CHRISTER BERGSTEN

En gyllene pyramid

Fem trianglar och en pentagon

Den regelbundna femhörningen, pentagonen, är ett enkelt geometriskt objekt som innehåller förvånansvärt mycket matematik. Från detta objekt kan man konstruera flera andra som trianglar och femuddiga stjärnor. Gemensamt för alla dessa figurer är att de har starka anknytningar till det gyllene snittet. Från pentagonen kan man även konstruera ett tredimensionellt objekt – en gyllene pyramid.

Matematikens historia och inflytande skär rakt igenom hela den mänskliga civilisationens historia och utveckling, såväl tekniskt som kulturellt i en mer humanistisk mening. Bland de matematiska objekt som syns mest, och inte bara i den västerländska kulturen, återfinns till exempel *pentagrammet*, den femuddiga stjärnan och *pentagonen*, den regelbundna femhörningen.

Att pentagrammets historia sträcker sig så långt som 6000 år tillbaka i tiden kanske hänger samman med det enkla faktum att man kan rita det så enkelt: utan att lyfta pennan formar det nästan sig självt som en sluten figur. Dess koppling till mysticism är urgammal, ett fenomen som i dagens paravärld florerar kanske livligare än någonsin. Det gäller både "mörkare" fenomen som krig och ofärd – då det är svartmålat – och "ljusare" som lycka, harmoni etc – då det är målat bara med konturer och är ljust inuti. De vanligaste uttrycken för pentagrammets och pentagonens mystik är klassiska bilder av de fem elementen och "inskrivningen" av en människa i en cirkel. På internet finns mängder av sidor kring dessa teman. (Se referenslistan.)

Christer Bergsten är universitetslektor i matematik och matematikens didaktik vid Linköpings universitet

I dagens svenska skola ser man däremot inte mycket av den matematiska guldgruva som den regelbundna femhörningen utgör.[1] *Det Gyllene Snittet* – som trots sitt namn betecknar en proportion, något som framgår bättre till exempel av den engelska termen *The Golden Ratio* – brukar ibland nämnas i samband med historiska utblickar, dock ofta utan att dess koppling till femhörningen tas upp. Kanske beror detta på att det anses för "svårt" att reda ut förhållandena matematiskt.

[1] *Tas upp i Ulin (1988, s 74-76; 1996, s 93-95) och Furness (2001, s 122-124)*

Den klassiska framställningen i Euklides *Elementa* är heller inte helt enkel (se t ex Thompson, 1991, s. 327ff). Här ska ett angreppssätt presenteras som förhoppningsvis visar på en ingång till femhörningens mystik som kan locka även dagens skolelever till att fundera vidare och fascineras av den matematik som ligger gömd bakom några streck i en figur. Som lön för mödan kan han/hon som avslutning vika en egen *gyllene pyramid*.

Geometrisk analys

Vad kan man se om man har en pentagon med ett inritat pentagram framför sig? Det beror förstås på vad man letar efter. Det ser ut som om vinklarna ABF och BAF i figur 1 är lika, liksom vinklarna AFG och AGF, och att trianglarna ABF respektive FGA därmed är likbenta. Att dessa vinklar verkligen är parvis lika förstår man om man är bekant med vad som i dagens skolböcker brukar kallas randvinkelsatsen.

Tänker man sig den regelbundna femhörningen ABCDE inskriven i en cirkel, kommer ju vinklarna ABE (och därmed ABF), BAC (och därmed BAF) och CAD (och därmed FAG) samtliga att "stå på" lika stora bågar. De är därför alla lika, tillsammans med vinklarna EAG och AEG (av samma skäl). Eftersom vinkeln BAE är en femtedel av femhörningens vinkelsumma, dvs 108°, är dessa vinklar (ABF osv) alla en tredjedel av detta, dvs 36°. Vinkeln BAG är då 72°. Dessutom är trianglarna BAF och EAG kongruenta (en sida med intilliggande vinklar lika), vilket medför att triangeln FGA är likbent. Vinklarna AGF och AFG är då lika och vardera (180° – 36°)/2, dvs 72°.

