

Huvudräkning i flera dimensioner

JAN UNENGE

I alla tider har huvudräkning ansetts som både konst och nödvändighet. Inte sällan utvecklar olika personer ovanliga metoder, som åtminstone för den oinvigde verkar akrobatiska.

Hur blir man en bra huvudräknare? Vilka metoder är effektiva?

Huvudräkning som cirkuskonst

I matematikens — eller i varje fall i räknandets — historia dyker här och var upp berättelser om huvudräkningsakrobater. Ibland är det underbarn som senare utvecklas till stora matematiker med Gauss som den klarast lysande stjärnan. Det påstås att han som 3-åring satt och rättade sin far när denne höll på att räkna ut vad som i dag skulle kallas ob-tillägg på löner.

Men lika ofta — eller kanske oftare — är det udda personer där huvudräknandet varit en specialbegåvning. Eftersom huvudräkning inte kräver insikter i papper-och-penna-räkning — som ju tvärtom ibland kan vara en belastning i metodvalet — kan den utvecklas ur i dubbel mening *egna* metoder.

Två huvudräkningsgenier på 1700-talet, Jedidiah Buxton och Thomas Fuller, lärde sig aldrig att läsa eller skriva! Men de kunde i huvudet

räkna ut produkten av niosiffriga (!) tal. Buxton utsattes för särskilda studier och man upptäckte att när han skulle multiplicera exempelvis 456 med 378 omvandlade han talen. Enligt en tolkning skaffade han sig multiplar av 15 och "skrev" om faktorerna som $20 \cdot 15 + 5 \cdot 15 + 3$ respektive $28 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 6$ varefter han ägnade sig åt att addera ett antal 15-tal. Han var med andra ord vad som numera kallas en vederstygglig "plussare" — men det blev ju tydligen rätt. Och att göra om ett niosiffrigt tal till lämpliga 15-grupper låter ju inte som någon angenämare uppgift — det är ju för många siffror till och med för en liten miniräknare.

Tydligen är talet 15 ett "bra huvudräkningstal". Amerikanen Zerah Colburn förvånade världen redan som 8-åring genom att direkt kunna tala om att 247 483 är produkten av 941 och 263 medan 36 083 är ett primtal. Det berättas att han en gång behövde några extra sekunder för att beräkna kvadraten på 4 395 innan han "kom på



att ta kvadraten på 293 och sedan multiplicera denna produkt två gånger med talet 15". Man kan kanske förstå att det behövdes "några extra sekunder" för att upptäcka att 4 395 är delbart med 15 och att sedan utnyttja detta.

Det fjärde exemplet på en cirkuskonstnär i huvudräkning är kanske det mest fascinerande. Han hette George Parker Bidder, engelsman och född 1806 (se även s 40). Han förklarade själv sin fantastiska förmåga med att "jag tror det berodde på att jag inte kunde någonting om talsymboler". I motsats till de tidigare fick Bidder senare en högre utbildning, och han kunde då själv analysera och förklara sina huvudräkningsmetoder. Men innan dess hade fadern bokstavligen utnyttjat sin son som cirkusartist. Som 10-åring kunde han inför häpnadskädda exempelvis räkna ut kvadratroten ur 119 550 669 121 på 30 sekunder. Senare i livet konstaterade Bidder att han hade mycket lättare att uppfatta och minnas tal som presenterades muntligt än när de fanns skrivna på papper. Han "såg" inte ett tal som 984 i symboler utan som enheter som kunde arrangeras i 24 grupper med 41 i varje. Men hans grupperingar närmade sig vad vi i dag kallar "bra huvudräkningsmetoder", till exempel genom att han började från vänster. Bidder redovisar att han multiplicerar 397 med 173 genom att addera successiva produkter, nämligen $100 \cdot 397$, $70 \cdot 300$, $70 \cdot 90$ och så vidare fram till den sista $3 \cdot 7$ varefter han snabbt får svaret 68 681!

Även "egna" metoder har ibland — eller kanske ofta — ett korn att ta vara på. När måste vi, som det frågades i HÖJMA-projektet¹⁾, lära oss tänka som eleven?

