

Att använda tankenötter för att utveckla kritiskt tänkande

Framgångsrik problemlösning kräver att man har tillgång till olika strategier och att man har ett matematiskt och kritiskt tänkande. Detta kan utvecklas genom ett strukturerat arbete med tankenötter.

Artikeln behandlar amerikanska förhållanden.

Det var länge sedan det var acceptabelt att lära elever färdigheter och operationer utan förståelse. I vår krympande värld räcker det inte att eleven är skicklig i att utföra beräkningar. Ingen människa skriver i sin meritförteckning att hon eller han kan utföra lång division med flersiffriga nämnare eller att hon eller han är duktig i bråkräkning. Den sortens färdigheter tas för givna. Dagens arbetsgivare söker personer som kan lösa problem, tänka kritiskt och förklara hur de tänker.

Sedan 1980 när *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM publicerade sin *Agenda for action* har problemlösning varit grundläggande för matematikundervisningen. Även det epokgörande dokumentet *Curriculum and evaluation standards* (NCTM, 1989) och det senaste dokumentet *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000) lyfter fram betydelsen av problemlösning.

Men vad menar vi egentligen med problemlösning? Det är mycket mer än förmågan att lösa textproblem. Det innebär problem eller uppgifter som inte är rutin, dvs sådana som eleven inte redan kan en procedur för. Det kräver att eleven kan tänka klart och utnyttja ett antal olika matematikområden, sitt sunda förnuft och tidigare kunskaper. Ett riktigt problem tvingar eleverna att lägga tid på att arbeta och

tänka. Ett riktigt problem kan ofta lösas på flera olika sätt – vissa elegantare än andra. Vårt jobb som matematiklärare är att hjälpa eleverna att lära sig hur man tacklar och löser ett problem.

Jag hävdar att en daglig användning av tankenötter i undervisningen är en strategi som hjälper eleverna att utveckla både kritiskt tänkande och problemlösningssjälvfärdigheter. I denna artikel beskriver jag hur detta kan gå till. Jag ger exempel på tankenötter som jag har använt och hur eleverna löste problemen. Jag vill understryka att tankenötter kan användas på alla stadier, från förskola till universitetsnivå.

Jag vet att det här är en strategi som fungerar. För några år sedan, när Missouri genomförde ett försök med ett test som skulle ges till eleverna i årskurserna 4, 8 och 10, undervisade jag i konsumentmatematik och algebra i årskurserna 10–12. På den tiden ingick algebra vanligen i årskurs 9, så mina klasser som innehöll lite äldre elever kunde betecknas som lågpresterande. Nästan alla mina elever hade tidigare misslyckanden i matematik och läste nu om kursen för att kunna få sin examen.

Det är lätt att föreställa sig vad jag kände när min rektor meddelade att resultaten inte skulle slås ihop utan redovisas för varje lärare så att vi kunde få fördel av goda resultat. ”Visst”, tänkte jag för mig själv, ”mina vänner

och kollegor har undervisning på mer avancerade nivåer. Deras elever har redan läst algebra och geometri. Självklart kommer de att lyckas bättre än mina elever. Och jag kommer att framstå som en pinsamt dålig lärare.”

Vid resultatredovisningen visade det sig förvånansvärt nog att mina elevers poäng låg på samma nivå som alla andras. Lådagrammet över problemlösning sa allt. Morrhåren var stora och täckte hela skalan. Lådan med medianen låg helt i mitten. Jag är övertygad om att mina elever klarade att lösa problem som andra, mer högrepresterande elever undvek, på grund av att jag dagligen använt mig av tankenötter.

Tankenötter

De tankenötter man använder bör inte ha någon koppling till det aktuella matematikområdet. Tankenötterna utvecklar det nödvändiga kritiska tänkandet just för att de inte bygger på en instruktion man nyligen fått. Det innebär att eleverna tar sig an problemen utan några förutfattade idéer om hur de ska lösas. De tar helt enkelt med sig sin matematiska bakgrund och de strategier de har utvecklat in i en ny situation. Jag använder inte heller tankenötter för att utvärdera tidigare inlärd begrepp och färdigheter. Det finns andra sätt att genomföra utvärdering.

Många av mina kollegor använder sig av *Veckans problem* som är komplexa och svåra. Själv undviker jag även dessa. Ett mål med att använda tankenötter är att motivera eleverna att tänka matematiskt och ge dem tilltro till sin matematiska förmåga. Det är inte motiverande för elever som tidigare misslyckats i matematik att få ett problem och få veta att de har ”en hel vecka” på sig att lösa det. Dessa elever antar att om det ska ta en hel vecka att lösa ett problem så kommer de aldrig att klara det, med påföljd att de inte ens försöker. Med dagliga tankenötter är det inte lika troligt att de blir blockerade.

