

Ger matematik men eller mening?

Kristin Dahl

Vad är matematik och vad sysslar matematiker med? Är matematik alltid obegriplig eller kan den vara ett spännande och kreativt hjälpmedel för alla vid upptäckter och beskrivningar av vår verklighet? Här ges en personlig berättelse som kanske speglar många komplicerade förhållande till matematiken.

Rubriken "Ger matematik men eller mening?" har inte kommit till enbart som ett försök att vara vitsig. Ju mer jag tänker på den, desto bättre tycker jag att den är.

Ger matematik men? – är den ena frågan. Finns det något annat ämne som det är så lätt att misslyckas i, som i matte? Du behöver bara vara sjuk några lektioner, och du befinner dig ohjälpligt på efterkälken.

En människa som misslyckas i matte betraktas som – och känner sig – dum! Om man misslyckas i språk eller historia är man på sin höjd lat! Är inte det märkligt?

Så visst kan matematik ge men. Att betraktas som dum, och känna sig så, är inte vidare konstruktivt här i livet.

Men så har vi den andra frågan: *Ger matematik mening?* Javisst, blir svaret lika självklart.

En människa som kan matematik – eller åtminstone begriper varför matte behövs och till vad den används – har stora möjligheter att delta i samhället och att förstå vad som händer i vår värld. Det är ju så att om vi inte förstår matte blir vi ohjälpligt efter – som samhällsmedborgare och när det gäller att förstå och hänga med i den tekniska utvecklingen.

Kristin Dahl är vetenskapsjournalist på tidskriften *Forskning och Framsteg*. Hon har bl a publicerat böckerna "Den fantastiska matematiken" och "Matte med mening". Innehållet i artikeln baserar sig på föredrag vid matematikbiennetter i bl a Mölndal och Umeå. Bilderna är hämtade ur böckerna.

Matte utan sammanhang

För min egen del kan jag med fog säga att matten har gett både men och mening.

När jag gick i skolan var matte ett av mina favoritämnen. Jag tyckte det var kul att räkna, och jag tyckte särskilt bra om geometri. Jag läste ofta upp yngre skolkamrater till bättre – eller åtminstone godkänt – betyg i matematik så att de skulle kunna fortsätta skolan. Därför bestämde jag mig för att bli mattelärare. Och så började jag läsa matematik vid universitetet i Uppsala.

Det blev en chock! Det var en fruktansvärd upplevelse att sitta med nästan tre hundra andra ungdomar, lika anonyma, i en stor föreläsningssal. Längst ner stod föreläsaren, oftast vänd mot tavlan. Han skrev och suddade, skrev och suddade. Tavlan fylldes gång på gång av nya formler, ekvationer och lösningar, som i samma raska takt suddades ut.

Var hörde dessa formler hemma? Varför var det intressant att ställa upp dessa ekvationer? Om det var någon som försökte att placera matematiken i ett sammanhang, i något som hade anknytning till min verklighet, så gick det i varje fall min näsa förbi. Matematik var en värld för sig.

Jag insåg att jag var ohjälpligt dum, ointelligent, misslyckad. Och jag anammade den allmänna bilden av matematik som något obegripligt, något som ligger långt utanför den värld som vi vanliga människor lever i.

Jag förträngde dessa känslor så gott det gick. Och under många år ägnade jag därefter knappast en tanke åt matematik.

Erövra matten på egna villkor

Jag hoppade alltså av studierna och utbildade mig efter diverse omvägar till journalist. De senaste sexton åren har jag arbetat på tidskriften *Forskning och Framsteg*. Där skriver vi om forskning, svensk forskning. Men under mina första år på tidskriften hade vi inte en enda artikel som handlade om matematik.

Det var inte så att redaktionen var ointresserad. Det var bara det att de artiklar som vi fick in var så svåra att de inte gick att omarbeta till läsbara berättelser. (Forskarna får själva skriva artiklar och vi journalister skriver om dem så att lekmän kan läsa och förstå.) Så jag bestämde mig för att skriva en artikel själv och försöka besvara frågor som: Vad sysslar matematiker egentligen med? Vad är det för samband med verkligheten de ser som inte jag ser? Hur kan till exempel naturen "vimla av derivator"?

