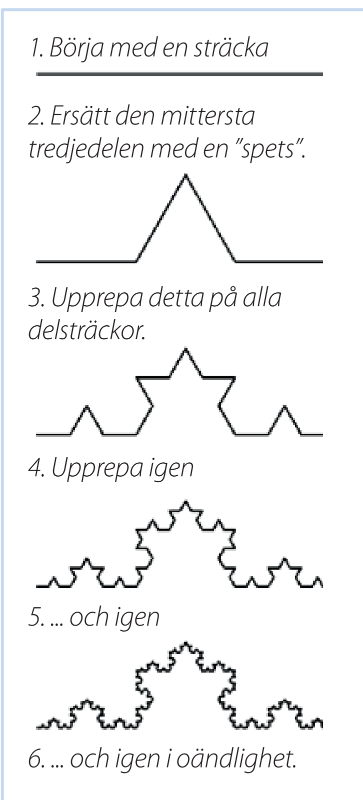
Strövtåg
med Jöran Petersson

Säsongsmatematik

Liksom Krösa-Maja skrämde Emil och Ida i Lönneberga med berättelser om varulvar, skrämmer många skolungdomar idag sig själva med fantasylitteratur. Även matematiken har sin fantasylitteratur. Ja, hela matematiken är fantasi – mycket användbar sådan. Vet förresten dina elever att häxor, monster, drakar, snöflingor, svampar och hjärtan också finns i matematiken? Med hjälp av grundskolematematik ska vi fantastiskt nog ta en titt på en del av den matematik som världens ledande matematiker brottades med runt år 1900.



Von Kochs pepparkaka – en kontinuerlig kurva utan tangent!

Bilden här intill föreställer Helge von Kochs snöflinga i form av pepparkaka och det smakar ju gott i juletider. För att förstå rubriken och se hur kakan smular sig, definierar vi en *kontinuerlig kurva* som en kurva vi kan dra utan att lyfta pennan och *tangent* som att det finns endast en rät linje som snuddar kurvan utan att korsa den. Observera att orden ”endast en” är viktigt här. Som alla bör veta är ju matematiker inte alls rädda för spöken och zombier men livrädda för tvetydigheter. Vid ett hörn finns det flera linjer som snuddar kurvan utan att korsa den, men matematikernas krav på ”endast en” säger att vi inte får kalla det för tangent om det finns mer än en linje att välja på. (Antikens greker använde denna gamla definition av tangent. Definitionen fungerar inte för bokstaven S, där tangenten i åtminstone mitten av bokstaven skär s-kurvan. Det finns en bättre modern definition som vi kan lämna till en annan gång.) Helge von Koch var en svensk matematiker som år 1904 ställde frågan om det finns en kontinuerlig kurva som saknar tangent. Han var egentligen ute efter att problematisera funktionsbegreppet. För grundskoleelever kan vi strunta i det även om gymnasister kan ha nytta av att veta det. Han besvarade själv sin fråga genom att, som på illustrationen, konstruera det som kom att kallas *von Kochs snöflinga* (eller pepparkaka).

Helge von Koch visade att denna kurva, en av de första fraktala kurvorna, i varje steg (1) förblir kontinuerlig och (2) att de kortare raksträckorna går mot längden noll och därför bara har hörn och därmed inga tangenter.