Jag väljer tankenötterna noggrant så att de flesta av mina elever kan lyckas om de lägger lite tid på dem. Jag tror alltså att elever som regelbundet arbetar med problem som de inte fått någon instruktion för lyckas av två skäl: De börjar tro att de kan lösa problemen, och de utvecklar strategier för att komma igång.

Metodiken

Börja med tankenötter som nästan alla kan knäcka. Knepet här är att hitta uppgifter som inte verkar alltför elementära eller barnsliga. De flesta elever blir förolämpade om de tycker att de får uppgifter som ligger mycket under deras årskurs. Man kan börja med ett beräkningsproblem som följande:

Skriv ett uttryck som är lika med 1 genom att använda exakt fyra 4:or och inga andra siffror.

Detta är ett av de berömda problem som kan förstås och bearbetas av elever på alla stadi-er. Yngre elever kan tex föreslå lösningar som $44/44$ eller $4/4 \times 4/4$. Äldre elever bör uppmuntras att lösa det på mer än ett sätt. De skulle kunna använda kvadratrötter, exponenter, trigonometriska funktioner och faktorer. Dessutom kan problemet förändras på ett antal olika sätt. Ändra antalet 4:or som kan användas; ändra antalet uttryck som ska vara lika med; ändra 4:or till någon annan siffra. Till och med med universitetsstudenter kan bli intresserade av att hitta uttryck för alla tal från 1 till 100 genom att bara använda fyra 4:or åt gången. Jag hade en gång en elev som löste det ursprungliga problemet på 26 olika sätt – hittade 26 olika sätt att skriva uttryck som är lika med ett genom att använda fyra 4:or. Matematiken i uppgiften är inte svår, men dess öppenhet gör att elever i alla åldrar kan arbeta med den.

Lär inte dina elever hur man knäcker tankenötter. Välj i stället varje dag ut några elever som löste gårdagens problem med hjälp av olika strategier och be dem redovisa sina lösningar för klassen. Varje ny strategi ger övriga elever ytterligare ett möjligt sätt att lösa framtida problem. Det kan också få eleverna att inse att det finns olika vägar till framgång, och att ett sätt inte nödvändigtvis är bättre än något annat. Visserligen kan jag som lärare tycka att vissa strategier är elegantare än andra, men samtliga redovisade strategier leder till ett korrekt svar. Detta är en insikt som stärker elevernas självförtroende. Det kan också vara så att lågpresterande elever har insikter som gör deras lösningar unika. När en elev som vanligtvis klarar sig dåligt i matematik lyckas lösa ett problem på ett sätt som ingen annan tänkt

på stärks hans/hennes matematiska självförtroende. Detta är i sig starkt motivationshöjande.

Planera noga i vilken ordning eleverna får redovisa. Börja med den mest uppenbara metoden – vanligtvis den minst eleganta metoden. Det handlar ofta om att *gissa och kontrollera*. Förr gjorde vi våra elever otjänsen att antyda att gissa och kolla inte är en bra problemlösningstrategi. I vår iver att lära eleverna att tänka i stället för att bara gissa har vi berövat dem ett kraftfullt verktyg. Man behöver bara betona kontroldelen av gissa och kontrollera för att hjälpa eleverna att bli bättre problemlösare.

Om den först redovisade elevstrategin ska vara den minst komplexa ska den sista redovisningen vara den matematiskt mest sofistikerade. Detta kommer att sporra de duktigaste eleverna att utveckla starkare metoder samtidigt som problemen fortfarande är uppnåeliga för de svagare eleverna i klassen. Elever som inte klarade att lösa problemet blir uppmuntrade av att se klasskamrater lösa dem. Elever som löste problemet på ett sätt upptäcker snabbare eller ovanligare metoder. Under loppet av ett läsår kommer eleverna att utveckla ett stort antal strategier som de kan dra nytta av i nya och ovana situationer.

Öka gradvis tankenötternas svårighetsgrad. När man börjar använda tankenötter är det viktigt att eleverna får lyckas, annars kommer de att sluta försöka. När man väl lyckats övertyga dem om att de faktiskt kan, så kommer de att ge sig i kast med problemen. När man sedan ökar svårighetsgraden kan man konstatera att eleverna fortsätter att bearbeta och lösa dem. Det här är ett fantastiskt exempel på hur man kan använda Vygotskys (1978) *närmaste utvecklingszon* (proximal zone of development).

Anknyt arbetet med tankenötterna till matematisk problemlösning. Det är kopplingarna som är avgörande. En stor del av undervisningen består i att lära eleverna att generalisera och att tillämpa sina kunskaper i nya situationer. Det är genom detta man mångdubblar tankenötternas kraft.