Pågår det någon forskning i matematik? Är inte allt utforskat redan? Och hur forskar man i matematik? Sitter de – matematikerna – med penna och papper och bara tänker? Eller hur gör de?

Jag intervjuade en mängd forskare – och efter den där första artikeln blev jag litet övermodig. Jag kunde massor om matte, tyckte jag. Varför skulle den kunskapen gå till spillo? Tidningar slängs bort. Artiklar glöms.

Nej, en bok skulle det bli... Och en bok blev det, *Den fantastiska matematiken*, om allt det spännande och roliga som matematik ju är. Men det tog fem år innan boken blev klar. Och det krävdes envishet och tålamod, för det var betydligt svårare än jag trodde från början. Men det känns som om jag på nytt har erövrat matematiken. Den här gången på mina villkor.

Alla är vi matematiker

Egentligen är vi ju alla mer eller mindre matematiker, fast vi inte tänker på det.

Se bara på den här flickan! Hon har ritat upp det geometriska mönstret till en hage, och sedan hoppar hon och räknar och hoppar, i en viss bestämd ordning. Vilken



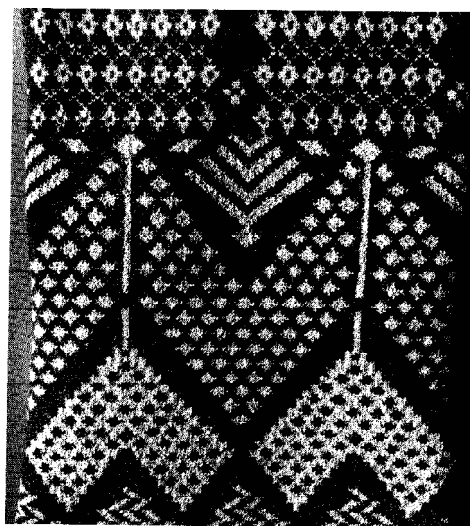
glädje! Vilken kraft i hennes hopp! Så mycket liv hon utstrålar!

Alla barn tycker om att spela spel, leka affär, bank och post och alla slags lekar där de räknar, formar geometriska mönster osv. Det är ett slags intuitiv matematik.

Jag letade länge innan jag fann den rätta bilden. För en poäng här är ju att också flickor tycker om att räkna. Men vad händer sedan?

Någonstans på vägen blir många av dem skrämda. Och som vuxna förnekar de bestämt att de kan matematik. De är rädda för matte, avskyr matte. Men samtidigt kan de hålla på att sticka och brodera de mest intrikata mönster.

Mönstret nedan stickades på 1800-talet av bondkvinnan Märta-Stina Abrahamsdotter. Ränder, stjärnor, romber varierar



och upprepas regelbundet, symmetriskt och harmoniskt. Märta-Stina har skapat det på instinkt, och hon har säkert inte tänkt på att det är matematik. Likafullt är det matematik.

Just sådant här tror jag är viktigt att ha som grund och att vara medveten om när man undervisar i matte.

Vad är matematik?

Vad är då matematik? Jo, det är att räkna – med siffror, bokstäver och symboler. Det är att studera mönster och strukturer. Men matematik är så mycket annat – också. Det är

- *en vetenskap* som är cirka 6 000 år gammal. Forskningen har växt enormt de senaste hundra åren. Enbart algebran är lika stor som hela fysiken. Och fysik är ju allt från atomfysik, optik och elektroteori till fasta tillståndets fysik.
- *ett språk* – ett mycket exakt och komprimerat språk, som är obegripligt för den som inte har lärt sig det. Och det är förstås ett skäl till att vi som inte är matematiker vet så litet – och oftast bryr oss så litet – om matematik. Å andra sidan är det ju fascinerande att även om en svensk och en japan inte förstår varandra när de samtalar, så skulle de på ett ungefär kunna förstå varandras matteböcker.
- *ett verktyg* i andra vetenskaper. Astronomerna skulle inte kunna ta reda på om det finns svarta hål utan matematik, fysikerna skulle inte kunna skapa teorier om Big Bang eller studera atomernas egenskaper, teknikerna skulle inte kunna beräkna hur kärnkraften ska utnyttjas och avvecklas.
- *ett hjälpmedel* att göra beräkningar och förutsägelser med. All teknik grundar sig på matematik: kylskåp, broar, flygplan, datorer, kärnvapen, satelliter. Väderprognoser skulle inte kunna göras utan matematik.
- *konst*. Tänk till exempel på renässanskonsten, som gav upphov till perspektivläran, och på 1900-talets arkitekter

