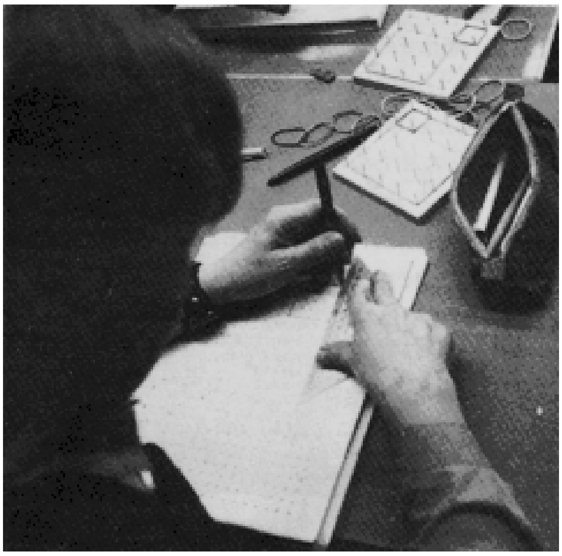
Uppslag 6
Problemlösning på geobräde

Geobrädet inbjuder till problemlösning för alla åldrar. För tvååringarna är själva hanterandet av gummisnoddarna det som är problemet, för femåringarna kan det vara att avgöra hur många spikar det är innanför gummisnodden, för fjortonåringarna kanske det gäller frågan om det går att göra en kvadrat av storleken 0,5, och för femtonåringarna varför det inte går att göra en liksidig triangel med sidlängden 3. Men vad är då geobrädet och var kommer det ifrån? Geobrädets införande tillskrivs matematikpedagogen Caleb Gattegno, mest känd för utarbetandet av Cuisenaire-Gattegno-metoden med räknestavar, men finns i litteraturen redan på 1700-talet. Detta uppslag är av ***Andrejs Dunkels*** *och är något reviderat, sedan det första gången publicerades i Nämnaren nr 3, 82/83, tema Problemlösning.*

Problem på ett bräde

Geobrädet består helt enkelt av en träplatta som försetts med ett regelbundet kvadratiskt gitter av spikar. Med gummisnoddar, gärna i många olika färger, gör man geometriska figurer - och problemen dyker upp ett efter ett. Geobrädet är också ett förnämligt hjälpmedel vid begreppsinlärning på olika nivåer, t ex namn på olika geometriska figurer, innanför, utanför, omkrets och area. Före skolåldern kan man börja med 3 · 3-spikars bräden och sedan gå över till 5 · 5-spikars. Väljer man måtten så att avståndet från en ytterspik ut till kanten är hälften av avståndet mellan två spikar inne på brädet så kan man få större bräden genom att sätta ihop ett antal mindre. Jag har själv uteslutande använt 5 · 5-spikars bräden och då utgått från kvadratiska plattor med sidan 12,5 cm. Avståndet från kanten till första spikraden har jag då tagit till 1,25 cm och avståndet mellan spikarna inne på brädet till 2,5 cm. För att slippa mäta och rita på själva plattan har jag helt enkelt lagt på ett vanligt rutat papper med 0,5 centimeters rutor, räknat rutor och slagit i spikar genom papperet där rutmönstrets linjer möts. På själva plattan bör man inte ha några linjer, när brädet är färdigt att tas i bruk.



Innan vi går över till några problemförslag så måste vi komma överens om ett sätt att bokföra resultat på. Jag har använt mig av ett A4-papper fyllt med prickar på 1 centimeters avstånd från varandra Det finns andra som förordar användningen av protokoll som är exakta kopior av brädet. Jag tycker nog att det är bättre med ett stort papper, där var och en då får avgränsa en lämpligt stor del för varje anteckning. Själva avgränsandet ger bra övning på förskole- och lågstadiet och är senare inget problem, vilket talar för att använda ett stort papper. På senare år har jag under den första tiden använt protokoll med 25 prickar avgränsade men med prickarna på 1 centimeters avstånd från varann.

