Lärartankar

Om negativa tal

Den lärare som undervisar i matematik i årskurserna 7–9, och jag gissar att det i viss utsträckning även gäller för gymnasiet, är väl medveten om att när det kommer till undervisning om negativa tal så är det bra att ha en del ”knep” att dela med eleverna för att hjälpa dem hålla reda på vad som gäller vid ”minus plus minus”, ”minus gånger minus”, osv. Ja, ni vet. Vid addition och subtraktion visar läromedlen gärna något i den här stilen:

$$3+(-5)=3-5=(-2)$$

och förstärker med någon färg att plusminus har förvandlats till ett minus. På raden under står det då

$$3-(-5)=3+5=8$$

där eleven kan läsa att minusminus har förvandlats till plus. Vid multiplikation ser det ungefär likadant ut.

$$3\cdot(-5)=(-15)$$

$$(-3)\cdot(-5)=15$$

I förklaringen framgår någonting i stil med

Olika tecken ger negativt svar.
Lika tecken ger positivt svar.

eller i värsta fall

Plus gånger minus ger minus.
Minus gånger minus ger plus.

För egen del har jag och mina elever haft mycket nytta av en för många lärare bekant metod som jag kallar *Samurajmatte*. Samurajmatte går till som så att man håller underarmarna vågrätt framför sig i brösthöjd, de ska då föreställa två ”minus-tecken”. Sedan utstöter man ett lågt långdraget samuraj-ljud *aoooååuuuuu* och avslutar med ett snabbt och högt *HU!!* då man samtidigt sätter den ena underarmen i lodrät position över den andra så armarna nu bildar ett ”plus-tecken”.

Alltså två minustecken bredvid varandra blir plus. Eleven minns ofta detta mycket väl och gör sedan sällan fel då den räknar subtraktion med negativa tal.

Då det gäller multiplikation och division har jag skrivit denna, för många säkert välbekanta, matris på tavlan och tvingat eleverna att skriva av den i sitt räknehäfte.

	plus	minus
plus	plus (+)	minus (–)
minus	minus (–)	plus (+)

Efteråt har jag upprepat mantrat från läromedlet *minus gånger minus* och så vidare.

Oftast har dessa två knep fungerat väldigt bra. Såväl Samuraj-matte som plus-och-minus-matrisen fyller sina syften i hög utsträckning och eleverna kan med hjälp av dessa verktyg (om man nu kan kalla dem det) lösa läromedlets kluriga problem och det kommande provets uppgifter.

Och så frågar någon varför

Allt skulle vara så bra om det inte med jämna mellanrum dyker upp någon elev som frågar *Varför?* Varför förvandlas två subtraktionstecken till ett additionstecken? Jag har haft elever som verkligen trott att de två strecken (tecknen för subtraktion) tillsammans bildar ett additionstecken. Det är smarta elever – de har verkligen studerat sin lärare då denne så tydligt lagt armarna i kors.

Men, det finns någonting djupt otillfredsställande med dessa knep och knåp som vi lärare tar till. Vi vill ju att eleverna ska lyckas klara sina matteprov, särskilt det nationella. Fast man kan verkligen fråga sig om jag inte gör dem en björntjänst med mina knep. Det är knappast matematisk kunskap jag förmedlar.

Detta handlar om förståelse för grundläggande begrepp. Vad gör man egentligen då man subtraherar? Frågar vi en elev på högstadiet om vad begreppet minus innebär och hur man räknar med minus så får vi i allt för många fall svaret att man ”tar bort”, det är inte ofta man får höra att det är skillnad man beräknar. Frågar man vad subtraktion innebär får man kanske inget svar alls. Detta är märkligt eftersom det i många klassrum och läromedel på lågstadiet görs tydligt att

term – term = differens (skillnad).

Någonstans på vägen genom grundskolans matematikundervisning tynar ”skillnad” bort till blott en skugga och ”ta bort” står kvar som enda tillåtna tolkning. Problemet är bara att subtraktion kan tolkas på mer än ett sätt.

Samma ord för två helt olika saker

När vi introducerar negativa tal för elever samtidigt som de inte fullt ut förstår begreppet subtraktion, och dessutom använder samma ord för att benämna räknesättet och det negativa talet, är det upplagt för missförstånd. Antag att det inför dagens genomgång på tavlan står

$5 - (-2) = ?$

Jag är ganska säker på att läraren i många klassrum säger *fem minus minus två*. Så lät det i alla fall i mitt eget klassrum tills för några år sedan. Ibland kan det bli återfall, sånt händer, men jag försöker bättra mig. Om samma uppgift istället skrivs på tavlan utanför Sveriges gränser, skulle en engelsktalande lärare troligtvis säga någonting i stil med: *five minus negative two* och en norsk lärare skulle ha sagt *fem minus negativ to.*

Varför bestämmer vi inte bara här och nu att vi fortsättningsvis aldrig mer säger ”minus 2” utan i stället använder det mer korrekta ”negativ 2”, då är vi schyssta mot våra elever.