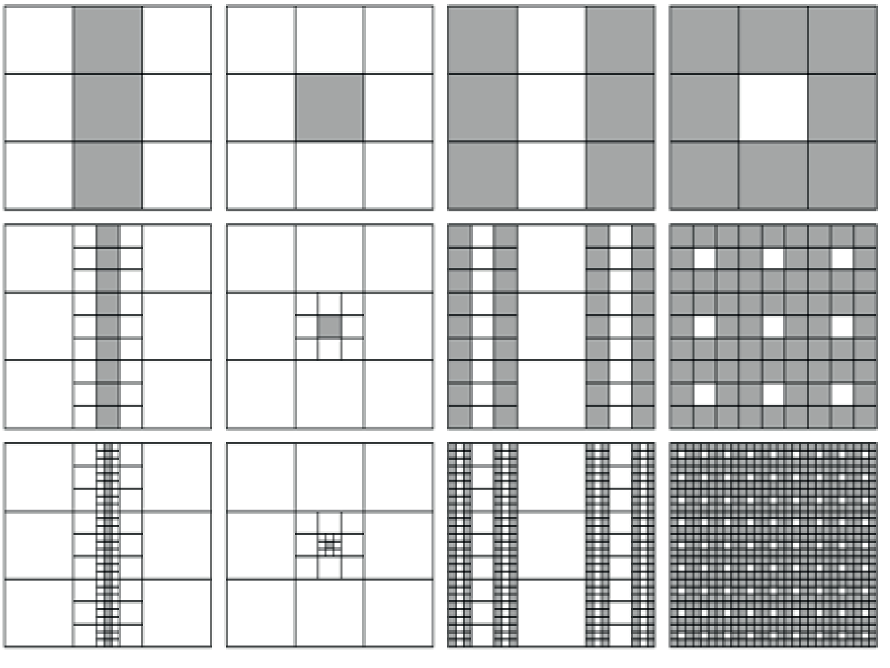
Monster, drakar & damm

Vi fortsätter på temat fantasy. Kurvor är endimensionella och har därför arean noll. Eller lurar en monsterkurva i vassen …? Låt oss undersöka! Först behöver vi veta något om förhållandet mellan meter, kvadratmeter och kubikmeter. Betrakta potensekvationen

$$\text{längdskala}^{\text{dimension}} = \text{dimensionsskala.}$$

Exempel: Längdskalan mellan meter och decimeter är 10. Eftersom area har dimensionen 2 och volym dimension 3, ger denna ekvation att areaskalan mellan m^2 och dm^2 blir $10^2 = 100$ och volymsskalan mellan m^3 och dm^3 blir $10^3 = 1000$. Matematikern Felix Hausdorff såg på det hela så här: Istället för att beräkna dimensionsskala genom att stoppa in längdskala och dimension, stoppar vi in dimensionsskala och längdskala och beräknar dimensionen. Det är ungefär som att säga att ”eftersom vi ser att vi kan lägga en kvadratmeter av hundra kvadratdecimetrar, får vi ekvationen $10^{\text{dimension}} = 100$ och vi kan då beräkna att dimensionen = 2”. Liksom Hausdorff gjorde så ska vi leka med ekvationen ovan i följande fyra exempel.

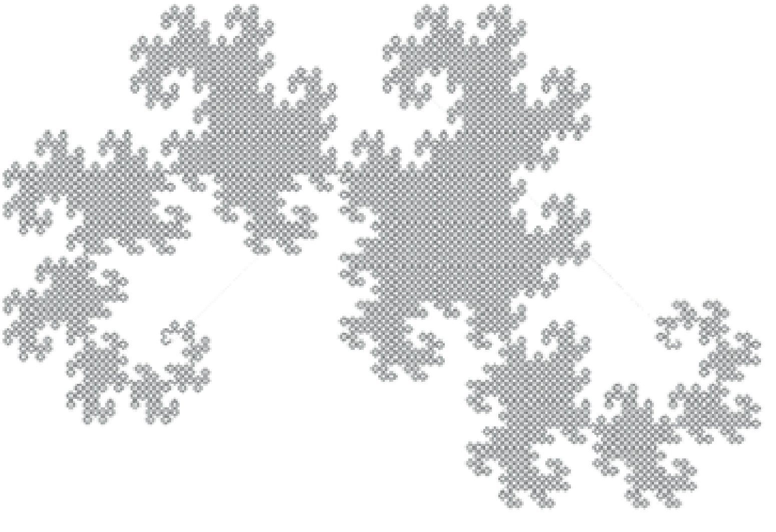
1. Vi kan dela in en kvadrat i nio småkvadrater och se att ekvationen blir $3^{\text{dimension}} = 9$ och helt väntat blir lösningen dimension = 2. Betrakta nu figurerna i den vänstra kolumnen. Vi delar upp en kvadrat i nio småkvadrater och klipper bort allt utom mittenkolumnen så att tre rutor blir kvar. Upprepar vi detta oändligt många gånger får vi bara ett linjestycke kvar. Då blir $3^{\text{dimension}} = 3$ med uppenbar och väntad lösning.
2. På samma sätt konvergerar andra kolumnen mot en punkt eftersom vi klipper bort åtta rutor så att endast en ruta blir kvar. Ekvationen blir $3^{\text{dimension}} = 1$ med lösningen dimension = 0. En punkt har alltså dimensionen noll.



