# Om datorns användning i matematikundervisningen I

*Syftet med denna artikel är att diskutera, och ge några exempel på, hur datorn med fördel kan användas i matematikundervisningen. **Karl Greger** och **Thomas Lingefjärd**, Göteborg, tänker därvid inte i första hand på sådana elever som ska bli matematiker, utan på elever som i sitt yrkesliv kommer att använda matematik som hjälpmedel. För dessa elever är det av synnerlig vikt att kunna matematisera problem, dvs att kunna införa lämpliga funktioner och att kunna omformulera de ursprungliga problemen till problem om de införda funktionerna. Dessa problem kan sedan lösas med varierande datorstöd.*

Det märkliga med många av de nedan föreslagna metoderna är att de är *derivatfria* och *alltid* fungerar, om vissa lättformulerade, och genom inspektion lättkontrollerade, förutsättningar är uppfyllda.

## 1 Derivatan

Vad är viktigast — att derivera eller att använda derivatan som ett matematiskt verktyg? Krävs det intelligens för att kunna derivera? I så fall är många av de matematik-datorprogram som finns ute i handeln intelligenta.

Matematikkurserna på S, N och T-linjerna innehåller en stor mängd övningar att derivera funktioner, först enbart som rena deriveringsövningar, därefter oftast i anpassade exempel som visar, hur man använder derivatan som verktyg. Anpassningen krävs för att man skall kunna utnyttja den ytterst lilla klass av funktioner som är deriverbara för en genomsnittlig gymnasieelev. Diskussioner och begrepp som "existens" och "deriverbarhet" hinner man i allmänhet inte gå in på, och för gymnasieeleven blir det då framförallt en färdighetsträning av deriveringsregler som speglar innehållet i matematikkursen. Men är detta matematikundervisningens mål? Är inte matematik för flertalet människor i första hand ett verktyg för *problemlösning*, och kan vi lära ut något om problemlösning genom detta myckna deriverande?

Självklart krävs det träning för att nå matematiska färdigheter, likaväl som man övar upp sin skicklighet i exempelvis tennis genom att slå på en tennisboll. Men, vad är det som skall tränas, och hur tränas det? Låt oss ge ett exempel:

Be Era elever och/eller kolleger (matematiklärare) att derivera uttrycket:

