktik.* Kap 19 i Marton, F (red). Fackdidaktik III. Lund: Studentlitteratur (under tryckning).

Läroplan för grundskolan (Lgr 80). Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget. Stockholm 1980.

Lindström, S. *Överteoretisering av den elementära matematikundervisningen.* Almqvist & Wiksell 1968.

National Council of Teachers of Mathematics. *An Agenda For Action.* Virginia 1980.

Wigforss, F. *Rostads räkneundersökningar.* Rostads elevförbunds årsskrift 1934.

Wigforss, F. *En svårighetsskala för räkneproblem.* Rostads elevförbunds årsskrift 1938.

Wigforss, F. *Studieplan i matematik.* För fjärde, femte och sjätte skolåren vid pedagogisk försöksverksamhet i överensstämmelse med beslut av 1950 års riksdag. Studieplaner utarbetade på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission, 1952.

Wigforss, F. *Kunskapsprövningar.* (Bearbetade av Åke Edfeldt). Pedagogiska skrifter 219—221, 1956.

Wigforss, F. och Roman, A.M. *Studieplan i matematik.* För första, andra och tredje skolåren vid pedagogisk försöksverksamhet i överensstämmelse med beslut vid 1950 års riksdag. Studieplaner utarbetade på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission, 1951.

Wigforss, F. & Nilsson, H. *Studieplan i matematik.* För sjunde och åttonde skolåren vid pedagogisk försöksverksamhet i överensstämmelse med beslut vid 1950 års riksdag. Studieplaner utarbetade på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission, 1952.