Enligt Pólya (1945) är det första steget i problemlösning att förstå problemet, och det är det enda man behöver tänka på när man presenterar ett nytt problem. Jag frågar alltid om det är någon som har någon fråga

om uppgiftens innehåll. Eleverna lär sig snabbt att vissa frågor kan begränsa deras möjlighet att lösa problemen. Alltså lär de sig att bara ställa viktiga och klagörande frågor. En tankenöt kan t ex lyda så här:

Skriv så många talpar som möjligt vars produkt är 20.

De flesta elever skriver kanske 1 och 20, 2 och 10 och 4 och 5. Den matematiske tänkaren lägger till 1,25 och 16 eller 12 och $1\frac{2}{3}$. När eleverna väl har börjat tänka på svar i bråk- eller decimalform kommer en helt ny lista på tal att dyka upp.

Om ingen har någon fråga om dagens tankenöt fortsätter jag med den planerade lektionen. Eventuella missuppfattningar diskuterar jag nästa dag när lösningarna presenteras.

Polyas andra och tredje steg – att göra en planering och att genomföra den – är de steg vi arbetar bäst med i undervisning och inläring. De kräver inte så mycket diskussion. Hans fjärde steg – att se tillbaka – är emellertid mycket viktigt och glöms ofta bort i undervisningen idag. När eleverna har löst ett problem bör de gå tillbaka och se om deras svar är rimligt och om det stämmer med problemets villkor. Detta är ett viktigt steg i varje situation eller utvärdering. Om eleverna vänjer sig vid att göra detta med sina tankenötter så kan de också gå tillbaka när de har arbetat med andra problem och därigenom undvika de förhatliga onödiga slarvfelen.

Sätt upp en affisch med problemlösningstrategier och hänvisa till den så ofta som möjligt. Som jag nämnde ovan är det förvånande hur många elever som faktiskt tror att gissa och kontrollera inte är tillåtet på matematiklektionen. När två eller tre elever presenterar sina lösningar bör man diskutera med klassen vilka problemlösningstrategier från affischen som de har använt. Om man hela tiden hänvisar till affischen kommer eleverna att börja tillämpa en större variation av problemlösningstrategier. Tankenötterna gör själva strategierna lättare att begripa och komma ihåg.

Uppmana alltid eleverna att försöka bearbeta problemen på fler än ett sätt. Om de arbetat med en tankenöt genom att gissa och kontrollera kan man be dem rita en bild eller göra en lista eller ställa upp en ekvation. När eleverna arbetar med problemet

på andra sätt upptäcker de ofta fel som de gjorde första gången. De kan också komma på att en annan metod kan vara mer sofistikerad eller elegant och på det sättet se något av matematikens kraft.

Att betygsätta tankenötter

Det finns många olika sätt att bedöma arbete med tankenötter, så man väljer den metod man själv tycker fungerar. Jag tycker att det är viktigt att faktiskt sätta betyg på uppgifterna, eftersom eleverna verkar tycka att det man inte får betyg på inte heller är viktigt. Att sätta betyg på tankenötterna ger dem betydelse.

I mina klasser brukar jag ha som krav att eleverna ska uppnå ett bestämt antal tankenötspoäng per bedömningsperiod. Poäng utöver det räknas som extrameriter. En bra tumregel är att låta tankenötterna vara värda sammanlagt 15 poäng. Om man har 45 lektioner under en bedömningsperiod innebär det att en elev bara behöver lösa en tredjedel av problemen. Det känns inte lika oöverstigligt som kravet att lösa alla problem.

Jag ger ett poäng för varje rätt svar och skriver helt enkelt "nej" på ett papper som har ett felaktigt svar. Jag kräver inte att eleverna ska skriva ned problemet, datera papperet eller redovisa sina tankegångar (de flesta gör det ändå). Sedan är jag frikostig med poäng om någon bearbetar problemet på fler än ett sätt, om jag hittar särskilt kreativa och ovanliga lösningar eller om någon visar prov på bra tänkande. Ibland ger jag extrapoäng för en tydlig förklaring eller till och med för ett gott försök. Mitt mål är att locka eleverna att försöka sig på problemen. På det här sättet behöver jag inte lägga så mycket tid på rättning. Jag behöver inte gå igenom elevlösningarna och leta efter fel utan förlitar mig på att diskussionen nästa dag ger den återkoppling som behövs.

Det kanske viktigaste med mitt sätt att arbeta med tankenötter är att jag skjuter fram arbetet med att anteckna resultat till slutet av bedömningsperioden. Jag träffar ofta så många som 150 elever per dag. Att anteckna poäng på tankenötterna för så många elever varje dag skulle ta alltför mycket tid. I stället ber jag eleverna att spara sina betygsatta tankenötter. De får häfta ihop dem, räkna

det antal poäng de fått och skriva poängsumman på första sidan. Allt jag behöver göra är att räkna poängen och se om min summa stämmer med elevens. På det sättet behöver jag bara anteckna poäng en gång.