och konstnärer, som Le Corbusier och Piet Mondrian. De använde sig av bl. a. "gyllene snittet".

- *hantverk*. Exempelvis mönster av alla slag som smyckar väggar, golv och trottoarer. Det finns på tapeter, tyger, mattor, keramik och så vidare.

Men – det är inte på grund av allt det här som man forskar i matematik. Matematikerna säger att matematik framför allt är

- *fantasi, lek, intuition* – och till och med en smula galenskap. Matematik är märkliga tankekonstruktioner, som börjar leva sitt eget liv.

Apropå fantasi. Sonja Kovalevsky, Sveriges enda kvinnliga professor i matematik genom tiderna, slutade att forska och blev i stället skönlitterär författare. (Hon slutade därför att hon blev besviken över att inte få en tjänst vid Paris universitet; det var stängt för kvinnor.) Sonja Kovalevsky hann skriva två romaner som fick starka lovord och översattes till flera språk.

När folk undrade över hennes nya karriär, påpekade hon att den inte var så olik matematikforskningen som man kunde tro. Hon sa att människor som aldrig har haft tillfälle att lära sig vad matematik är, blandar ihop den med aritmetik och anser den vara en torr vetenskap. I själva verket är matematik den vetenskap som fordrar mest fantasi.



Sonja Kovalevsky, Sveriges enda kvinnliga professor i matematik.

Bilden härintill ur min senaste bok *Matte med mening, tänka tal och söka mönster* får illustrera Sonja Kovalevskys påståen-
de. Det är Sven Nordqvist, han med Pett-
son och Findus, som har illustrerat den. Här
jämför vi konstnären och matematikern.

Allt detta som är matematik måste kom-
ma fram i undervisningen, då blir matten
fascinerande.

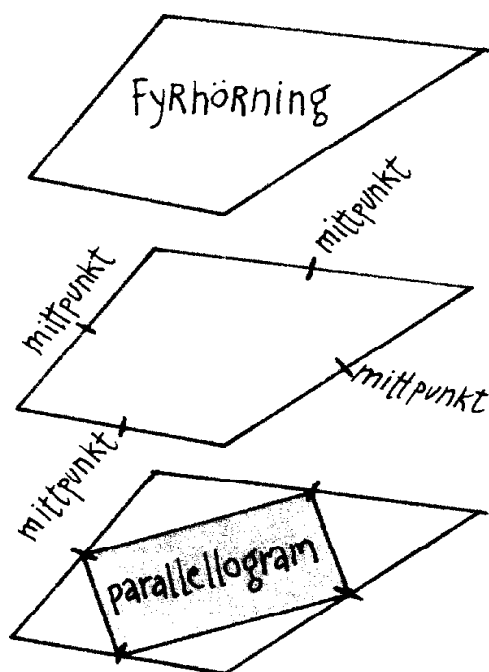
Idéer och intuition

Matematik är alltså framför allt ett fantasi-
fullt, intellektuellt spel, där spelarna inte
har en tanke på att det ska användas till
något. Matematiken lever sitt eget liv. Den
måste vara logisk, men behöver inte kun-
na tillämpas.

Ändå är ju det typiska för matematiken
att den nästan alltid kommer till använd-
ning – förr eller senare! Och här någon-
stans ligger fascinationen. I hur nästan
mystiska idéer kan få praktisk tillämpning.
Att få upptäcka sammanhangen och mate-
matikens betydelse – det är viktigt!