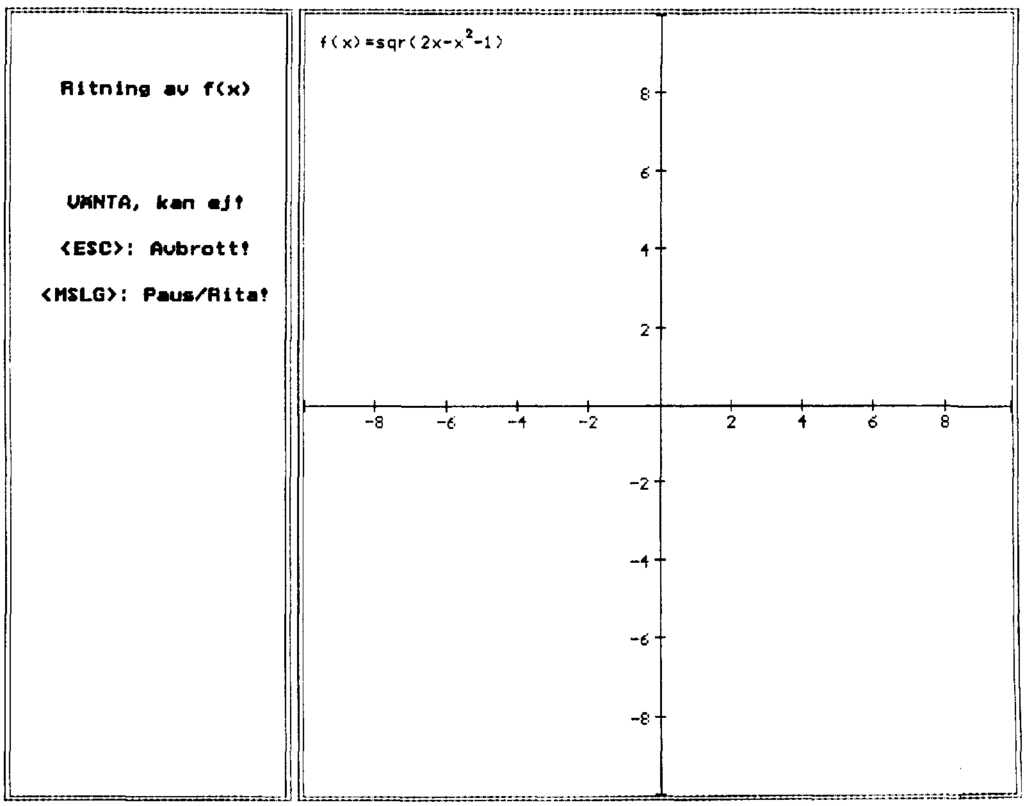
$$y = \sqrt{(2x - x^2 - 1)}$$

De flesta elever torde ge ett svar av typen

$$y' = (1 - x)/\sqrt{(2x - x^2 - 1)}$$

Prövar man med en miniräknare som kan derivera symboliskt (t ex HP 41) eller med ett datorprogram som kan detta (t ex Derive, Mathematica), överensstämmer ovanstående svar inte med miniräknarens eller datorns. Varför det är så, kan klargöras med hjälp av en ''grafisk'' miniräknare (t ex Casio 8000) eller ett funktionsritande datorprogram (t ex Matematikverkstad A).

*Funktionsverkstaden* ger:



*Tabellverkstaden* ger:

f(x)=sqr(2x-x^2-1)

| x | f(x) |
|---|---|
| -1 | Kan ej! |
| -0.8 | Kan ej! |
| -0.6 | Kan ej! |
| -0.4 | Kan ej! |
| -0.2 | Kan ej! |
| -0 | Kan ej! |
| 0.2 | Kan ej! |
| 0.4 | Kan ej! |
| 0.6 | Kan ej! |
| 0.8 | Kan ej! |
| 1 | 0 |
| 1.2 | Kan ej! |
| 1.4 | Kan ej! |
| 1.6 | Kan ej! |
| 1.8 | Kan ej! |
| 2 | Kan ej! |
| 2.2 | Kan ej! |
| 2.4 | Kan ej! |
| 2.6 | Kan ej! |
| 2.8 | Kan ej! |
| 3 | Kan ej! |
| 3.2 | Kan ej! |
| 3.4 | Kan ej! |
| 3.6 | Kan ej! |
| 3.8 | Kan ej! |
| 4 | Kan ej! |
| 4.2 | Kan ej! |

<ESC>: Avbryt! <MLSLG>: Forts!

Grafen för ovanstående uttryck y innehåller nämligen endast en reell punkt (1,0). Därför existerar inte någon derivata!

Vi tror att man på detta sätt kan ge förståelse för begrepp som man vanligtvis inte hinner öva in. Genom användandet av miniräknare och datorer kan man här främja insikt samtidigt som man kan låta eleverna se på matematik som ett verktyg, inte enbart som ett övningsämne.

## 2 Ekvationslösning m m

Om en inblick i en polynomrings struktur bedöms som mindre viktig, t ex på SE-linjen, kan *faktorsatsen* helt slopas och behandlingen av *polynomekvationer* ersätts av bestämning av *nollställen* hos kontinuerliga funktioner f(x)

(a) enligt *mittpunktsmetoden,* se nedan, om funktionen *byter tecken;*

(b) som *extremvärde* 0, se avsnitt 3, om funktionen *ej byter tecken.*

Särbehandlingen av *kvadratiska ekvationer* skulle enligt vår mening kunna upphöra helt. Vill man ändå bibehålla detta moment, kan man *utan bevis* (beviset är nämligen inte enkelt, försök själv!) använda följande rekursiva metod, som *alltid* konvergerar (om än ibland långsamt, t ex vid dubbelrötter):

Ekvationen $x^2 = bx + a$, där $b \neq 0$, skrivs om på formen

$$x = b + a/x$$

och löses *rekursivt* med hjälp av talföljden $[x_n]$, definierad genom

$$x_n + 1 = b + a/x_n \text{ för } n \geqslant 0;$$

*Om ekvationen har reella rötter* kan man, genom att välja begynnelsevärdet $x_0$ stort och positivt respektive stort och negativt, få följden att konvergera mot den större respektive mindre roten.

*Kvadratrötter* måste antagligen behandlas särskilt med tanke på högstadiets behov. På sikt bör dock $\sqrt{a}$ även på högstadiet kunna införas som det positiva nollstället till funktionen

$$f(x) = x^2 - a, \text{ där } a \geqslant 0,$$

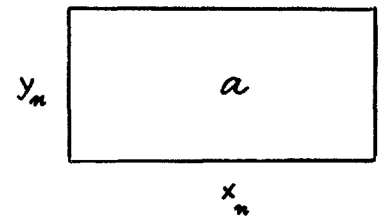
och beräknas genom mittpunktsmetoden.