Mitt sista exempel på huvudräkningskonst är av mycket färskare slag. För två år sedan träffade jag en då 6-årig gosse som utan att tveka kunde räkna ut 6 gånger 583. Hans förklaring förstummade mig. Dels påstod han sig ha ett träd i huvudet som växte när han räknade, dels sa han "Jag tar 6 gånger 8 först för åttan är mest och det är lika bra att klara av det först". Helt omedveten om det positionssystem som vi tragglar med små barn, hade han själv lärt sig avancerad multiplikation genom att — likt Bidder — ordna talen på olika sätt . . . i ett träd till på köpet. När jag förklarade positionssystemets idé för honom utropade han förvånat "Jaså, men då är det ju ingen konst att räkna!"

I dag behärskar han som 8-åring stora delar av gymnasiekursen i matematik. Men skall han räkna ut $35 \cdot 4\,567$ räknar han som Bidder.

När jag visade hur en vanlig elev förväntas ställa upp och räkna ut det, stirrade den unge mannen på mig med stora ögon. "5 gånger sju är 35, då skriver jag 3 i minne". "Om du skall ha det i minne behöver du väl inte skriva upp det", noterade han och fortsatte "Vad konstigt du

räknar". Detta lilla räknefenomen har fått mig att fundera över mycket, som vi av tradition, för det är väl ofta bara tradition? — arbetar med i skolan. Men till hans cirkuskonster skall jag återkomma i nästa nummer av Nämnaren.

Huvudräkning som undervisningsmoment

Huvudräkningsfenomenens metoder kan förstås inte ligga till grund för den nödvändiga undervisningen i huvudräkning som vi måste bedriva. I den — liksom i all undervisning — måste man ha en systematik som dessutom tar hänsyn till det fackdidaktiska perspektivet, det vill säga att man försöker utgå från elevernas egna idéer och metoder. Är dessa metoder bra, alltså att de fungerar även i ett nästa steg och inför en ökad svårighet skall de givetvis accepteras. Är elevens strategi av begränsad räckvidd måste man som lärare försöka få eleven att inse att metoden har sina begränsningar. Inte med en "ångvålsmetodik" utan genom att ge exempel som visar bristerna. Just på den punkten visade HÖJMA-projektet att man kan komma långt genom gruppsamtal med elever, där läraren stöttar de elever som har en bra och funktionell metod. Elever kan uppenbarligen vara "bra lärare" för sina kamrater. Denna lilla dialog mellan elever som skall räkna ut $85 - 27$ illustrerar detta:

Bertil: Jag tog först bort 20 så jag fick 65 och sen tog jag bort 7 till.

David: Men då tycker jag det är bättre att ta bort 30 först så fick jag 55. Å sen plussa jag 3.

Arne: Plussa . . . varför det?

David: Jo, jag tog ju bort 30 och det var för mycket, det var ju 27 . . . jag menar jag gick ju för långt liksom och . . .

Bertil: Javisst, ja, haha, det var ju fiffigt. Jag fick ju liksom 7 till, mens David bara behövde greja med 3.

Många resultat från olika studier av elevers tänkesätt vid huvudräkning visar stor överensstämmelse, och innan vi kommer till hur David "bara behöver greja med 3" kan vi se på några viktiga och grundläggande punkter i undervisning i huvudräkning.

Tabellkunskap

Att kunna tabellerna är ett måste — det gäller inte bara multiplikationstabellen — utan alla fyra (additions-, subtraktions-, multiplikations- och

¹⁾ Högskolans i Jönköping Matematik-projektet

divisions-) och det gäller sambanden mellan dem. Sambandet mellan addition och subtraktion är ju uppenbar liksom mellan multiplikation och division. Men multiplikationstabellens produkter kan för många elever bli en rad "fasta punkter" i talens värld. Uppgifter av typen $42 - 7$ som en "tillämpning" av "sjuans tabell" är därför nyttiga.

Dubblingar

Många studier visar att barn redan från skolstarten kan $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$ osv. Det visar sig också att de ofta bygger andra uträkningar på sådana "dubblingar". Eller som ett förskolebarn förklarade hur han räknade $8 + 7$: "Jag låtsas att den andra siffran är en åtta men det är det inte så det blir 15". Metoden bör givetvis utnyttjas i den elementära inlärningen av tabellerna men det visar sig att många elever använder den även i andra sammanhang. Man räknar ut additioner där skillnaden mellan termerna är 1 eller 2 (ibland ännu större) via "dubblingar". Så här räknade en 11-åring $35 + 33$: "Enkelt, 35 plus 35 är ju 70 så då blir det 68."