Därför tänkte jag att med några exem-
pel berätta om vad som har fascinerat mig
och gett mig en kick.

Titta bara på denna enkla figur! Det är
en fyrhörning, där alla sidorna är olika
långa. Nu delar vi varje sida på mitten och
binder ihop mittpunkterna. Då får vi en ny
fyrhörning.



Det märkliga med denna är att de två korta
sidorna är precis lika korta. Och de två
långa sidorna är precis lika långa. Det bil-
das alltså en parallelogram.

Vi kan rita hur många fyrhörningar som
helst – de får vara hur spretiga och konstiga
som helst! – och resultatet blir detsamma:
vi får en parallelogram av att binda
ihop sidornas mittpunkter.

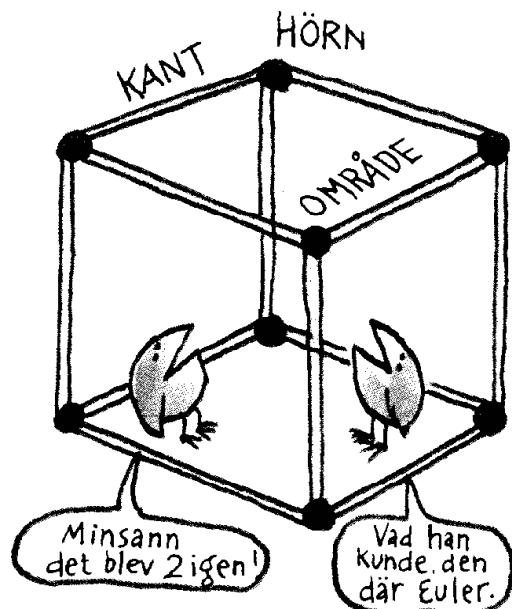
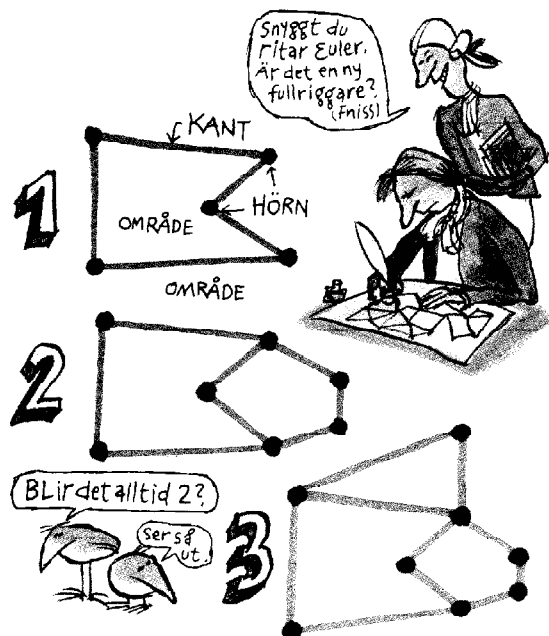
De flesta av oss skulle kunna stirra hur
länge som helst på den där första fyrhör-
ningen utan att inse detta. Inte ens logiskt
tänkande förslår här, utan det krävs intui-
tion, ett genialiskt infall.

Det är typisk matematik! Just att finna
ett mönster och att ta hjälp av bilder för att
finna detta mönster.

Topologi

Mitt andra exempel har med topologi att
göra. Leonhard Euler hette en berömd
schweizisk matematiker som levde på
1700-talet. Han ritade också enkla figurer.
Bland annat band han ihop punkter med
linjer. Och då funderade han över om det
finns något samband mellan antalet kanter
och antalet hörn i olika slags figurer.

Euler kallade linjer för kanter. Punkter-
na, där linjerna möts, kallade han för hörn.
Så här gjorde han: Rita t. ex. fem punkter
litet hur som helst och bind ihop dem med



linjer. Då blir det 5 hörn och 5 kanter. Och eftersom det finns 1 område inuti figuren och 1 utanför (själva pappret) bildas det 2 områden.