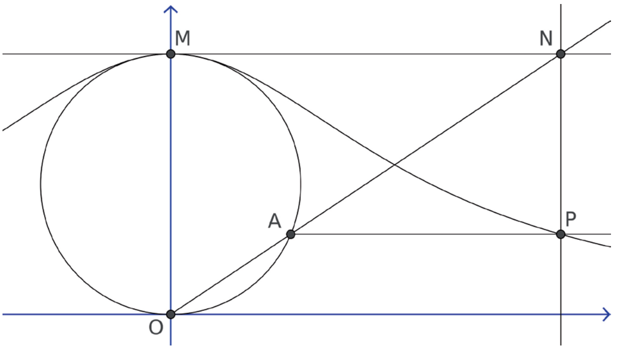
3. Till fantasylitteraturen hör gamla dammiga slott. Den tredje kolumnen är en variant av ett särskilt sorts matematiskt damm som kallas *Cantordamm*. Idén med Cantordamm är att börja med en sträcka (eller rektangel eller rätblock) och ta bort den mellersta tredjedelen i varje kvarvarade bit. Illustrera Cantordammet nästa gång du skär upp en rulltårta eller en brödlimpa – kvar blir bara smulor! Cantordammet visade sig faktiskt få en tillämpning i den informationsöverföring som internet bygger på. För vårt Cantordamm har vår ekvation utseendet $3^{\text{dimension}} = 6$ eftersom sex rutor blir kvar i varje steg. Om eleverna kan potenser men inte logaritmer, kan klassen med hjälp av miniräknare tillsammans pröva sig fram med värden på dimensionen och stänga in lösningen i intervallet $1{,}63 < \text{dimension} < 1{,}64$.
4. En tidig fantasybok är *Alice i underlandet*. Hon hittade en kaka med texten ”Ät mig!”. Har du tänkt på att kompakta bakverk inte är lika smakligt som de som är porösa och ”svampiga”? Därför använder vi ofta jästsvamp när vi bakar. Svampar förekommer i fantasylitteraturen och även i matematiken som *Sierpinski sponge* och *Menger sponge*. Dimensionen för de svampiga figurerna i högra kolumnen får eleverna genom att lösa ekvationen $3^{\text{dimension}} = 8$.

Så långt är fraktala dimensioner inte så konstigt; klipper vi bort något, så minskar Hausdorff-dimensionen. Men hur är det med von Kochs snöflinga? Ekvationen vi anlitat blir $3^{\text{dimension}} = 4$ eftersom vi ersätter tre bitar med fyra bitar i den nya figuren. Vi kan med miniräknare pröva oss fram till att $1{,}26 < \text{dimension} < 1{,}27$. Här börjar det monstruösa – en kurva med dimension större än ett. När matematikern Giuseppe Peano 1890 upptäckte en ytfyllande kurva, alltså en kurva med area ($\text{dimension} = 2$), blev andra matematiker förskräckta. Sådana kurvor kom att kallas monsterkurvor och några hade till och med volym. En sådan är *Drakkurvan* som skapades av John Heighway, Bruce Banks och William Harter 1967.

Låt klassen experimentera med att hitta på kurvor med dimensioner närmare 2 än 1 genom att lägga till fler bitar än vad Helge von Koch gjorde. Kanske några av eleverna lyckas? I så fall har de lyckats med en bedrift i klass med vad världsledande matematiker gjorde runt år 1900!

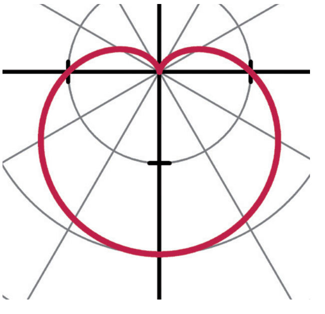


Häxan i matematiken



Kurvan *Agnesis häxa* är uppkallad efter Maria Agnesi. Kurvan har formen av en våg och dess namn beror egentligen på en felöversättning. Den latinska sjöfartstermen 'versoria' är på italienska 'versiera', vilket dock på italienska är en homonym till ordet åklagare, som i sin tur används om Satan, djävul och häxa då det hebreiska ordet för åklagare är Satan. Agnesi själv var dock betydligt mer ängel än häxa. Hon skrev matematikläroböcker, som i popularitet bland matematikstudenter kan jämföras med J. K. Rowlings kioskvältare om Harry Potter. Agnesi ägnade större delen av sitt liv och sin förmögenhet till att hjälpa fattiga, sjuka och pensionärer.