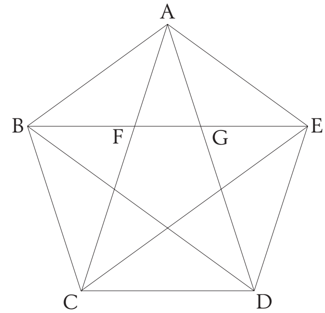
Pentagrammet är alltså uppbyggt av likbenta trianglar, där basvinkeln är dubbla toppvinkeln. I pentagonen ABCDE finns sådana trianglar i tre olika storlekar! Den minsta storleken kan representeras av triangeln AFG, den mellersta av triangeln BGA och den största av triangeln ACD.

Trianglarna BAG och AGF är alltså likformiga, eftersom de har lika vinklar. Pentagrammets proportioner kan då bestämmas. Om sidan BF är *a* längdenheter (liksom AF och AG) och sidan FG är *b* längdenheter, så ger likformigheten att

BG:AG = AF:FG, dvs

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

Detta innebär att punkten F delar sträckan BG i *gyllene snittet*! Hur kan denna delning genomföras? Klarar man det kan man sedan konstruera en pentagon.



Figur 1. En regelbunden femhörning (pentagon) med ett inskrivet pentagram.

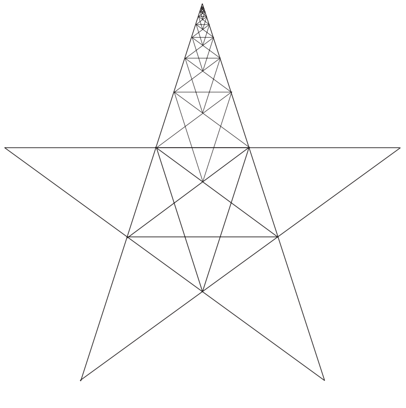
Gyllene trianglar

En pentagon och ett pentagram byggs alltså upp av olika stora likformiga trianglar, som är likbenta och där de lika sidorna förhåller sig till basen i gyllene snittets proportioner, till exempel trianglarna AFG, BGA och ACD. En sådan triangel kallas *en gyllene triangel*! (Se Pappas 1987 s 188–189.) Basvinkeln i denna gyllene triangel är enligt ovan dubbelt så stor som dess toppvinkel. Kallas toppvinkeln *v* är varje basvinkel 2*v* och triangelns vinkelsumma 5*v*. Här ses talet 5, som åter vittnar om denna triangels koppling till femhörningen. Att mätetalen för de vinklar som finns i pentagrammet och pentagonen (dvs 36°, 72° och 108°) alla bara innehåller primtalen 2 och 3 och att 2 + 3 = 5 är kanske mer en slump beroende på valet av mätenhet för vinklar.

Den likbenta triangel där basen förhåller sig till de lika sidorna i gyllene snittets proportioner kan också kallas en gyllene triangel. Även den finns med i pentagon/pentagram-figuren ovan (t ex triangeln ABF men även CED och CEF).

Det finns alltså två gyllene trianglar, som också enligt ovan har den egenskapen att om de placeras intill varandra (dvs som ABF och AFG ovan), så bildas en ny gyllene triangel (dvs triangeln ABG i figuren ovan)! Uttryckt på ett annat sätt bildas två gyllene trianglar om man drar en bisektris till en basvinkel (som är 72°) i en gyllene triangel.

Utgår man från en pentagon, regelbunden femhörning, får man ett inre pentagram om man drar diagonalerna i pentagonen. Men man får också ett yttre pentagram om man förlänger pentagonens sidor tills dessa förlängningar träffar varandra. Genom en rekursiv process kan man skapa en oändlig följd pentagoner och pentagram inom detta yttre pentagram. Längdskalan mellan en pentagon och nästa pentagon i denna rekursion är naturligtvis gyllene snittet. Genom denna konstruktion skapar man alltså oändliga följder av gyllene trianglar i gyllene proportioner (figur 2).



Figur 2. Oändliga följder av pentagram och pentagoner. Här visas detta i en av spetsarna.