Sedan ritar vi två punkter utanför de andra och binder ihop dem med figuren. Nu har vi 7 hörn och 8 kanter och 3 områden. Sedan ritar vi en punkt och binder ihop den med figuren. Då har vi 8 hörn och 10 kanter och 4 områden. Är det då något särskilt med det här?

Vi kan prova med att räkna ut t. ex.
 $\text{antal hörn} - \text{antal kanter} + \text{antal områden}$

Figur 1 $5 - 5 + 2 = 2$

Figur 2 $7 - 8 + 3 = 2$

Figur 3 $8 - 10 + 4 = 2$

Blir svaret alltid lika med 2? Ja, det är en bra fråga att låta gå vidare till eleven.

Formeln skriver man $V - E + F = 2$. Och det är Eulers formel. Vill man sedan gå vidare, kan man gå upp en dimension och prova om formeln gäller här också, t. ex. för en kub, figur ovan till höger.

Kuben har 8 hörn, 12 kanter och 6 områden (sidor). Det blir $8 - 12 + 6 = 2$!

Denna enkla lek har alltså resulterat i en formel som i dag, mer än två hundra år senare, är viktig. Den används bl. a. i topologi. Det är en del av matematiken som används flitigt av framför allt teoretiska fysiker. Bland annat när de studerar uni-

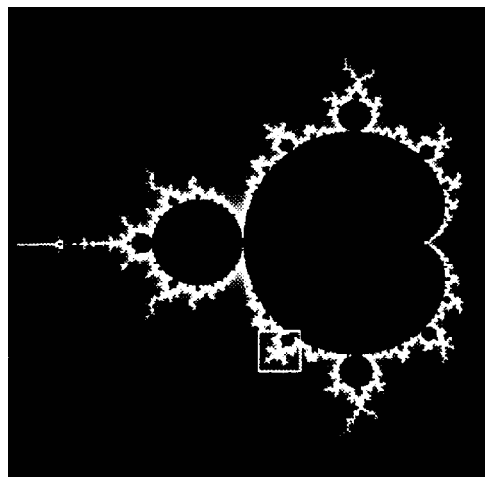
versum och gör modeller för hur vårt universum har uppkommit och hur det ser ut.

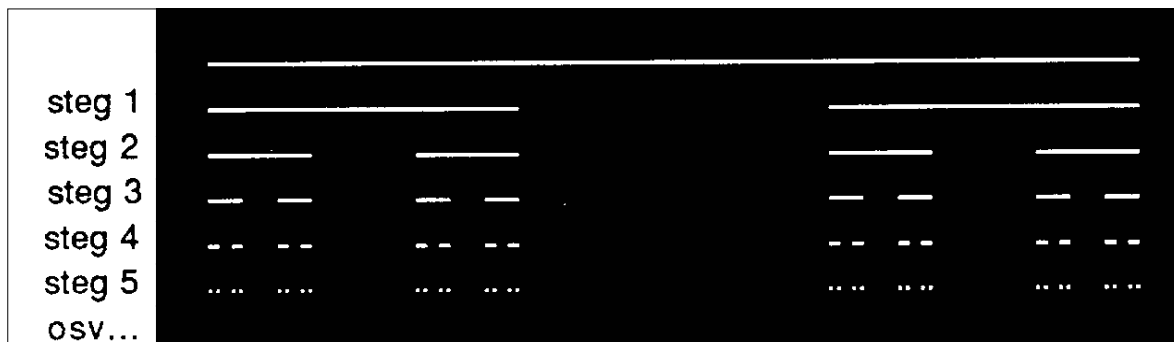
Är universum ändligt eller oändligt? Det är det ingen som vet – ännu. Men det är en topologisk fråga.

