

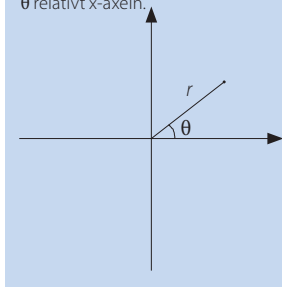
Blomstrande matematik med digitala imitationer

Digitala verktyg kan i gymnasiets högre kurser öppna möjligheter för ett kreativt arbete med trigonometriska funktioner. Här får vi exempel på hur växter kan modelleras i polära koordinatsystem.

I nom gymnasiematematikens trigonometri upplevs ofta de avsnitt som handlar om funktioner med koefficienter i vinkeln samt summor av trigonometriska funktioner som svårbegripliga för många elever. Polära koordinater och grafiska representationer av dessa funktioner kan vara en väg till bättre förståelse. I den här artikeln ger vi förslag på hur man kan använda grafer i polära koordinater för att väcka intresse och visa på ett grafiskt användningsområde. Som en estetisk och realistisk tillämpning kan verkliga föremål modelleras, i synnerhet blommor och blad (Vũ, 2008). Förutom arbete med matematiska modeller kan man få insikter i trigonometriska funktioner som grafiska redskap.

Digitala hjälpmedel är kraftfulla verktyg i arbetet med polära koordinater. Utöver datorer ger de flesta grafitande räknare möjligheter att rita grafer i polära koordinater. Läsaren uppmanas att undersöka de funktioner som presenteras här med hjälp av något lämpligt digitalt verktyg, exempelvis Geogebra, Maple eller Graph.

I ett polärt koordinatsystem anges koordinaterna för en punkt med avståndet r från origo och vinkeln θ relativt x-axeln.



Grafiskt lexikon för sinusfunktionen

I denna artikel kommer vi att ta upp grafer till några trigonometriska funktioner. Här intill presenteras några grundläggande grafer för sinusfunktionen $r = \sin\left(\frac{n\theta}{d}\right)$ avbildad i polära koordinater.

Modellering av växter

Med hjälp av funktionerna ovan och enkla operationer med dessa går det att efterlikna blommor och blad. Nedan visas tre exempel: efter ett foto av ett föremål följer några avbildningar i Geogebra eller Graph.

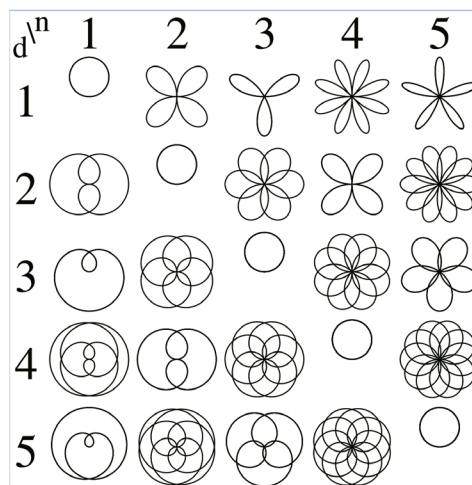


Fig 1. Utsnitt ur bilden Rhodonea curve.

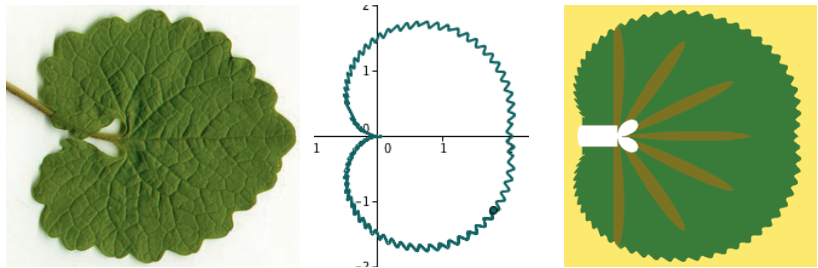
Löktrav: hjärtformigt sågtandat blad

Här försöker vi avbilda ett blad av löktrav.

- För att avbilda bladets hjärtformade del används uttrycket $[1 + \cos \theta]$.
- För att göra det större området kring y-axeln adderas termen $[0.5 |\sin \theta|]$.
- För att härma sicksack-kanten adderas termen $[0.05 \cos 81\theta]$.

Resultatet blir funktionen $r = 1 + \cos \theta + 0.5 |\sin \theta| + 0.05 \cos 81\theta$. Till sist, för att stänga den del som det begränsade intervallet lämnar öppen och för att imitera bladnerv, används funktionen $r = 0.6 \cos^4 4\theta$.

