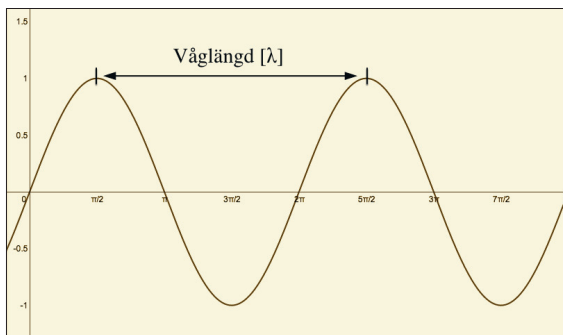


## Matematik i musiken

Musiken från hörlurarna, bullret från gatan och rösten från rummet intill, alla är de ljud och alla kan de beskrivas matematiskt. Särskilt musik kan enkelt och tydligt formuleras med hjälp av matematik, och det finns tydliga samband mellan vad som är välljudande och inte. Här delar två gymnasieelever med sig av sitt arbete i gränslandet mellan matematik och musik.



**F**örtätningar och förtunningar mellan molekyler är den fysikaliska innebörden av ordet ljud. Vanligtvis betecknas dessa med en våg där toppen på vågen representerar en förtätning och botten en förtunning. Avståndet mellan två toppar, eller för den delen två bottenar, kallas våglängd och betecknas  $\lambda$ . Antalet svängningar per sekund kallas frekvens och mäts i Hertz (Hz). En högre frekvens medför ett tonmässigt högre ljud. När flera ljudvågor till synes slumpmäs-

sigt kombineras uppfattar örat det som oväsen. I musik är det ljudvågor, toner, med tydliga frekvensförhållanden som kombineras. Det uppfattas som mer välljudande, men alla kombinationer resulterar inte i harmoniska klanger.

Frekvensförhållandet mellan två toner avgör om de låter bra tillsammans. Ju enklare förhållande, desto mer samklangiga, konsonanta, anses tonerna vara. Det enklaste förhållandet är 2:1. Utgångstonen kallas *prim* och tonen med det dubbla förhållandet kallas *oktav*. Primerna  $a^1$  med frekvensen 440 Hz har oktaverna  $a^2$ , som har frekvensen 880 Hz. Det näst enklaste förhållandet är 3:2. Här kallas den övre tonen *kvint*. Primerna  $a^1$  har kvinten  $e^2$  med frekvensen 660 Hz. Därefter kommer förhållandena 4:3, 5:4 och 6:5 och de kallas *kvart*, *stor ters* och *liten ters*. Utgår man från  $a^1$  ges tonerna  $d^2$ ,  $ciss^2$  respektive  $c^2$ . Det kan nu vara frestande att tro att nästa ton skulle ha förhållandet 7:6 men så är inte fallet! Anledningen till att mönstret bryts är fysiologisk. Den kritiska bandbredden är hörselns gräns för när två toner uppfattas som en eller två. När skillnaden mellan två toner blir för liten uppfattas de inte som självständiga och flyter ihop till ett oharmoniskt surr. För frekvenser högre än 500 Hz uppgår gränsen till ungefär 1/5 av frekvensen, vilket innebär att toner som befinner sig närmare än så, som två med det inbördes förhållandet 7:6, uppfattas som *dissonanta*. De nästkommande tonerna är istället kombinationer av de presenterade. *Sexten* kan uttryckas som primens kvarts stora ters och *septiman* kan uttryckas som primens kvints stora ters. Primerna  $a^1$  har kvarten  $d^2$  som har tersen  $fiss^2$  och den blir således  $a^1$ 's sext. På liknande sätt ges att  $giss^2$  är  $a^1$ 's septima. Förhållandet till primen blir då produkten av kvarten eller kvinten och tersen, nämligen 5:3 ( $4/3 \cdot 5/4$ ) för sexten och 15:8 ( $3/2 \cdot 5/4$ ) för septiman. Nu återstår *sekunden* som har två förhållanden. Utgår man från primen  $a$  är dennes kvint det samma som

