



# Reflekterande och matematiserande barn

## – en utmaning

Vilka didaktiska strategier fungerar för att stärka elevernas matematiska förmågor? När målet med undervisningen förändras från att lära ut matematiska procedurer och faktakunskaper till att utveckla förmågan att kommunicera och argumentera matematiskt ställs läraren inför nya utmaningar. I den här artikeln ska vi beskriva några didaktiska strategier som provas ut i ett projekt i Göteborg.



Inspirerade av centret *Mathematics in the city* i New York och den forskning professor Catherine Fosnot bedrivit, som bland annat resulterat i materialet *Contexts for learning mathematics*, har en grupp lärare och forskare från Göteborgs universitet startat projektet ROMB: *Reflekterande och matematiserande barn*. Det som utforskas inom ROMB är ett förhållningssätt till matematikundervisning som bygger på att eleverna arbetar så som matematiker gör: de utforskar – reflekterar – kommunicerar. I samarbete med lärare på en grundskola i Göteborg testar vi hur det amerikanska materialet och undervisningssättet fungerar i ett svenskt klassrum. Undervisningen utgår i hög grad från elevernas tankar och skiljer sig från det mer klassiska lektionsupplägget där läraren börjar med en genomgång av ny kunskap som följs av eget arbete där den nya kunskapen ska tillämpas.

En av delarna i denna undervisning är så kallade minilektioner: en kortare lektion eller del av lektion där ett mycket specifikt matematiskt innehåll står i fokus i ett lärardrivet samtal i helklass. Vi ska titta på en sådan minilektion som handlar om förståelse av positionssystemet och varför addition med nio motsvarar en ökning med ett tiotal följt av en minskning med ett ental. Dialogen är fiktiv men baserad på en lektion vi besökt i New York och aktiviteter testade i Göteborg. Efter dialogen diskuteras några av de strategier läraren använder för att fostra "matematiker".

ROMB-projektet har tidigare tagits upp i *Nämnares* nummer 2015:4 och 2016:2

## Samtal i helklass

Läraren samlar eleverna i årskurs 3 i en ring på golvet så att alla ser varandra. På tavlan skriver läraren 8 och säger att de idag ska göra en "räknerunda" på addition med 9.

L: *Tänk efter vilket som är nästa tal om vi utgår från 8 och adderar 9. Tummen upp när du tänkt färdigt.*

När flertalet barn visar tummen upp framför bröstet fortsätter läraren:

L: *Vänd dig till din mattekompis och berätta vilket tal det är och hur du gjorde för att komma fram det.*

Eleverna vänder sig mot varandra parvis och pratar intensivt i en halv minut tills läraren avbryter genom att signalera tystnad med handen i vädret.

L: *Erik vilket är nästa tal efter 8 om vi adderar 9?*

Erik: *17 och sen 26.*

L: *Har vi fler förslag? ... Är alla överens? ... Hur kan vi vara så säkra på att det är 17?*

Eleverna räcker upp handen.

Mica: *Jag räknade. 9 10 11 12 13 14 15 16 17 – 9 fingrar*

L: *Du räknade med hjälp av fingrarna, det är en säker strategi. Är det någon som har ett förslag på en annan strategi?*

Peter: *Vi tänkte så här, plus 10 och sen minus 1.*

L: *Ni adderar 10 och subtraherar 1. Vad säger ni andra om den strategin? Stämmer det? Hur kan vi vara säkra på det? Kommer det alltid att fungera?*

Malin: *Ja, för om man plussar 9 och sen en till så blir det 10, så om man istället plussar 10 och tar bort en blir det som att plussa 9.*

L: *Håller ni andra med Malin om det? Är det någon som har en fundering kring den här strategin?*

Eleverna skakar på huvudena.

L: *Okej, Peter och Elin, det verkar som om alla är med på att er strategi fungerar, är det en strategi som ni rekommenderar? Varför är det en effektiv strategi?*

Peter: *Det är mycket snabbare än att räkna 1 2 3 4 5 6 7 8 9 varje gång. Det är bara typ 8 plus 10 är 18, och så minus 1 är 17. Plus 10 är ju enkelt.*

Lärare skriver nu upp strategin på blädderblocket:  
+ 10 – 1. Addera 10 & subtrahera 1.

L: *Okej, nu sätter vi igång. Vi går varvet runt och adderar 9. Max, vilket är nästa tal efter 17?*

Eleverna säger talen i tur och ordning, det går snabbt och smidigt. Läraren skriver alla tal i en kolumn på tavlan. När de gått varvet runt ser tavlan ut som på bilden.