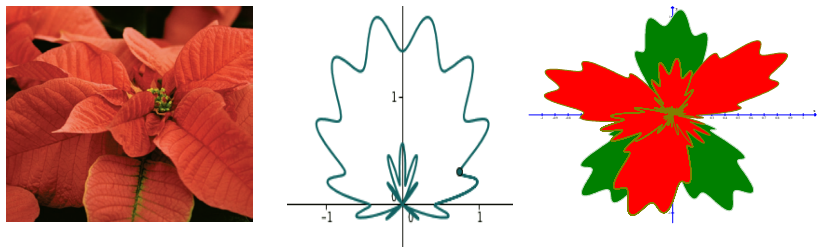
Fig 2.
Hjärtformigt
blad och dess
avbildningar i
Geogebra och
Graph.



Julstjärna: överlappande flikiga blad

- För att avbilda ett blad används funktionen $r = \sin \theta + 0.8 \cos^2 8\theta$.
- Vi får en hel blomma av flera överlappande varianter av samma funktion roterade i förhållande till varandra.
- Bladens storlekar justeras med lämpliga koefficientval.

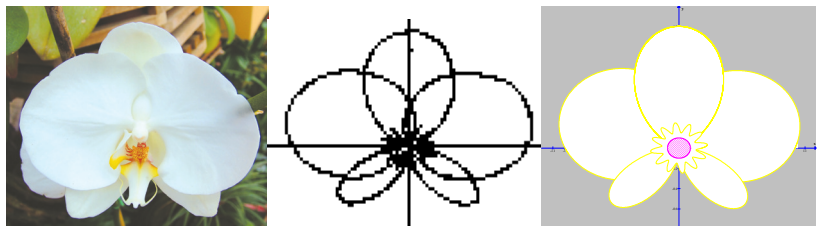
Fig 3.
Julstjärna
avbildad i
Geogebra och
Graph.



Orkidé: överlappande runda blad

- Orkidéns blad ges av funktionerna $r = 0.8 \cos^7(\theta - a)$ med $a = 3,9$ och $5,5$, $r = 1.1 \cos(\theta - b)$ med $b = 0,4$ och $2,7$ samt $r = 1.2 \sin^3 \theta$.
- Det lilla centrala området ges av $r = 0.15 + 0.1 \sin 12\theta$.

Fig 4.
Orkidé och
dess avbildning
med TI-84 och i
Graph.



Spiraler och tangensfunktioner

I figur 5 visas grafer till några polära funktioner vars grafer är spiralformade. Längst till vänster avbildas exponentialspiralen $r = e^\theta$. Följande tre har den gemensamma formeln $r = \theta^b$ för olika värden på b ; från vänster: $b = 1$ (Arkimedes spiral); $b = 1/2$ (Fermats spiral); $b = -1/2$ (Lituus spiral).

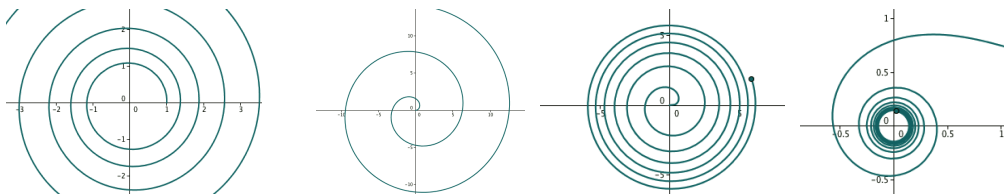


Fig 5. Grafer till några spiralformade funktioner.

I figuren nedan visas grafer till trigonometriska funktioner av typen $r = \tan k\theta$ för några olika k -värden, samt till summan av en tangensfunktion och en snabbt svängande sinusfunktion.