Prim	1:1
Sekund	9:8
Liten ters	6:5
Stor ters	5:4
Kvart	4:3
Kvint	3:2
Sext	5:3
Septima	15:8
Okta	2:1

sekunden  $b^2$ 's kvart, vilket innebär att sekundens förhållande till primen blir 9:8 ( $3/2 / 4/3$ ). Om däremot  $b^2$  är prim blir ciss<sup>2</sup> sekund, vilket istället ger förhållandet 10:9. Detta eftersom  $b^2$  förhåller sig som 9:8 till  $a^1$  och  $e^2$  som 5:4, ger det att deras inbördes förhållande blir (5:4):(9:8). De senare tonerna anses inte vara konsonanta när de ljuder ensamma med primen, men i komplexa tonföljder blir läget ett annat och de kan för örat passa in väl så bra.

De rena förhållandena oktav, kvint, kvart samt stor respektive liten ters utgör grunden för i princip all västerländsk stämning- och skallära. Redan i antika Grekland började Pythagoras att utveckla ett stämningssystem baserat på rena kvinter. Efter ett evigt harvande insåg Pythagoras så småningom att hans system innehöll ett betydande fel – tonsystemet går inte jämnt ut. Tolv ovanpå varandra staplade kvinter motsvarade inte, till Pythagoras förtvivlan, sju oktaver eftersom  $(3/2)^{12} \approx 129,7$  och  $(2/1)^7 = 128$ . Denna tillsynes ringa skillnad blev benämnd *Pythagoras komma* och kom att orsaka huvudbry för musikteoretiker i flera hundra år framöver. I ett stämningssystem som alltså baseras på rena förhållanden och med ett bestämt antal toner (tolv) kommer det finnas en kvint som är en smula falsk, en så kallad vargkvint. Problemet har genom historien tacklats genom en rad begränsande kompromisser. Den mest angelägna begränsningen i rena stämningssystem är att tonartsbyte inte är möjliga, till schlagerfantasters stora förtret. Problemet löstes dock mot slutet av 1500-talet när så kallad liksvävande stämning lanserades. Genom att dela in en oktav i tolv jämnstora delar blir "alla toner lika falska". Varje halvtonsteg får således frekvensförhållandet  $2^{1/12} \approx 1,0595$  vilket i ren stämning motsvaras av  $16/15 \approx 1,0667$ . Orenheten är alltså så blygsam att den i praktiken får betraktas som en nullitet. Detta var emellertid endast en teoretisk lösning; det dröjde ytterligare några hundra år innan den praktiska tillämpningen fick fullt genomslag.

En ton alstrad av en stängaffel beskrivs som en enkel våg. Toner som däremot alstras av ett instrument är mer komplexa och karaktäristiska för varje instrument. När exempelvis en sträng slås an svänger den längs hela sin längd men även längs hälften, en tredjedel, en fjärdedel och så vidare. Samma princip gäller för luftpelare som bildas i blåsinstrument. Detta ger upphov till så kallade *övertoner* som tillsammans med *grundtonen* bildar en sammansatt ton. Det är sammansättningen av övertoner samt styrkan hos dessa som avgör ett instruments *klangfärg*, det vill säga instrumentets karaktäristiska ljud. Det som gör att vi kan urskilja enskilda instrument i en orkester som spelar enligt samma noter är alltså instrumentets uppsättning av övertoner.

För varje överton ökar frekvensen enligt ett regelbundet system. Frekvensen  $f$  för övertonen  $n$  kan uttryckas som  $f = (n + 1) \cdot g$ , där  $g$  är grundtonens frekvens. Inte alltför svåra räkneexempel visar att inbördes frekvensförhållanden mellan de fem första övertonerna svarar för oktav, kvint, kvart, stor ters och liten ters. Förhållandena som utgör grunden för västerländska stämningssystem återfinns alltså i den naturliga övertonsserien.

Pythagoras menade att "allt är tal". Så är nog inte riktigt fallet, men musiken är ett xplock som visar hur mycket i vår värld som genomsyras av matematik. ■