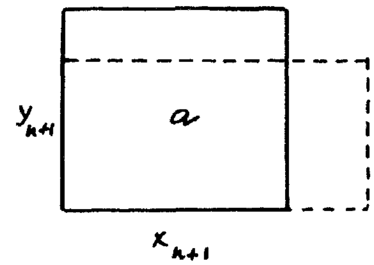
Ett historiskt viktigt alternativ är att definiera kvadratroten $\sqrt{a}$, där $a > 0$, som gränsvärde av talföljden $[x_n]$, definierad genom

$$x_n + 1 = 0{,}5(x_n + a/x_n) \text{ för } n \geqslant 0$$

med t ex begynnelsevärdet $x_0 = 1$ (Herons metod).

Herons metod kan införas mycket åskådligt genom att man ställer, och löser, det geometriska problemet att göra en rektangel med arean a (med sidorna 1 och a) undan för undan mera ”kvadratlik” genom att samtidigt förlänga den kortare sidan och förkorta den längre sidan så att arean (= a areaenheter) förblir oförändrad.




$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad ; \quad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$$

**Nollställen. Mittpunktsmetoden**

*Förutsättningar:* Låt f vara en *kontinuerlig* funktion, och låt a vara funktionens enda nollställe inuti intervallet $[x_0, x_1]$, där $x_0 < x_1$, samt antag att f byter tecken i a, dvs att f(x) har *olika* tecken i $[x_0, a]$ och $[a, x_1]$.

*Algoritmen:* Under ovanstående förutsättningar kan a bestämmas med *precisionen* eps enligt följande algoritm. Funktionen f antas vara definierad.

```
FUNCTION Zero (x0, x1, eps:Real):
Real;
VAR
m:Real;

FUNCTION Sign (x:Real): Integer;
BEGIN
   IF x>0 THEN
   Sign: = 1
   ELSE IF x<0 THEN
   Sign: = - 1
   ELSE
   Sign: =0;
END;

BEGIN
IF Abs (x0 - x1)<eps THEN BEGIN
   Zero: = x0; Exit;
END;
m: = 0.5*(x0 + x1);
IF Sign (f(x0))< >Sgn(f(m)) THEN
   x1: = m
ELSE
   x0: = m;
Zero: = Zero(x0, x1, eps);
END;
```

## 3 Extremvärden

Det är ett märkligt faktum, att man *utan derivering* med varje föregiven precision under vissa enkla förutsättningar iterativt kan bestämma argumentet för en funktions extremvärden.

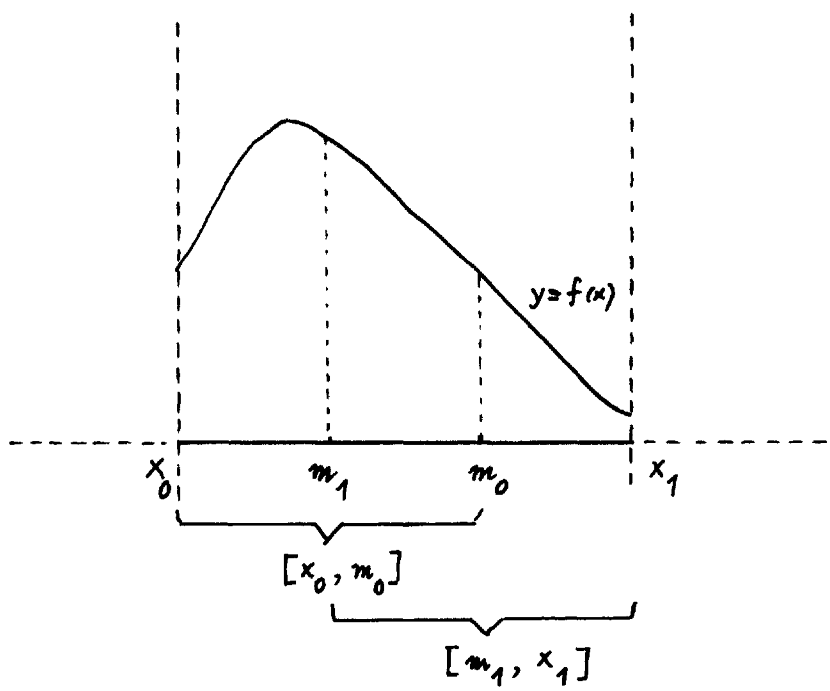
Metoden ifråga kallas *tre-intervallmetoden.* Den förtjänar att spridas i vida kretsar, och vi demonstrerar den genom bestämning av argumentet för en funktions *maximum.*

**Tre-intervall-metoden för maximum**

*Förutsättningar:* Låt f vara en kontinuerlig funktion som i intervallet [$x_0$, $x_1$], där $x_0 < x_1$, antar precis ett maximivärde (inklusive ev randmaxima). Med hjälp av två delningspunkter $m_0$ och $m_1$, där $m_0 > m_1$, kan intervallet [$x_0$, $x_1$] delas i två *överlappande* delintervall [$x_0$, $m_0$] och $m_1$, $x_1$].