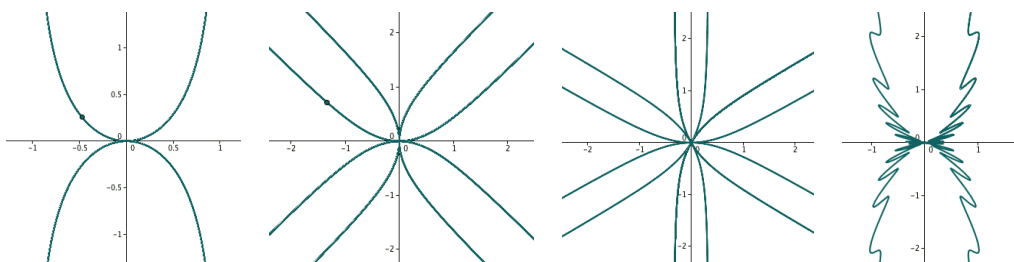


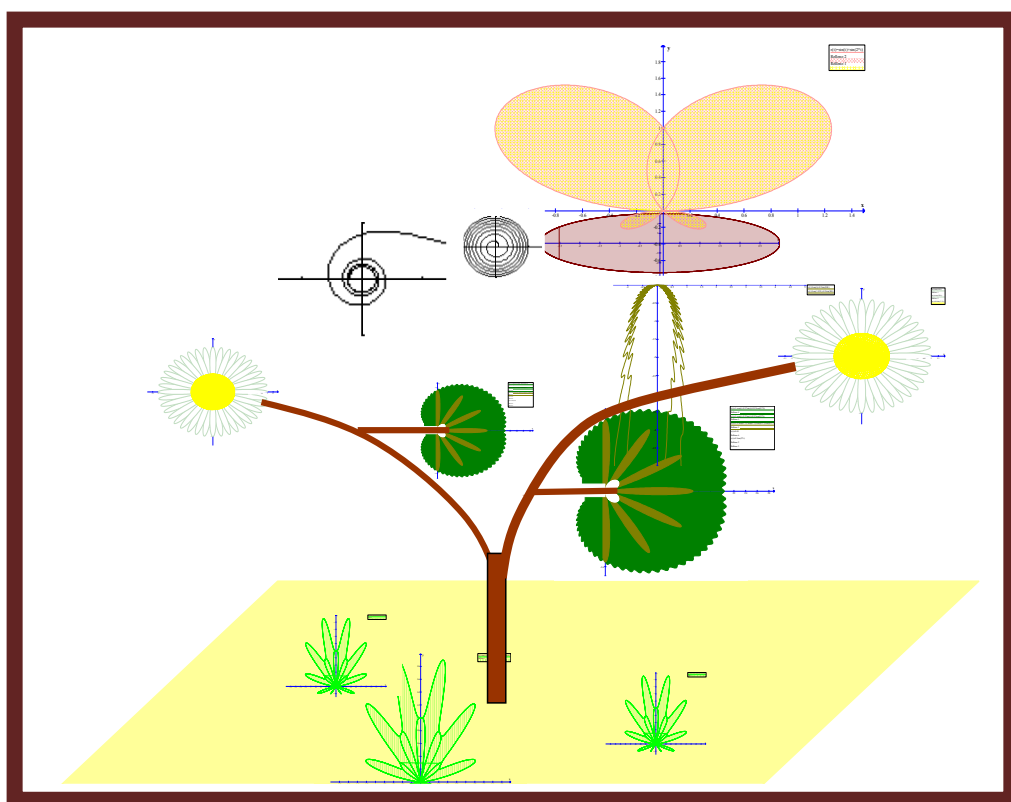
Fig 6. Grafer till några tangensfunktioner med heltal som vinkelkoefficienter. Från vänster $k = 1, 2$ resp 3 . Sista grafen visar en superposition av tangens och sinus: $r = \tan \theta + 0.3 \sin 30\theta$.

Matematik och skönhet

Matematik är inte bara räkneverktyg; ursprungligen var matematiken tydligt anknuten till musik och konst. Vi matematiklärare bör, enligt oss, sträva efter att återföra ämnet till den konstnärliga väg som den en gång hade. Men matematiklärare kan inte frångå den systematiska träningen av algebra, matematiska begrepp och algoritmer, eftersom det behövs för att rusta eleven så att hon ska kunna röra sig fritt i den matematiska världen, att utveckla hennes "matematiska händer och fötter". Genom en undervisning som låter eleverna träna på att använda matematiska verktyg kan vi bana väg för utvecklingen av en känsla för matematikens skönhet, att utveckla "matematiska ögon och hjärta" hos eleven. Att visa den skönhet som matematiken bär, men också att utveckla förmågan att se den matematik som kan upplevas i fenomen runt omkring oss. Vi hoppas att idéerna ovan kan fungera som inspiration för en varierad undervisning om trigonometri.

En matematisk målning

I figuren på nästa sida visas ett försök till matematisk målning. Vi använder de funktioner vi har berättat om ovan för att skapa en bild med växter och en fjäril. För att rita kvistar använder vi de översta bågarna av $r = \cos 2\theta$. Gräsväxter kan modelleras med hjälp av $r = \sin \theta + 0.8 \sin^4 6\theta$. De olika figurerna i kompositionen har satts i rutor som sedan placerats i lämpliga lägen.



FÖRSLAG PÅ UPPGIFTER

Hur verkar koefficienterna i den aktuella funktionen?
 Hur ändrar man bladstorlekar?
 Hur roterar man ett blad?
 Motivera dina resonemang.
 Anteckna och diskutera.

LÄNKAR TILL PROGRAMVARA

Polära koordinater med Geogebra
http://webspaceship.edu/msrenault/ggb/polar_grapher.html
<http://www.jcu.edu/math/MAAworkshop/PolarGrapher.html>
 Graph
<http://www.padowan.dk/graph/>
 Polära koordinater med Maple
<http://curvebank.calstatela.edu/polar/polar.htm>
 Interaktiv blomma
<http://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wiki/index.php/Rose>

LITTERATUR

Vü, T. (2008) *Från lina till rosa*. Elevarbete inom kursen Matematik breddning, Thorildsplans gymnasium, Stockholm.
 Weisstein, Eric W. (2012) *Rose*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>
 O'Connor, J.J & Robertson, E.F. (2006) *Famous curves index*. School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland.
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html>
Rhodonea Curve <http://www.jasondavies.com/rhodonea/>