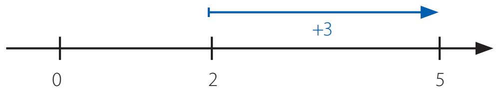
Subtraktion med negativa tal

För att vara mer tillmötesgående mot ”de varför-frågande eleverna” brukar jag nu för tiden lägga lektionstid på att skapa förståelse kring subtraktion även om de faktiskt går på högstadiet. Ett exempel:

$5 - 2 = 3$

Denna uppgift kan så klart ses som vad som blir kvar då vi tar bort 2 från 5. Observera att då vi förklarar det på detta vis vänder vi ordningen på siffrorna, ”5 - 2” tolkas som ”2 från 5”.

Samma uträkning kan tolkas som skillnaden mellan 2 och 5. Befinner man sig på 2 på tallinjen och ska till 5 behöver man tre positiva tal, eller gå tre steg i positiv riktning på tallinjen.



Sedan vänder jag på problemet.

$2 - 5 = (-3)$

Vi kan fortfarande tänka ”ta bort 5 från 2” och vi får en slags skuld, (-3). Men vi kan också tänka oss tallinjen där vi står på 5 och ska till 2, då behöver vi tre negativa tal (-3), eller gå tre steg i negativ riktning på tallinjen. Skillnaden är (-3). När vi nu går vidare med

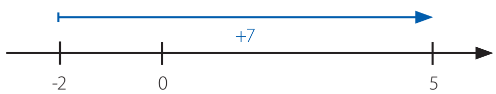
$5 - (-2) = 7$

så fungerar inte ”ta bort-tänket” längre, det blir liksom inte intuitivt, och det beror så klart på att det är svårt att konkret visualisera ett negativt tal. Termometrar kan förvisso vara ett sätt, vi kan känna med vår hud att -5 grader Celsius är varmare än -25 grader Celsius.

Men hur ska man konkret visa för en elev att det ligger (-2) pennor på bänken? Och lyckas man med det konststycket, hur visar man då hur det ser ut om där istället ligger (-3) pennor? 0 pennor på bänken fungerar fint eftersom noll är ett naturligt tal. De negativa talen räknas inte till de naturliga talen utan är en del av de hela talen där också de naturliga talen ingår. Detta behöver vi prata om i klassrummet. För att förstå

$5 - (-2) = 7$

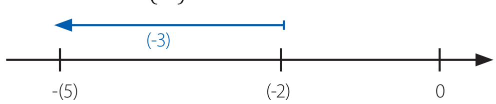
kan vi tänka att vi står på (-2) på tallinjen och ska till 5. Då behöver vi sju positiva tal, eller gå sju steg i positiv riktning på tallinjen. Skillnaden är 7.



På liknande sätt kan vi förklara

$(-5) - (-2) = (-3).$

Att ta bort ett negativt tal är inte intuitivt utan vi måste använda tallinjen. Om du står på (-2) och ska till (-5) behöver du tre negativa tal, eller gå tre steg i negativ riktning på tallinjen. Skillnaden är (-3).



Om vi håller kvar vid samma tankesätt blir det uppenbart att

$$(-5)-(-5)=0.$$

Skillnaden mellan ett tal och sig självt är så klart noll, något som blir uppenbart på tallinjen.

Kommutativa lagen

När frågan *varför ger minus gånger minus plus* kommer har jag stora problem med att hitta något sätt att visualisera detta för mina elever. Har hört många förklaringar om skulder som tas bort och vattendunkar som töms, men jag har aldrig lyckats få ihop det i mitt huvud, alltså – jag har inget bra sätt att visa detta på. Återigen så bottnar det antagligen i problemet med att konkret påvisa ett negativt tal. Har man dessutom introducerat eleverna för multiplikation som upprepad addition så får vi snabbt problem, men i början är det enkelt

$$2\cdot(-3)=(-3)+(-3)=(-6).$$

Multiplikation kan ju ses upprepad addition och om Muhammed lånar 3 kronor av Lisa två dagar i rad så är han skyldig henne 6 kronor, lätt att förstå. Vänder vi på det hela och skriver

$$(-3)\cdot 2=(-6)$$

blir det svårare att förklara. Man skulle kunna dra en lögn och säga att man tar talet 2 minus 3 gånger: -2, - 2, - 2 och drar en vals om upprepad subtraktion, men då ljuger vi som sagt. Eller …?

För att slippa ljuga är det nog bäst att ta till den kommutativa lagen, $x\cdot y=y\cdot x$. Den känner eleverna till och det är inget konstigt med den. Alltså, i vårt fall

$$2\cdot(-3)=(-3)\cdot 2.$$

Men den kommutativa lagen är inte mycket till hjälp för att sedan förklara varför

$$(-3)\cdot(-2)=6.$$

Här verkar det som jag i alla fall måste ta fram mina knep i form av matriser eller annat som *minus gånger minus ger plus* … Eller kan jag slippa detta monotona och högst tvivelaktiga mantra?