Algebraisk analys och konstruktion

Genom att algebraiskt bearbeta likheten (1) kan det bli möjligt att bestämma relationen mellan sidorna på de likformiga trianglarna AFG, BGA och ACD som bygger upp pentagonen (pentagrammet). Med substitutionen $x = (a/b)$ kan ekvation (1) skrivas

$$1 + \frac{1}{x} = x \iff 1 + x = x^2 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Då x är ett positivt tal är den enda lösningen $x = (1 + \sqrt{5})/2$ (ett tal som brukar betecknas med den grekiska bokstaven Φ (”fi”), en matematisk konstant med en mystik som kan jämföras med talet π), som alltså är gyllene snittets proportioner:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Det innebär att $a = b(1 + \sqrt{5})/2$. Känner man sidan b kan alltså sidan a konstrueras utifrån denna likhet som $a = b/2 + \sqrt{5}\,b/2$.

Utgå från sidan b, skapa en rätvinklig triangel med b som ena kateten och $b/2$ som den andra kateten. Då är hypotenusan i den triangeln (enligt Pythagoras sats) $\sqrt{5}\,b/2$. Genom att addera den lilla katetens längd till hypotenusan fås a! Konstruktionen av pentagrammet och pentagonen kan nu göras (med beteckningar som i figur 1):

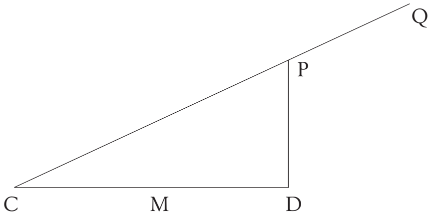
Konstruera först en gyllene triangel (t ex ACD i figur 1)

1. Utgå från sträckan CD, dvs den sida s man önskar för sin pentagon.
   Den sträcka som söks är då

   $$c = \frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{5}}{2}s$$

   så att förhållandet $c:s$ är gyllene snittet.
   Bestäm CD:s mittpunkt M (klassisk konstruktion)

2. Konstruera en normal N till CD genom D (klassisk konstruktion)



Figur 3. Del i konstruktion av en gyllene triangel

3. Sätt passaren med spetsen i D och blyertsen i M och rita en cirkel som skär N i P och dra sträckan CP. Då är CP lika med

$$\frac{\sqrt{5}}{2}s$$

4. Sätt passaren med spetsen i P och blyertsen i D och rita en cirkel som skär CP:s förlängning i Q. Då är CQ lika med

$$\frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{5}}{2}s = \Phi \cdot s$$

5. Sätt passaren med spetsen i C och blyertsen i Q och markera en cirkelbåge mitt över CD. Behåll avståndet men sätt nu passarspetsen i D och markera en cirkelbåge. Skärningen mellan dessa cirkelbågar är punkten A och den gyllene triangeln ACD kan fullbordas.

Fullborda nu pentagonen (ABCDE i figur 1)

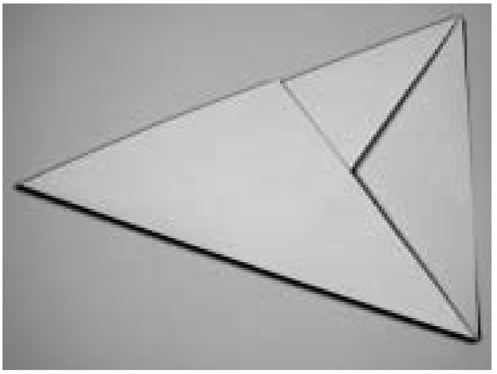
6. Ställ in passaren på avståndet CD och sätt passarspetsen i C respektive A och markera cirkelbågar mitt utanför AC. Skärningspunkten mellan dessa bågar punkten B.

7. Behåll passaren på avståndet CD och sätt passarspetsen i A respektive D och markera cirkelbågar mitt utanför AD. Skärningspunkten mellan dessa bågar är punkten E.

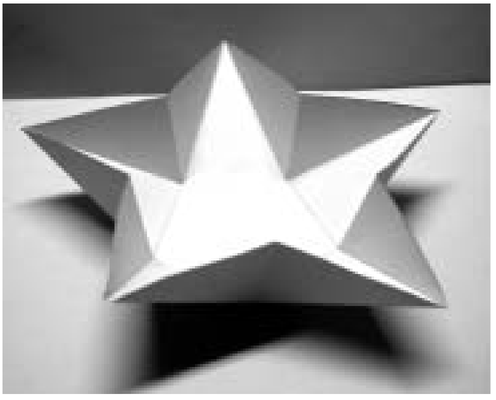
8. Nu är punkterna A, B, C, D och E bestämda och både pentagonen och/eller pentagrammet kan fullbordas genom att dra de sträckor som saknas.