L: *Titta nu på den talföljd vi fått här. Vad kan vi se? Kan vi se något mönster? Titta efter vad som ändras och vad som är samma. Vänd dig till din mattekompis och berätta vad du lägger märke till i talföljden.*

8	98
17	107
26	116
35	125
44	134
53	143
62	152
71	161
80	170
89	179

Eleverna pratar med varandra om talföljden och läraren går runt för att snappa upp vilka iakttagelser de gör. Kim och Anna tappar concentrationen och ålar runt på golvet så läraren ingriper och ber dem berätta för henne vad de sett. Efter ca två minuter signalerar läraren tystnad genom att höja handen i luften. Eleverna tystnar och tittar framåt igen. Läraren pekar på entalen.

L: Jag hörde Kim och Anna berätta här om att de sett något intressant med de här talen, vad var det, kan du berätta för de andra Anna?

Anna: De talen går hela tiden bakåt. Entalen.

L: Entalen går hela tiden bakåt, vad menar hon med det? Peter, kan du se vad hon menar?

Peter: Ja alltså dom går 8 7 6 5 4 3 2 1 0. Fast sen gör dom inte det utan börjar om igen på 9 8 7.

L: Här har vi två iakttagelser: entalet ser ut att minska med 1 varje gång men vid 0 börjar det om på 9.

[Läraren skriver -1 mellan de första talen i följd.]

Är det någon som lagt märke till någonting annat?

Lisa: Den andra siffran går uppåt.

L: Den andra siffran, vilken siffra menar du då?

Lisa: Tioalet, det ökar med 1 hela tiden ända till 8 men 8 kommer två gånger och det gör 17 också i andra spalten

L: Vi ser alltså att tiotalen ökar varje gång, ökar de också med 1? [Eleverna nickar.] Och när vi ökar med 1 tiotal hur mycket ökar talets värde då? Är det någon skillnad mellan när ett ental ökar med 1 och när ett tiotal ökar med 1?

Malin: Entalet blir liksom ett större men när tioalet ökar med 1 blir det liksom tio större. 1 tiotal är ju som 10.

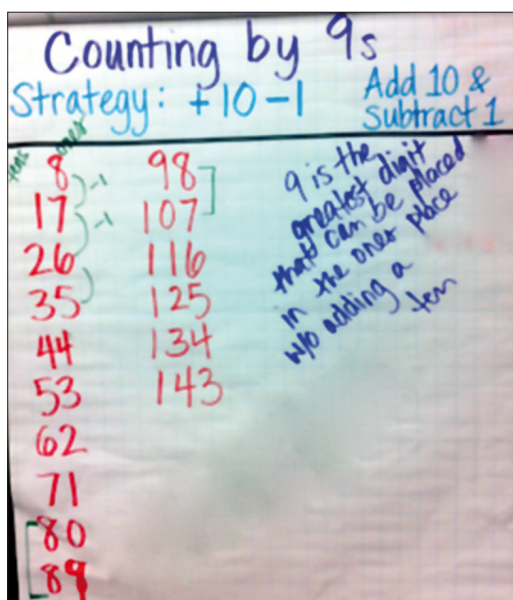
L: Det Malin säger är alltså att när tioalet ökar med 1 så är det samma sak som att talet ökar med 10 i värde. Okej, vi repeterar era iakttagelser: Anna så att entalen minskar med 1 och Lisa att tiotalen ökar med 1. Varför är det så?

Lisa: Jag vet! Det är för det är det vi gör, vi plussar på 10 och tar bort 1.

L: Men sen händer någonting här runt 80, 8 tiotal, och vid 170, 17 tiotal, vad är det som händer här?

Diskussionen fortsätter ännu en liten stund tills klassen formulerat några slutsatser kring varför följderna ser ut som den gör runt 80 och 170. Som avslutning ber läraren eleverna tänka vidare på hur följderna kommer att fortsätta efter 179: När kommer nästa två tal med samma antal tiotal att dyka upp? Den frågan besvaras inte utan sparas till ett senare tillfälle så att alla ska ha chans att tänka efter.

Bild på räknerundan från klassrummet i New York, med ett av de argument som kom fram under diskussionen kring vad som händer vid 80 och 89: 9 är den högsta siffran som kan skrivas på entalens plats när man adderar 10.