Distributiva lagen

Det bästa sättet att förklara detta enligt mig, och den kunskap jag har idag, är att använda sig av den distributiva lagen:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Denna lag praktiserar eleverna en hel del i algebraavsnitten i högstadiets läromedel och de är därför rätt så bekanta med denna typ av beräkningar.

Jag skulle också vilja påstå att alla elever kan nollans tabell. Det finns inte så mycket att säga om den, tar man någonting noll gånger så har man ingenting.

$$2\cdot 0=0$$

Den distributiva lagen ger då

$2\cdot(3-3)=0$ eftersom $3-3$ som bekant är 0

$2\cdot 3=6$ (så klart)

och för att allt ska bli noll måste

$$2\cdot(-3)=(-6)$$

$$2\cdot(3-3)=2\cdot 3+2\cdot(-3)=6+(-6)=6-6$$

$$6-6=0$$

Nu var det ju egentligen inget problem att visa att

$$2\cdot(-3)=(-6),$$

det gick ju bra med att tänka som adderade skulder och sedan använda den kommutativa lagen för det omvända exemplet. Problemet var

$$(-2)\cdot(-3)=6$$

men använder vi samma taktik igen går det bättre.

$$(-2)\cdot 0=0$$

och då måste

$$-2\cdot(3-3)=0$$

$(-2)\cdot 3=(-6)$ (vet vi nu)

och då måste i sin tur

$$(-2)\cdot(-3)=6$$

annars får vi inte produkten 0.

$$-2\cdot(3-3)=(-2)\cdot 3+(-2)\cdot(-3)=(-6)+6$$

$$(-6)+6=0$$

Här visas då att $(-2)\cdot(-3)=6$

men även att

$$(-2)\cdot 3=(-6).$$

Vi behöver alltså inte använda den kommutativa lagen för detta fall.

På webben har Khan Academy en video som förklarar detta på ett bra sätt: www.khanacademy.org/math/pre-algebra/negatives-absolute-value-pre-alg/mult-div-negatives-pre-alg/v/why-a-negative-times-a-negative-is-a-positive.

Division med negativa tal

Då det kommer till division med negativa tal har jag alltid kommit undan med min plus-och-minus-matris för jag passar så klart på att informera eleverna om att matrisen fungerar på samma sätt för division som för multiplikation. Så när de kommer till uppgifterna med division med negativa tal så ber jag dem slå upp sidan i räknehäftet där de skrev ner matrisen.

I de fall jag nu tvingas till en förklaring av detta (har inte hänt ofta) så använder jag mig av sambandet mellan multiplikation och division. Vi vet vid det här laget att

$$3 \cdot (-2) = (-6).$$

Då måste

$$(-2) = (-6)/3 \text{ och } 3 = (-6)/(-2).$$

Vi vet också att

$$(-3) \cdot (-2) = 6$$

och då måste också

$$(-3) = 6/(-2).$$

Om någon läsare har något annat sätt så får denne hemskt gärna höra av sig till mig, jag är uppriktigt nyfiken.

Väl använd tid?

Man kan ju fråga sig om det är värt att gå igenom allt detta med eleverna. Har man verktyg som matriser och Samuraj-matte så fixar eleverna allt som berör negativa tal i åk 7–9. De flesta elever vill ju ändå bara få en metod så de klarar provet.

Jag tror så klart att det är värt besväret, annars skulle jag inte ha skrivit detta. Vi har länge hört om nedslående PISA-resultat och kanske ligger en del av förklaringen i att vi ofta låter förståelsen för matematik hamna i andra rummet då vi undervisar i ämnet. I ett läromedel som jag bläddrade i för ett tag sedan förklarades hur man omvandlade *km/h* till *m/s*.

Den förklaring som gavs var ”dela med 3,6”. Nu var det ett läromedel med några år på nacken, men ändå från den här sidan av millennieskiftet. En elev med god förmåga att minnas saker utantill har så klart mycket glädje av ett sådant enkelt verktyg, men inte är det mycket till förklaring.

Vad säger forskningen?

I skollagen står att *Utbildningen ska vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet.* Finns det då belägg för att satsa på förståelse i matematikundervisningen? Har någon forskare tänkt kring detta? Ja det finns det så klart, här är några som jag själv tycker gör det bra.

Martin Ingvar och Gunilla Eldh ger stöd i sin bok *Hjärnkoll på skolan*. Bo Johansson har skrivit en hel del kring begreppet subtraktion i sin bok *Varför är subtraktion så svårt?* och Lisen Häggblom förespråkar i *Med matematiska förmågor som kompass* tydligt förståelsen framför färdiga metoder för att utveckla de matematiska förmågorna.

Men så var det här med ”beprövad erfarenhet” – och den förespråkar Samuraj-matte. Eller …?

Björn Enare