Anm. När man så småningom vill använda geobrädet vid areabehandling så hade det varit bäst med t ex 1 cm mellan spikarna. Det visar sig emellertid bli alltför trångt med så litet avstånd, så man får nöja sig med att tala om avståndet 1 som avståndet mellan spikarna, och att tala om kvadrater med storleken 1 när man menar kvadrater som bestäms av 4 närliggande spikar.

Några problem

Uppgifterna som följer är fördelade på stadier. Fördelningen är naturligtvis subjektiv men ger en antydan om svårighetsgrad.

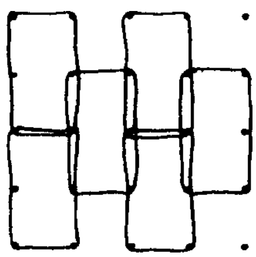
Förskolestadiet

Här inkluderas även åldrarna före förskolan.

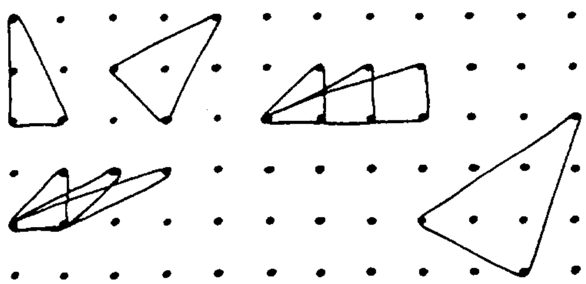
l) Att göra figurer som föreställer något, t ex hus, båt, blomma, ansikte.

2) Att göra bokstäver och siffror – i den mån barnet har intresse för sådana saker. (Observera att man kan göra samma bokstav eller siffra på flera olika sätt. Övningen bör inte göras till en gör-precis-som-jag-har-gjort-efterapning utan läggas upp så att barnet är kreativt.)

3) Börja med en $2 \cdot 1$-rektangel uppe i övre vänstra hörnet. Gör mönster med denna figur som utgångspunkt. – Börja med en halv sådan rektangel. – Börja med ett parallelltrapets som man får från rektangeln genom att ”skära bort” en halv $1 \cdot 1$-kvadrat nedtill till höger.



4) Vad är en triangel för något? Gör olika trianglar på brädet. Rita av dem på prickpapper. Här passar det bäst att ha ett protokoll som inte har 25 prickar avgränsade.



5) Gör figurer av olika slag med en gummisnodd. (En figur åt gången på brädet. Figurerna skall vara sådana att en ko kan använda dem till beteshagar. Kon skall kunna komma åt vartenda ställe i hela hagen utan att behöva hoppa över stängslet, dvs gummisnodden.) Rita av varje figur på prickpapper. Vissa figurer har speciella namn. Nämn de namn som du känner till. Hitta på passande namn där det inte finns några förut.

6) En parlek: Ett barn (eller läraren) gör en figur på sitt bräde. Det andra barnet tittar på figuren och skall göra en likadan på sitt. När båda är överens om att figurerna är lika byter man uppgifter, osv.

7) Att räkna antal. Gör en figur. Hur många spikar ligger innanför? Hur många utanför? Hur många är det på själva gummisnodden (dvs hur många är det som gummisnodden vidrör)?
(Det kan eventuellt bli diskussion om snodden verkligen vidrör en viss spik, då det ju kan inträffa att någon spik kommit en aning vid sidan av sitt rätta läge. Det kan då hända att det är någon millimeter luft mellan spiken och snodden. Ett pedagogiskt problem som man måste hantera med försiktighet.)

Här kan man med fördel successivt införa ordet *rand* genom att själv tala om figurens (eller områdets) rand, när man menar den del av figuren som själva gummisnodden utgör.

Lågstadiet

8) Gör en figur sådan att man har lika många spikar innanför som utanför. Kan detta göras på flera sätt? Bokför!