Vanliga frågor

Var hittar man bra tankenötter? De finns överallt. Det lättaste är att Googla på tankenötter (brain teasers). Man får tusentals träffar. Man kan också formulera egna efter mönstret av dem man hittar i böcker eller på internet.

Vad gör man om eleverna tar med sig egna tankenötter? Det är jättebra. Använd dem. Det är mycket motivationshöjande för eleverna att se sina problem använda.

Vad gör man om någon kommer med ett problem som jag inte kan lösa? Det är fantastiskt! När man talar om för eleverna att man inte kan svaret innebär det att detta är OK även för dem. När de ser att man arbetar med problemet tillsammans med dem inser de att man inte alltid behöver bli undervisad i matematik – man kan komma fram till saker själv. Om någon av eleverna löser problemet före läraren stärker det eleven, och det visar för hela klassen att den äldsta eller mest välutbildade inte alltid är den som löser problemet först.

Eleverna får inte samarbeta om tankenötterna. En av mina regler i klassrummet är att om jag hör det rätta svaret eller om jag hör att elever samarbetar om problemet så "stänger" jag för dagen och ingen tillåts att lämna in ett svar eller få poäng för det. Egentligen vill jag bara förhindra att en elev löser problemet och att andra kopierar lösningen och får poäng. Så ofta bortser jag från stillsamt småprat om matematik och hur problemet ska lösas. Det är ju faktiskt detta jag vill att mina elever ska göra – att tänka och kommunicera matematiskt. Det händer ibland att jag stillsamt och diskret får påminna elever om att de inte ska samarbeta om problemen. Och om jag en gång har "stängt av" ett problem så blir eleverna ytterst försiktiga med att samarbeta.

Får eleverna ta igen tankenötter om de varit frånvarande? Nej, eftersom de får så många tankenötter och eftersom jag ofta ger flera poäng för ett enda problem och

eftersom eleverna bara behöver få ett visst antal poäng för tankenötter så spelar det ingen roll om de missar ett enstaka problem. Man kan alltid lösa nästa på mer än ett sätt och tjäna extrapoäng som kompensation för frånvaron.

Ett sista tips: Ha alltid tankenöten tillgänglig i original i samband med att uppgiften lämnas tillbaka och diskuteras. Jag brukar skriva uppgiften på tavlan och låta den stå i två dagar eller också kopierar jag den och delar ut. Om man inte gör något i den här vägen kan elever argumentera länge och högljutt om vad de tyckte att det stod i uppgiften och varför deras svar är rätt.

Sammanfattning

Att använda tankenötter på det här sättet övertygar eleverna om att de kan lösa problem som de aldrig träffat på tidigare. Det förser dem med ett stort antal strategier som kan tillämpas på alla slags problem i framtiden. Det lär dem att de kanske måste "leka" lite med problemet innan de kommer på hur det ska angripas. Det ger elever på alla färdighetsnivåer möjlighet att lyckas. Man kan tex ge de duktigaste eleverna en utmaning genom att be dem skriva en ekvation eller lösa problemet på ett mer sofistikerat sätt. Det är helt enkelt så att den här metoden lär eleverna att tänka matematiskt och kritiskt.

Några tankenötter

På en balansvåg väger en hel chokladkaka jämnt med 4/5-dels kaka och en 10-gramsvikt. Vad väger hela kakan?

Det här problemet har elever löst genom att rita en bild eller ställa upp en ekvation.

En maskerad man rånade en bank. Han flydde från platsen på en motorcykel klockan 08.00 på morgonen med en genomsnittshastighet på 30 kilometer i timmen. Polisen som jagade honom

åkte från banken klockan 08.03 på morgonen och höll en genomsnittshastighet på 60 kilometer i timmen. Vid vilken tidpunkt kunde polisen gripa rånaren?

Eleverna har löst det här problemet genom att göra listor på tider för varje person och letat upp första tillfället då de sammanföll. De har också ritat bilder, använt en tallinje, gissat och kollat och skrivit ett algebraiskt uttryck.

John har tre bröder fler än han har systrar. Hur många fler bröder än systrar har hans syster Mary?

Bland lösningsstrategierna märks att rita bilder, ställa upp en ekvation, göra en tabell, lösa ett enklare problem och att använda logiskt resonemang.

På ett gungbräde väger 3 ekorrar jämnt med 2 kråkor och 3 rödhakar. 2 ekorrar och 2 kråkor väger helt jämnt med 3 kråkor och 3 rödhakar. Hur många kråkor väger jämnt med 1 ekorre? Hur många rödhakar väger jämnt med 1 ekorre?

Eleverna har använt sig av gissa och kontrollera, rita bilder, ställa upp ekvationssystem och använda matriser.

LITTERATUR

- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.