## Matematisk idé

Vi ska nu titta lite närmare på de didaktiska strategier som utmärker den här minilektionen. Den matematiska idén är bärande i hela aktiviteten, från valet av starttal och additionstal, till vad som skrivs upp på tavlan och diskuteras. Läraren vet precis vart hon vill komma men designar uppgiften och sina frågor så att det är eleverna som gemensamt konstruerar kunskapen. Kunskapen finns i aktiviteten att matematisera, dvs att systematisera, symbolisera, reflektera och resonera. Det som eleverna ska få syn på är att talet 9 är utbytbart mot uttrycket  $(+10 - 1)$  och att addition med 9 ger ett visst mönster på grund av att vi räknar i basen 10. Läraren väljer att inte börja räkningen på 0 eller 9 för att inte begränsa den här iakttagelsen till nians gångertabell eftersom mönstret är mer generellt. Tid läggs i början på att utveckla strategierna så att räkningsproceduren går snabbt. Det är inte proceduren att addera 9 som står i fokus utan de resonemang som kan föras kring denna procedur. Minilektionen är utformad för att stärka elevens förmåga att resonera och kommunicera men förlorar aldrig fokus på det matematiska innehållet.

## Frågor för reflektion

Undervisning inom ROMB bygger på idén om *guidat återuppfinnande* som kommer från den holländska forskningen i matematikdidaktik *Realistic mathematics education*, RME. Med guidat återuppfinnande menas att läraren vägleder eleverna i matematiserandet av omvärlden. Eleverna ska själva känna att de upptäcker och uppfinnar matematiken, utan att lämnas att uppfinna en helt egen matematik. De ska vägledas från den informella till den alltmer formella och kulturellt överenskomna matematiken. Förutom att detta görs genom ett väl uttänkt val av uppgifter och kontexter använder läraren en viss sorts frågor för att styra samtalet. I samtalet ovan kan vi notera att läraren ställer några få frågor med givet svar (Vilket är nästa tal?) men ett stort antal frågor som ligger på en högre kognitiv nivå. Här är en sammanställning av de frågetyper läraren använder:

### *Frågor efter elevernas strategier:*

Är det någon som har ett förslag på en annan strategi?

### *Frågor efter elevernas iakttagelser:*

Vad kan vi se? Kan vi se något mönster?

Är det någon skillnad mellan ...?

Vad är det som händer här?

### *Frågor efter elevernas argument:*

Hur kan vi vara så säkra på ...?

Kommer det alltid att fungera?

Varför är det så?

### *Frågor efter att förstå och kunna värdera strategier:*

Är det någon som har en fundering kring den här strategin?

Varför är det en effektiv strategi?

Vad menar hon med det?

Frågan "Hur tänkte du?" är alldeles för vag och svår att svara på. Eleven vet inte hur hon tänker eftersom tankarna ofta är snabba och intuitiva. Däremot kan eleven ha frågor, förslag, funderingar, argument och motargument, och eleven kan göra antaganden, dra slutsatser och värdera påståenden. Därför är det sådant läraren frågar efter. Det är frågorna som vägleder eleverna in i reflektionen.

## Värdesätta alla elevers insatser

En medveten strategi från lärarens sida är att lyfta in alla elever i samtalet och få alla att känna att de bidrar till den gemensamma kunskapsproduktionen. Varje gång en ny tanke kommer fram tillskrivs den en viss elev, elevens namn kopplas till iakttagelsen, strategin eller argumentet. Notera också att läraren inte någon gång under samtalet värderar svar som rätt eller fel eller ger beröm för rätt svar. När hon vill berömma gör hon det genom att lyfta fram vilket värde bidraget har, såsom en *säker strategi* eller en *intressant iakttagelse*. Målet är att eleverna ska känna att de har auktoritet över sin egen kunskap, de ska veta när deras resonemang håller och när deras svar blir rätt utan att behöva fråga läraren eller titta i facit. Läraren bollar till eleverna att ge varandra bekräftelse genom konsensus: "Är alla överens?" eller genom argument: "Varför är det en effektiv strategi?". När några elever tappar koncentrationen blir de inte tillsagda att skärpa sig utan får istället lärarens uppmärksamhet och hjälp att fokusera matematiken och det blir deras bidrag som inleder nästa fas av samtalet: "Jag hörde Kim och Anna berätta här om att de sett något intressant med de här talen, vad var det, kan du berätta för de andra Anna?"

## Revoicing – att ge ny röst

Istället för att värdera elevernas svar med ord som rätt eller bra så upprepar läraren det eleven säger med andra ord. Hon ger elevens tanke nya ord och gör det gärna med ett mer korrekt matematiskt språk. Denna strategi kallas *revoicing*, vilket innebär att ge ny röst. På så vis får eleven kredd för tanken samtidigt som den formuleras på två sätt. Till exempel när Peter säger "plus 10 och sen minus 1" svarar läraren med att återge "Ni adderar 10 och subtraherar 1". Ibland låter läraren en annan elev ge nya ord till en tanke: "Entalen går hela tiden bakåt, vad menar hon med det?". När det är dags att gå vidare sammanfattar läraren de matematiska iakttagelserna och argumenten på ett klart och tydligt sätt både muntligt och skriftligt så att den individuella kunskapen blir gemensam och närmar sig den formella matematikens uttrycksform.