En gyllene pyramid

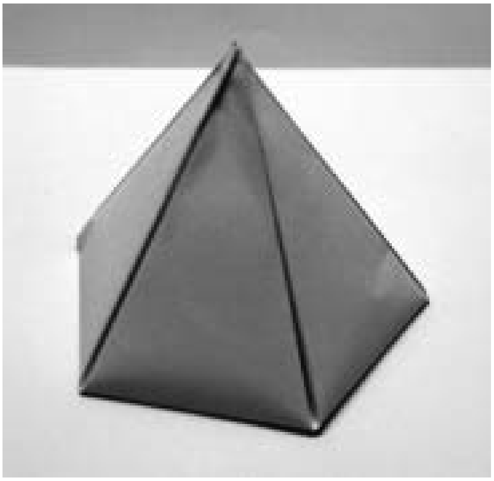
Klipper man ut ett pentagram i papper och viker upp de gyllene trianglar som sticker ut från pentagonen i mitten tills de möts i toppen, bildas en pyramid. Denna vackra pyramid bör naturligtvis få namnet *den gyllene pyramiden*. För att få en mer stabil gyllene pyramid är det dock bättre att utgå från en pentagon och vika längs de sträckor som det inre pentagrammet bildar. Resultatet kan då se ut som i figur 4a.



Figur 4a. Efter vikning av två diagonaler i en pentagon fås en gyllene triangel.



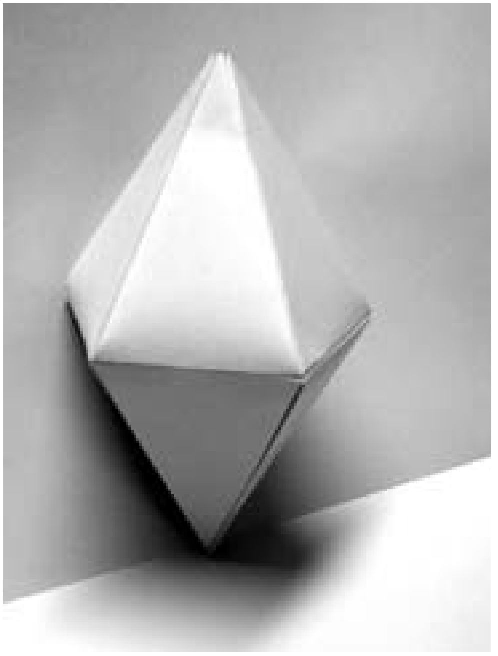
Figur 4b. Alla vikningar gjorda för att forma pyramiden.



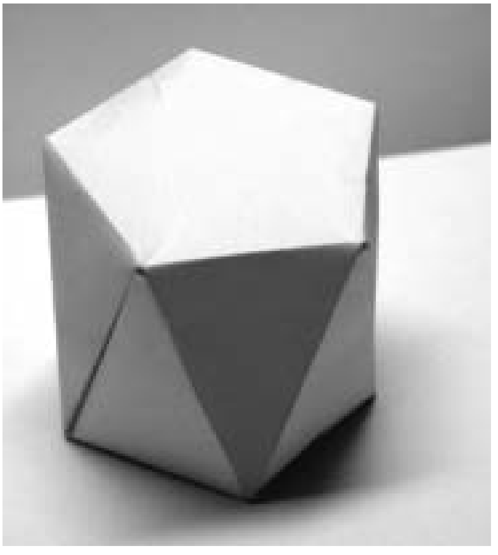
Figur 4c. En gyllene pyramid vikt från en pentagon.