9) Läraren gömmer sitt bräde sedan hon/han placerat ett (litet) gummiband på en av spikarna. Barnen skall nu ta reda på vilken spik det är genom att ställa ja-eller-nej-frågor. (T ex ”Är det översta raden?”, ”Är det på vänstra halvan?”, ”Är det mittraden?”) Sedan kan de leka på tre; en gömmer och två frågar. (Ger anledning till att klara ut vad som menas med *rad*, var man skall börja räkna när man talar om tredje raden, etc. Ger bra övning på höger och vänster.)

10) På brädet lägger man en triangel med tre rand-spikar. Så leker man följande parlek: Den förste skall flytta snodden så att man får ett område med 4 rand-spikar. Den andre flyttar så att det blir ett område med 5 randspikar, etc. För varje drag skall alltså området få en randspik mer. (Eventuellt måste man efter några drag byta gummisnodd och ta en längre som går att spänna på rätt sätt.)

Anm. Här gäller det att se till att barnen verkligen räknar spikarna på randen så att det blir rätt.

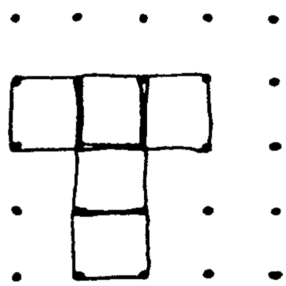
11) Kan du göra en figur som vidrör precis 9 spikar? Blev figuren en kvadrat? Om inte, gör en kvadrat som vidrör 9 spikar. Kan man göra en kvadrat som vidrör 12 spikar?

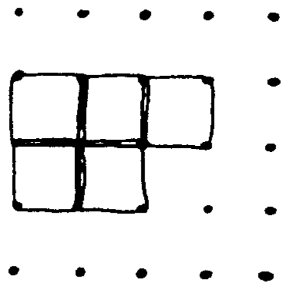
12) Gör en figur (fortfarande så att den duger som beteshage och så att kossan kan komma åt varenda fläck i hagen.) Räkna antalet hörn och antalet sidor. Bokför genom att göra en tabell och rita av figuren i första spalten, skriva antalet hörn i andra och antalet sidor i tredje. Gör många figurer och fyll i tabellen.

Anm. Bokföringen är viktig här. Den gör det möjligt att diskutera resultaten i efterhand. Bilden av figuren är viktig att ha med.

FIGUR	ANTAL HÖRN	ANTAL SIDOR
	4	4
	5	5
	7	7

13) *Fem-rutor-spelet.* På hur många sätt kan man lägga fem 1-kvadrater intill varandra så att två som är grannar har en sida gemensam? (En 1-kvadrat är alltså en ”rak” kvadrat med storleken 1 ruta, se figur överst till höger.) Rita upp de varianter du kommer på. (Det finnsvarianter som inte går att göra på ett enda 5 · 5-spikars bräde. Då kan man antingen sätta ihop två bräden eller uppmana eleverna att försöka rita sådana som inte går att göra på brädet. Därefter kan denna





aktivitet övergå i att man klipper ut fem-rutors-mönstren och tar rätt på vilka som går att vika ihop till lådor utan lock. Se Nämnarens temanummer om geometri, nr 3, 81/82, Uppslaget sidorna 46–50.)

14) Jag tror att man kan gå in på churesonemang med elever i trean — och kanske med några i tvåan Man skall då givetvis inte använda ordet area utan börja med att ställa frågor i stil med: ”Hur många sådana här” (man pekar på en rak 1-kvadrat) ” får det plats i en sådan här?” (Man pekar på en 1 · 2-rektangel.) Andra rektanglar och figurer sammansatta av rektanglar och så eventuellt trianglar kan man ta upp, om man märker att barnen tycker om aktiviteten och att de förstår vad det går ut på.

15) Aktivitet 5 fortsätter man givetvis med även på detta stadium Barnen har säkert lärt sig fler former. Redovisning på anslagstavlan i klassrummet.

16) I denna aktivitet skall du använda en gummisnodd som ett streck. Dela med detta streck geobrädet i två lika stora delar. Strecket får gärna böjas på alla möjliga sätt. Rita resultaten!

17) Dela geobrädet på samma sätt som i 16 men med två snoddar och i fyra delar.