Runda tal

Runda tal är benämning på tal som vi ofta använder som "avrundningstal" i vardagslivet. Är 88 personer samlade anger vi det "runda talet" 90 — om vi inte vill skryta och ta till det ännu rundare 100. Är det 188 avrundar man till 200 — 190 är inte "tillräckligt runt".

I bl a HÖJMA-projektet visade det sig, att elever som var duktiga i huvudräkning byggde sina metoder på runda tal eller, som en elev uttryckte det, "det är bra att jobba med såna tal som slutar med nollor". Metoden anknyter också till förskoleelevens "låtsasmetod" (jag låtsas att det är en åtta). Då blir $39 + 13$, på låtsas, det runda $40 + 13$ — fast det var det inte så det blir 52. Därigenom "försvinner" också tiotalsovergången och steget till överslagsräkning är kort.

När man kommit så här långt i den systematiska uppbyggnaden av undervisningen börjar också individuella finesser framträda. Ett exempel är just eleven David ovan som "bara behövde greja med 3" eftersom han valde att låta 27 ersättas med det runda talet 30 i stället för 20. Men i båda fallen hade eleverna insett att man vid huvudräkning bör "börja från vänster" — där ligger kanske den mest fundamentala skillnaden mellan huvudräkning och papper-och-penna-räkning.

Fast det kanske finns fler. En elev tyckte huvudräkning var mycket roligare än att räkna algoritmer för "i huvudräkning måste man ju tänka". Och det är ju inget dåligt mål för skolans arbete . . .

Huvudräkning som kreativ talkonst

Huvudräkning och överslagsräkning är de mest frekventa orden i grundskolans kursplan i matematik. Det är då huvudräkning i den "klassiska" varianten som många tänker på: att utan hjälp av papper och penna räkna ut exakta svar. Och visst är detta ett viktigt moment.

Men huvudräkning kan vara så mycket mer och kan hjälpa eleverna att upptäcka talens värde, talens storlek, att upptäcka att matematik ständigt finns runt omkring oss. I vardagen gör vi ständiga beräkningar — hur dags?, hinner jag . . .?, har vi råd att . . .?, hur skall vi dela . . .? Ibland gör vi överslagsberäkningar, ibland uppfyller vi skolans huvudräkningskrav på exakthet, men hela tiden skaffar vi oss erfarenheter om ingående tals storlek — jag hinner att . . . vi har råd att . . ., vi kan dela så att . . .

Det ligger en kreativitet i detta, kreativitet som skapande och idérikedom för att tala med uppslagsbokens förklaringar.

Glömmer vi bort detta i matematikundervisningen? Faller vi in alltför mycket i avgränsade delar: först skall vi ha huvudräkning, exakt och utan papper, sedan räknar vi med papper och penna (och måste ställa upp uträkningarna) och nu skall vi lösa uppgifter med text, redovisa uträkningar och skriva svar med fullständig mening (och streck under svar)?

Kan man lösa textuppgifter som huvudräkning? Kan man låta eleverna på en sida "bara" tala om vilka svar som blir exempelvis större än 100? Kan vi fånga uppgifter i flykten:

— *Hur många tänkbara resultat finns det som för Sverige till fotbolls-VM?*

— *Vad kostar egentligen förmånserbjudandet att hyra video?*

— *Spelar det någon roll hur jag sätter ihop de här staketbitarna till hundgården med tanke på arean?*

Visst är det viktigt med den hierarkiska uppbyggnaden, visst måste vi få våra elever att "ställa upp och räkna ut", visst måste vi och måste vi och måste vi. Men finns alltid "måste"? Kan vi släppa lös ibland, låta eleverna välja metod, vara kreativa? Vi skall utbilda dem för vardagslivet — hur ofta tar vi fram papper och penna och "ställer upp"?

Man kan göra ett litet enkelt experiment i klassen. Gör två (ungefär) likadana prov. I den ena versionen får eleverna anvisningen *Ställ upp och räkna ut*, i den andra *Skriv bara svaren*. Lätt chockade lärare påstår att det blir bättre resultat i den senare versionen . . . Har vi för strikta gränser mellan metoderna? Huvudräkning är bra som hjälpmedel, liksom huvudet. Man har det ju alltid med sig!