Från galenskap till fraktaler

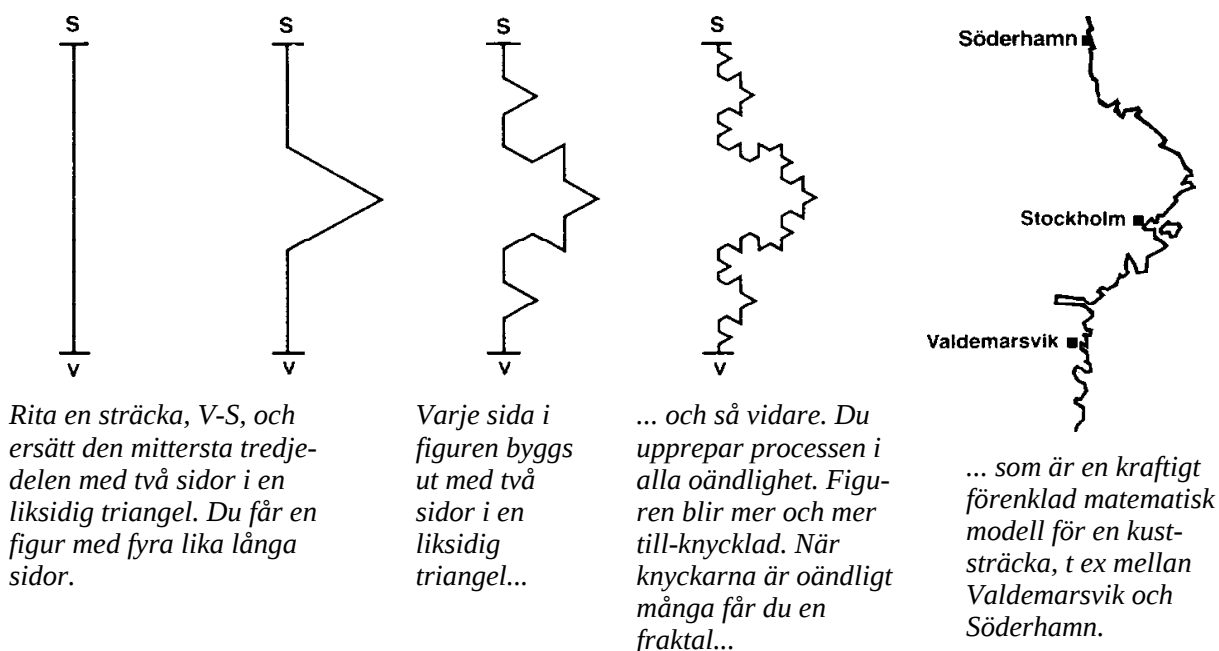
Mitt tredje exempel har med galna idéer att göra, och hur de har lett till våra dagars mycket populära fraktaler.

Mandelbrotmängden (figur nedan), som säkert många känner till, är en fraktal. Det är något som är starkt sönderbrutet och ofta självlikformigt. Alltså, tittar man på en liten del av fraktalen så ser den nästan ut som hela. Mandelbrotmängden är tillverkad i en dator med hjälp av en enkel matematisk formel, som datorn beräknar om och om igen.





Cantormängden som ligger till grund för fraktalgeometrin.



Denna fraktal upptäcktes för ett tiotal år sen av en polskamerikansk matematiker som heter Mandelbrot. Det är han som har gett det här området namnet fraktaler (fraktal betyder bruten).

Men matematiken bakom är ungefär hundra år gammal. Och här kommer de galna idéerna in. För medge att det är en smula galet att sitta och leka så här! Att hacka sönder en linje i en mängd små delar. Men det var vad den tyska matematikern Georg Cantor gjorde på 1800-talet. Han konstruerade och studerade starkt sönderbrutna figurer.

Här startade han med enheten 1, sen i första steget tog han bort den mittersta tredjedelen, därefter de mittersta tredjedelarna osv, se figur överst på sidan. Cantormängden kallas det som blir kvar efter oändligt många steg.

En annan välkänd fraktal är Helge von Kochs kurva, figur ovan. Helge von Koch

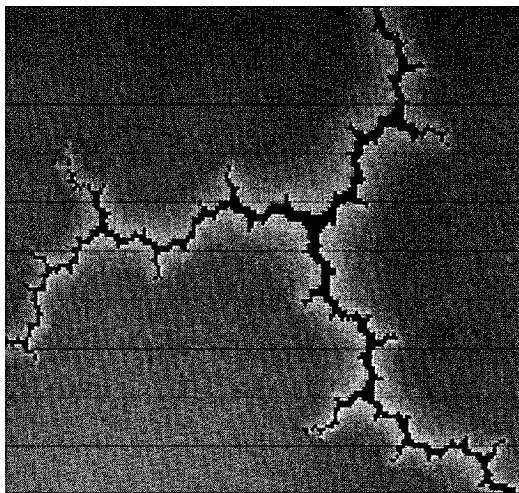
var en svensk matematiker från början av det här seklet.