18) Skilj av en 3 · 2-rektangel på brädet Dela rektangeln i två lika stora delar såsom i 16.

Mellanstadiet

19) Samma som 18 fast nu med två gummisnoddar och i tre delar.

20) Går det att med två snoddar (som i 17) dela ett 5 · 5-spikars geobräde i tre lika stora delar?

21) ***Begreppet area.*** Man börjar som i 14, och kan ganska snart gå in på trianglar som till att börja med skall vara halva rektanglar. Elevernas blick för figurers storlek övas upp genom att de upptäcker att man kan lägga ihop och att man kan titta på en större figur och dra ifrån. Man skall absolut inte sikta på ”basen gånger höjden”. Det kommer eleverna själva att komma på förr eller senare. Höjden kommer ju verkligen in på ett naturligt sätt på geobrädet och det är instruktivt att bygga trianglar med en sida mellan två närliggande spikar, t ex de två längst ned till vänster, och sedan låta motstående hörn genomlöpa spikraden ovanför. Alla trianglar man får på det sättet är lika stora men har drastiskt olika former.

22) Hur många olika kvadrater kan man göra på geobrädet? Här måste man diskutera vad man ska mena med ”olika”. Man kan ju tolka frågan dels som att bara storleken räknas, dels som att även läget är avgörande.

23) I figuren nedan finns sex geobrädesfigurer Går det att placera dessa på ett 5 · 5-spikars bräde så att hela brädet blir fyllt och de sex figurerna bara har randpunkter gemensamma?

Anm. Man brukar också uttrycka detta som att inga av de sex figurerna får överlappa. Figurerna får vridas.

24) Vilken eller vilka av de sex figurerna i 23 är sådan(a) att om man tar två exemplar av figuren så kan man göra en rätvinklig triangel?

25) Vilken eller vilka av de sex figurerna i 23 är sådan(a) att om man tar två exemplar av figuren så kan man göra en kvadrat?

26) Vilken eller vilka av de sex figurerna i 23 är sådan(a) att om man tar två ex av figuren så kan man göra en parallellogram?

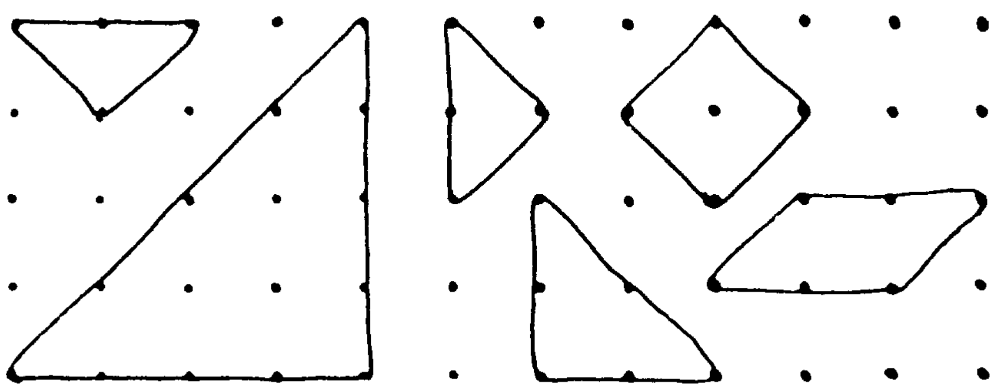
27) En elev gör en triangel på brädet. En annan skall göra en triangel som har precis samma form, men som antingen är större eller mindre än den första.

Anm. Detta skall förbereda för likformighet.

28) Samma som 27 men med andra figurer än trianglar. Man behöver då större geobräden, dvs flera ihopsatta, eller också kan man nöja sig med att göra denna övning endast på protokoll.