## Rutiner

Läraren har skapat noga genomtänkta rutiner som innebär att eleverna vet vad som förväntas av dem. Om de gör samma saker varje gång kan de ägna all sin energi åt att tänka på matematiken. Rutinerna skapar trygghet och möjliggör kommunikation kring innehållet. I rutinerna ingår att eleverna *sitter i ring* så att alla kan se den som talar. Detta är viktigt för att inkludera alla i samtalet, annars blir det lätt en dialog mellan läraren och en elev åt gången snarare än mellan läraren och alla i gruppen. Ringen ökar också incitamentet att *lyssna på varandra* eftersom alla kan se den som talar och ingen behöver tala in i ryggen

på någon annan. Istället för att visa att man tänkt färdigt genom att vifta med handen har läraren infört det mer diskreta *tummen upp*-tecknet framför bröstet. En sådan gest stressar inte kamraterna som ännu inte tänkt färdigt lika mycket som ett ivrigt viftande kan göra. Det kan ta tid att skapa sådana här rutiner, men de svenska lärare som jobbat med dessa rutiner har varit förvånade över hur fort det går att få elever att anamma rutiner om man är konsekvent och gör dem till just – rutiner.

En ny rutin för lärarens del är att lära sig att *invänta eleverna*. Forskning visar att om läraren ökar sin väntetid till minst tre sekunder efter att ha ställt en fråga (från det normala genomsnittet på en sekund) så ger det mätbara skillnader i kvalitén på elevernas svar. Läraren i det här exemplet väntar in svar, men utnyttjar också *parsamtalet* för att ge eleverna mer tid att formulera sina tankar. Svåra frågor får först diskuteras i par eftersom det är lättare för eleven att berätta om sina tankar inför hela klassen om hon först har fått formulera tanken inför mattekompisen. Läraren ställer också samma sorts frågor varje lektion så att den sortens frågor blir väl invanda och eleverna förstår vad för slags svar som förväntas. När läraren medvetet arbetar med rutiner skapas nya normer i klassrummet, både sociala normer kring kommunikation och respekt för varandra men också sociomatematiska normer kring vad som räknas som ett värdefullt bidrag i ett matematiskt samtal eller ett bra matematiskt argument.

## Ändrad undervisning – en utmaning

Att ha en god taluppfattning är grunden för att kunna utvecklas matematiskt. Att kunna betrakta 89 som 8 tiotal och 9 ental och 179 som 17 tiotal och 9 ental ingår i en god förståelse för positionssystemet och tals uppbyggnad. Att söka efter mönster och se skillnader och likheter mellan tal är att betrakta tal på ett djupare plan. När eleverna utvecklar sin förmåga att uttrycka ett matematiskt innehåll på olika sätt, som exempelvis att beskriva sambandet mellan att addera 9 och att addera 10 och subtrahera 1, utvecklar de samtidigt förmågan att välja effektivare vägar att finna lösningen på ett problem. Det förhållnings-sätt vi ser i exemplet ovan med medvetet matematiskt fokus på att lyfta fram en strategi och att ge eleverna möjlighet att resonera kring den kan hjälpa eleverna att analysera andra typer av uppgifter och använda sina kunskaper i nya sammanhang. En räknerunda är ett exempel på en aktivitet som ingår i konceptet *Contexts for learning mathematics*, där fokus ligger på att skapa reflekterande och matematiserande barn. Läraren har stor betydelse för vad som utvecklas i klassrummet bl a genom ett medvetet val av uppgifter som fokuserar ett specifikt matematiskt innehåll.

De lärarkompetenser vi har försökt belysa i den här artikeln är att vara medveten om vilka frågor som ger möjlighet till reflektion och att skapa rutiner för både eleverna och sig själv som ger trygghet i den matematiska aktiviteten. Ja, visst är det en utmaning att ändra på sin undervisning, men de som provat märker en positiv skillnad!

### LITTERATUR

- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work-constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.
- Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C. & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare – Didaktik*, (kapitel 10: Hans Freudenthal och Realistisk matematikundervisning). Malmö: Gleerups.
- Schumway, J. F. (2011). *Number Sense Routines. Building numerical literacy everyday in grades K–3*. Portland: Stenhouse Publishers.