Den stora pyramiden i Gizeh i Egypten brukar ofta kallas *The Great Golden Pyramid*, beroende på att det gyllene snittets proportioner går att hitta i konstruktionen. Med beteckningen *Golden Pyramids* saluförs också i olika sammanhang små pyramider med en kvadrat som bottenyta och fyra gyllene trianglar som sidoytor – tillverkade i guld är dessa pyramider också gyllene i dubbel mening. En pyramid som i figur 4c, dvs med en pentagon som bottenyta och fem gyllene trianglar som sidoytor, har jag däremot aldrig sett tidigare, och inte heller lyckats hitta vid sökning på internet, men det är naturligtvis den som bäst berättigar till namnet *den gyllene pyramiden*!

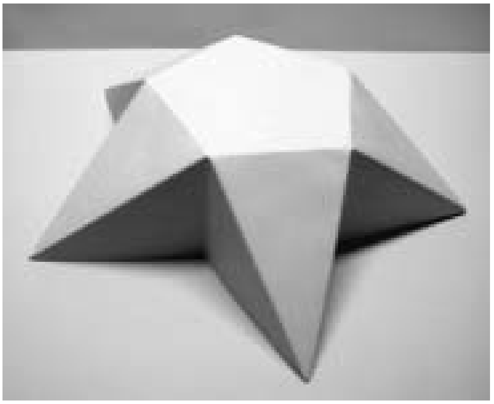
Några ytterligare figurer som lätt kan formas visas i figurerna nedan. En dubbelpyramid med tio gyllene trianglar som sidoytor fås om bottenytorna på två gyllene pyramider sätts ihop (figur 5). Fortsätter man med två pentagoner från läget i figur 4b ovan kan man sätta ihop dem "spets mot spets" och få figur 6. Tar man sin form i läget i figur 4b och vänder upp-och-ner fås en vacker 3-dimensionell stjärna som i figur 7. Man kan också sätta två sådana "botten mot botten".



Figur 5. En dubbel gyllene pyramid.



Figur 6. En antiprisma av två pentagram.



Figur 7. En gyllene stjärna.

Mer matematik

För den som vill fördjupa sig i geometrin kring figurerna som beskrivits här finns många storheter som kan beräknas. Några exempel är arean av en gyllene triangel och av en pentagon, volymen av den gyllene pyramiden ovan och arean av dess totala begränsningsyta (alla uttryckta i pentagonens sida s), samt exakta värden för sinus och cosinus av vinklarna 36° och 72°. Beräknar man pyramidens höjd H, pentagonens "radie" R (dvs avståndet från dess mittpunkt till dess hörn) och avståndet d från pentagonens mittpunkt till mittpunkten på en av dess sidor, hittar man en del intressanta resultat som att

$$\frac{H}{d} = 2 \quad \text{och} \quad \frac{H}{R} = \Phi .$$

Dessa resultat innebär att för vinkeln v mellan pyramidens sidoyta och dess bottenyta är $\tan v = 2$ och för vinkeln u mellan pyramidens sidokant och dess bottenyta är $\tan u = \Phi$. Det gyllene snittet återfinns alltså på mer än ett sätt inom denna gyllene pyramid.

REFERENSER

Furness, A. (2001). *Matematiken tar form.* Solna: Ekelunds Förlag.

Pappas, T. (1987). *The joy of mathematics.* San Carlos, CA: Math Aids.

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Ulin, B. (1996). *Engagerande matematik.* Solna: Ekelunds Förlag.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Exempel på internetadresser om pentagram och pentagoner

Matematiska beskrivningar

mathworld.wolfram.com/Pentagram.html
mathworld.wolfram.com/Pentagon.html
www.georgehart.com/virtual-polyhedra/pentagram.html
mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html
alum.wpi.edu/~geezer/pentagram/pent.html

Historiska beskrivningar

www.angelfire.com/id/robpurvis/pentagram.html
www.cs.utk.edu/~mclennan/BA/PP.html
skepdic.com/pentagram.html
www.symbols.com/encyclopedia/29/2913.html
www.flindersclubs.asn.au/pagan/paganism/pentagram.html
www.fabrisia.com/pentagram.htm
freemasonry.bcy.ca/anti-masonry/pentagram.html

Mysticism

www.i-am-a-i.org/read-only/xChapter_1.5.html
wwws.irb.hr/~tust/Penta/Penta.html

Den stora (gyllene) pyramiden

www.innerx.net/personal/tsmith/Gpyr.html