*Algoritmen:* Argumentet för funktionens *enda* maximum kan under ovanstående förutsättningar bestämmas rekursivt med precisionen eps med hjälp av nedanstående funktion Maximum. Funktionen f antas vara definierad.

```
FUNCTION Maximum (x0, x1, eps:
Real):Real;
VAR
  m0, m1:Real;
BEGIN
  IF Abs (x0 - x1)<eps THEN
BEGIN
  Maximum: = x0;
  Exit;
END;
m1: = (2*x0 + x1)/3;
m0: = (x0 + 2*m1/3;
IF f(m1)>f(m2) THEN
  x1: = m0
ELSE
  x0: = m1;
Maximum: = Maximum (x0, x1, eps);
END;
```




## 4 Grafritning och graftolkning

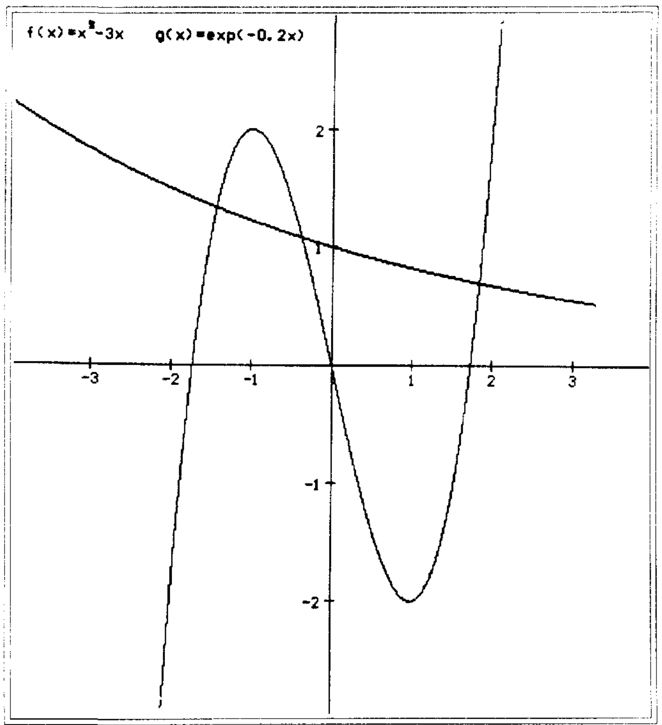
I varje funktionsundersökning ingår *grafritning* som ett väsentligt moment. I traditionell funktionslära är uppritandet av en funktions graf ofta *slutmomentet* i en lång och mödosam process. Uppritade grafer används dock sällan till något. Här följer ett exempel på *graftolkning*. Själva uppritandet av graferna och bestämningen av ev skärningspunkter är ett ointressant rutinarbete som en matematikverkstad får ta hand om.

*Användningen* av resultaten däremot behöver både läras ut och övas!

*Exempel:*
Ur ADM-Projektets prov. Funktionerna

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ och } g(x) = e^{-0,2x}$$

har uppritats med hjälp av Funktionsverkstaden i Matematikverkstad A:




Med verktyget SKÄRNINGAR har följande resultat erhållits:

| Sökstart | Steglängd | Skärning-x | Skärning-y |
|---|---|---|---|
| -2 | 0.5 | -1.44007 | 1.33378 |
| -1 | 0.5 | -0.37738 | 1.0784 |
| 1 | 0.5 | 1.83761 | 0.69245 |

Besvara följande frågor med hjälp av grafen och/eller tabellen *utan att räkna*:

a) Hur många rötter har ekvationen

$$e^{-0,2x} = x^3 - 3x$$

b) Vilken är denna ekvations största rot med två decimaler?

c) Hur många lösningar har ekvationssystemet

$$y = x^3 - 3x$$
$$y = e^{-0,2x}$$

d) Viket är funktionernas största gemensamma funktionsvärde? Svara med två decimaler!

e) Lös olikheten

$$e^{-0,2x} < x^3 - 3x$$