Han startade från ett intervall. I första steget ersätts den mittersta tredjedelen av två sidor i en liksidig triangel. Och så upprepas detta i all oändlighet. Koch-kurvan ger en matematisk modell av en kuststräcka med dess vikar och uddar.

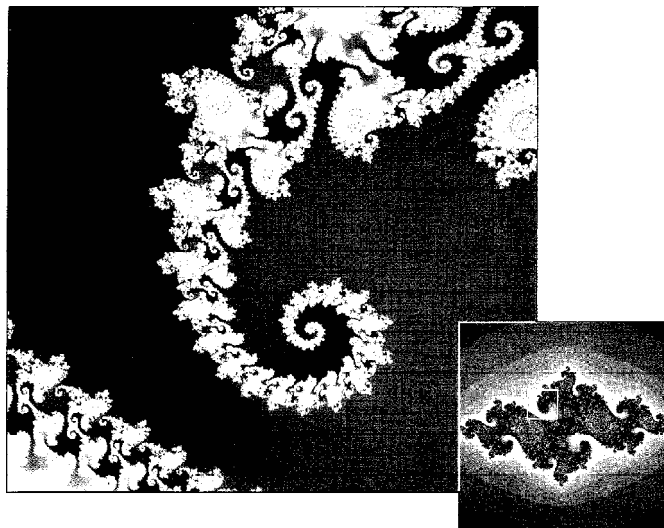
Fraktaler är alltså ett nytt slags geometri – naturens geometri. Moln, träd, bergslandskap, vattenvirvlar, kuststräckor beskrivs bättre med fraktaler än med den klassiska geometrin med sina kvadrater, cirklar osv.

Så tänkte naturligtvis inte Cantor när han höll på med sina smått galna idéer. Men här öppnar sig helt nya forskningsområden för både matematiker, fysiker och andra forskare.

Figuren på nästa sida skulle kunna vara en spricka i berggrunden, t. ex. där man tänker sig att provborra för kärnbränsle-



Del av Juliamängden



Tvillingdraken

förvaring. Men det är en fraktal som heter Juliamängd efter en fransk matematiker. Delen liknar hela fraktalen.

Och figuren ovan till höger skulle kunna vara ett djur på ett korallrev. Men det är en fraktal som kallas för Tvillingdraken.

Alla dessa datorritade fraktaler bygger på samma enkla formel – det som skiljer är bl. a. begynnelsevärdet på variabeln i formeln. Datorn har beräknat formeln om och om och om igen.

Matematikerna kan på detta sätt studera egenskaper hos formler. Vi får något fantastiskt att titta på – något som kanske kommer att kunna användas av någon i något sammanhang i framtiden.

Men till dess kan ju eleverna få rita sina egna fraktaler. Det krävs bara papper, penna och linjal – och en hel del tålamod.

Sätt kött på formeln!

Att se sambanden och hitta den röda tråden tror jag alltså är viktigt, i undervisning såväl som i mitt eget arbete som journalist.

Det måste vara något i undervisningen som skapar rädsla för matematik. För det är just vad många är: rädda. Samtidigt som de kanske beundrar människor som förstår matematik. Det skapas lätt känslor av underlägsenhet i matematiska sammanhang. Det är som om den medeltida bilden av matematik som något evigt sant och heligt lever kvar. Matematiken är abstrakt och onåbar.

Jag tror att man skulle kunna dra paralleller till min egen verksamhet. Vad är det som gör en populärvetenskaplig text bra och begriplig?