14 februari – kardioidens dag



Nu till beräkningar som kräver både trigonometriska funktioner och omvandling mellan polära och rektangulära koordinater. Ett tips är att ladda hem gratisprogrammet O*ctave*. Programmet ritar kardioidens graf med följande rader:

```
v=[-pi:0.01:pi]; r=(1-sin(v)).^0.5;
x=r.*cos(v); y=r.*sin(v);
plot(x, y);
legend('Kardioidens dag 14/2; plotta (r; v) med r=(1-sin(v)).^0.5');
```

Första april i matematiken

Matematiklektioner på denna dag brukar jag börja med att presentera Banach-Tarskyparadoxen från 1924. I korthet innebär den att ett klot kan delas i två lika stora delar som vart och ett har samma volym som det ursprungliga klotet. Jo, du läste rätt – volymen har dubblerats. Om några elever påminner om att det är första april, så är det bara att glatt säga ”Tror ni mig inte?” och sedan fortsätta med en vanlig lektion, som om inget hade hänt. Nästa lektion kan du påminna om att det faktiskt inte var ett aprilskämt. Det finns föreläsningar nästan begripliga för intresserade gymnasister på youtube om Banach-Tarskyparadoxen och som kan passa som frivillig läxa. Paradoxen bygger på argument som liknar en enkel variant av Cantors bevis för att heltal och bråktal har samma kardinalitet, dvs till antalet lika stora oändligheter. Vi förenklar detta argument ytterligare ett steg på följande vis, så att det är begripligt i grundskolan. Gör en lista med naturliga tal och parallellt med den, listor med jämna respektive udda naturliga tal.

Naturliga tal	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	…
Jämna naturliga tal	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	…
Udda naturliga tal	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	…

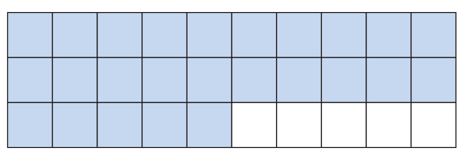
Vi kan nu tycka att antalet jämna tal borde vara hälften av antalet hela tal. Cantors argument var att

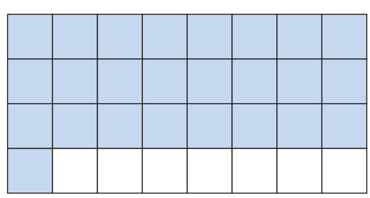
1 det finns oändligt många jämna tal
2 vi kan därför bilda en serie par av naturliga och jämna tal (1; 2), (2; 4), (3; 6) etc så att varje naturligt tal och varje jämnt naturligt tal kommer med och inga tal blir över.

Detta tog Cantor som bevis för att de oändligt många jämna naturliga talen är lika många som de oändligt många naturliga talen. På samma sätt finns det lika många udda naturliga tal som naturliga tal. Vi har alltså börjat med de naturliga talen och delat upp dem i två högar med var och en lika många tal som de naturliga talen. Ett annat sätt att representera det märkliga i detta resonemang är att använda lite algebra. Beteckna kardinaliteten av de naturliga talen med bokstaven A (standardbeteckning är egentligen den första hebreiska bokstaven Alef indexerat med noll). Det vi har gjort är att dela upp de naturliga talen i två högar, som var och en har kardinaliteten A. Det ser alltså ut som att vi har fått ekvationen $A = A + A$, och den stämmer faktiskt för A = kardinaliteten av de naturliga talen (och även för talet noll). Men du får aldrig göra misstaget att dividera med oändligheten eller noll, för då får du att $1 = 1 + 1$, och entydigheten försvinner eftersom även $2 = 1 + 1$.

Juldag på skämt

Som avslutning på säsongsmatematiken kan vi ta lite talteori kryddat med matematikhumor. Det var en gång en datalog som tog fel på alla helgons dag och juldagen. Varför då? Jo, datalogen förväxlade 25 dec med 31 okt. Om man arbetar med plockmaterial, t ex tvåfärgade kort, så är det lätt att byta mellan olika baser och ur figuren se att $25_{10} = 31_8$.





Att representera ett tal i basen 10 betyder ju bara att vi delar upp det i högar med 10 och vid behov potenser av 10. På samma sätt kan vi representera tal i basen B genom att dela upp materialet i högar av B och vid behov potenser av B där B = 2 för binära, B = 8 för oktala tal, men det går bra med vilket tal som helst, t o m negativa tal. För att skriva exempelvis talet 123_{10} i basen $B = (-8)$ gör du precis som vanligt. Ansätt följande ekvation:

$$123 = a \cdot (-8)^2 + b \cdot (-8)^1 + c \cdot (-8)^0 = 64a - 8b + c.$$

För positiva tal är siffrorna heltal från noll till högst basen minus ett. Här får vi dock välja siffrorna *a*, *b* och *c* bland talen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7 (dvs. basens absolutvärde minus ett). Ekvationen ger oss att $123_{10}=213_{(-8)}$. Sök gärna upp och läs mer på webben om denna matematik och deras upphovspersoner.