Högstadiet, gymnasiet

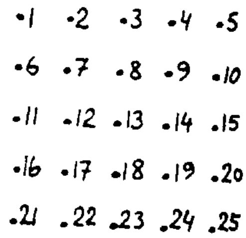
29) Detta problem bör göras på ett 3 · 3-spikars bräde, som man kan åstadkomma genom att inskränka sig till en del av sitt 5 · 5-spikars. Problemet kan ev ställas redan på lågstadiet. Är det sant att man kan ange en figurs utseende genom att tala om hur många spikar det är på randen och hur många innanför? Pröva genom att försöka göra figurer som beskrivs av (3, 0), (3, 1), (4, 0), etc. Det första talet i varje par står här för antalet på randen, det andra talet för antalet innanför. – Varför kan man på ett 3 · 3-bräde inte göra en (10, 0)-figur? Varför kan man varken göra en (3, 2) – eller en (2, 1) – figur? Går det att göra några av dessa figurer på ett större bräde? (Ev kan man redan i samband med detta problem styra in tankegångarna på areor. Eller också låter man det vänta tills man behandlar nästa problem.)

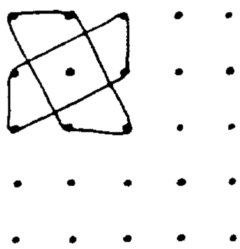


30) Finns det något samband mellan en figurs area och antalet spikar på randen? (Man finner lätt att det inte gör det; det är lätt att producera figurer med olika areor och samma spikantal på randen.) Finns det något samband mellan en figurs area och antalet spikar innanför? (Man finner lätt att det inte gör det.) Vi erinrar oss att våra figurer skall vara som beskrivits i 5 – en kossa skall kunna nå varje punkt inom figuren, om vi låtsas att den är en beteshage. Vi tänker oss nu ett 5 · 5-spikars bräde. Om vi nu kopplar ihop såväl antalet spikar på randen som antalet spikar innanför med arean, så finns det ett samband mellan dessa tre storheter. Vilket är sambandet?

Anm. Detta problem kan man lämpligen ge som projektuppgift över en längre period. Eleverna kan då göra många undersökningar och sätta upp sina rön på klassens anslagstavla. Det bästa är att varje resultat skrivs på en papperslapp. Då kan man flytta lapparna allteftersom man hittar på nya sätt att klassi-fi-cera sina data. Detta ger mycket god övning i att organisera, att ställa upp hypoteser, att pröva dem, ställa upp nya, etc. Varje elev får många observationer till sitt förfogande genom att hela klassens värden kommer upp på anslagstavlan. Man ger inga ledfrågor, man ger inga tips. Problemet ger eleven tillfälle till att låta sin kreativitet blomma ut. Sambandet som söks är alltså Picks formel. (Se Nämnaren nr 4 81/82, sidorna 42—44.)

31) Gör olika figurer (av det slag som vi betraktar, alltså en kossa skall kunna beta av hela området innanför utan att behöva ta sig över några hinder). Klassificera figurerna och redovisa på klassens anslagstavla. Jämför med figuren till höger.





32) Om man använder en gummisnodd så är det lätt att göra kvadrater av storlek 1, 4, 9 och 16. (En kvadrat med hörn i fyra närliggande spikar säger vi alltså har storleken 1.) Alla dessa kvadrater är ”raka”. Nu går det att göra även ”sneda” kvadrater. Vilka storlekar är då möjliga?

33) Numrera spikarna på ett 5 · 5-spikars geobräde uppifrån och från vänster så att första raden blir 1, 2, 3, 4, 5, andra raden 6, 7, 8, 9, 10, etc. – se figur ovan. Lägg ett gummiband runt spikarna 1, 2, 13 och 12. Lägg ett gummiband runt spikarna 3, 8, 11 och 6. Gummibandens gemensamma punkter avgränsar en figur. Vad är det för slags figur? Var noga med motiveringen. Hur stor är figuren?

34) Lägg med två gummiband liknande figurer som den i problem 33. Bestäm för varje figur dess storlek. *Anm. Lämpligt som långtidsprojekt.*

35) Gör så många olika stora kvadrater som möjligt med en eller två gummisnoddar. *Anm. Lämpligt som långtidsprojekt.*

36) Om man har samma numrering på spikarna som i 33, avgör om den triangel som har hörn i 4, 16 och 25 är liksidig.