De viktigaste egenskaperna är att den är

- åskådlig
- verklighetsnära
- levande

Åskådlig kan min text bli om jag hittar en röd tråd och undviker att förirra mig i detaljer. Verklighetsnära kan jag göra texten genom ett konkret, aktivt språk, genom att ge exempel, genom att beskriva händelser, förklara alla fackuttryck – men framför allt genom att lyfta fram det som angår den som lyssnar eller läser. Jag måste väcka intresse. Och det tror jag att jag gör bäst genom att tillföra liv.

En levande text. Ja, då handlar det om att lyfta fram människor, om att ge ett ansikte och litet mänsklighet åt det som jag berättar om.

Och detta gäller i högsta grad även matematik!

Karl Friedrich Gauss, Leonhard Euler, Bernhard Riemann, Henri Poincaré, David Hilbert. Inte hade jag hört talas om dem, innan jag började skriva min bok. Ändå är de matematikens motsvarigheter till personer som Leo Tolstoj, Ludwig van Beethoven, Pablo Picasso och Charles Darwin. Men matematikerna själva gör sällan något väsen av sig.

Här måste undervisningen hjälpa till.

Sätt kött och blod på formler och regler! Berätta om människan – matematikern – och om de tankar som ligger bakom formelerna och reglerna!

Inte heller visste jag tidigare att det faktiskt har funnits kvinnor som har ägnat sig åt matematik – och också påverkat matematikens utveckling. Flickor likaväl som pojkar behöver förebilder!

De behöver höra talas om Sonja Kovalovsky, denna mångsidiga och rikt begåvade kvinna.

De behöver höra talas om Sophie Germain, som levde i Paris på 1700-talet och som mot föräldrarnas vilja studerade matematik. Hon är känd för några bevis som hon gjorde i talteorin. Och hon brevväxlade med Karl Friedrich Gauss, men utgav sig då för att vara man.

När Gauss efter flera års brevväxling förstod att det var en kvinna som han förde så givande diskussioner med skrev han:

När en kvinna, som på grund av fördomar och traditioner möter oerhört många fler svårigheter än en man innan hon kan bli förtrogen med denna besvärliga forskning, när hon ändå lyckas övervinna hindren och tränga igenom även de snårigaste delarna av matematiken, då måste hon utan tvivel äga det ädlaste mod, utomordentlig fallenhet och en överlägsen begåvning.

De behöver höra talas om Emmy Noether. Precis som Sophie Germain vigde hon hela



Emmy
Noether

sitt liv åt matematiken, och hon är en av skaparna av den moderna abstrakta algebran.

Utan hennes satser skulle Albert Einstein inte ha kunnat formulera sin relativitetsteori.

Den nödvändiga matematiken

Det har tagit mig många år att inse att jag inte är speciellt dum och obegåvad bara för att jag misslyckades med mina studier i matematik vid universitetet. Jag var nog inte lika mogen som andra och hade kanske behövt mer tid. Men framför allt hade jag behövt få en helhetssyn. Jag hade behövt att någon hade berättat om sambanden mellan matematik och den verklighet som jag lever i.

En naturlig fråga i det här sammanhanget är: Vad är målet med undervisningen? Det kan ju knappast vara att vi alla ska bli forskare.

Nej, men vi ska kunna använda matematik i vår vardag, utan att vi egentligen är medvetna om det. Vi ska kunna jämföra priser i affärer, vi ska kunna rita upp en lägenhet och skaffa möbler till den och vi ska kunna förstå statistik som politiker och experter slänger omkring sig.

Vi kan helt enkelt inte ha en bärkraftig demokrati, om människor inte vågar vara kritiska gentemot siffror. Därför är det viktigt att förstå matematik och att få den att angå både flickor och pojkar.

Och för att lyckas med det måste man försöka göra matematiken konkret, sätta in den i ett sammanhang, berätta om dess betydelse, bl. a. genom att berätta om människorna bakom.

Så jag säger det ännu en gång. Sätt mänskligt kött på matematikens regler och formler!

Förhoppningsvis blir då följden att matte ger mer mening än men...

Litteratur

- Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Fischer & Co.
Dahl, K. & Nordqvist S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.