

Konsten att simulera sannolikheter

Hur sannolikt är det att två straffkast i basketboll går i? Författaren delar här med sig av erfarenheter från laborationer om sannolikheter som hon använt i sin undervisning i Kalifornien men även i den svenska lärarutbildningen. Fokus ligger på introduktion av sannolikhetsresonemang i grundskolan.

Sannolikhetslära har i Lgr11 fått en mer framträdande roll än i tidigare läroplaner. Ett effektivt sätt att introducera sannolikhet är att låta eleverna utföra simuleringar. I USA finns en serie häften, *Quantitative literacy series*, avsedda för grundskoleelever. Dessa häften innehåller problemlösningssuppgifter som löses genom att eleverna utför laborationer och skriver ner sina resultat. Ofta avslutas lektionerna med att läraren leder en diskussion utifrån de sammanställda resultaten. Nu finns det också möjlighet att simulera sannolikhet med datorer, men speciellt i grundskolan finns det ett värde i att arbeta mer konkret, utan datorer. Jag kommer här att beskriva fyra laborationer om sannolikhet med kommentarer till varje.

Jag brukar låta eleverna arbeta i par. En elev utför försöket, medan den andra skriver ner resultaten efterhand. Sedan kan eleverna byta roller vid lämpligt tillfälle. Detta arbetssätt sparar tid och leder naturligt till samtal om uppgiften. Laborationerna bör spridas ut över en längre tid och läggas in där de passar i matematikundervisningen. De har en logisk progression och innan läraren introducerar en ny laboration bör klassen repetera de lärdomar eleverna fått från tidigare simuleringar.

I de lägre årskurserna kan tyngdpunkten läggas på simuleringar och diskussioner av begreppet sannolikhet. Utgångspunkten bör då vara definitionen av experimentell sannolikhet dvs

$$\frac{\text{antalet försök med gynnsamma utfall}}{\text{totala antalet försök}}$$

Resultatet från en sådan simulering kallas *relativ frekvens*.

Mot slutet av grundskolan kan resultaten från simuleringar jämföras med teoretiska beräkningar från mer sofistikerade beräkningsmetoder, exempelvis träd-diagram och Venndiagram. Om du vill bättra på dina egna sannolikhetskunskaper rekommenderar jag *Sannolikhetslära och statistik för lärare* (Britton & Garmo, 2002).

Lgr 11 föreskriver att elever i åk 1–3 ska få erfarenhet av slumpmässiga händelser i praktiska och konkreta situationer, som i exempelvis spel och experiment. I åk 4–6 ska eleverna få möta begreppen sannolikhet, chans och risk genom observationer, experiment eller statistiskt material från vardagliga situationer. De ska också få göra jämförelser av sannolikheter vid olika slumpmässiga försök. För åk 7–9 är innehållet formulerat som likformig sannolikhet och metoder för att beräkna sannolikheten i vardagliga situationer. Progressionen går från att eleverna i de lägre årskurserna får möjlighet att resonera om sannolikhet med utgångspunkt i enkla försök, experiment och observationer till att eleverna i de senare årskurserna möter olika metoder att förutsäga händelser.

Singla slant

Fritt efter Newman C. M., Obremski, T. E. & Scheaffer, R. L. (1987). *Exploring probability*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Material: Två mynt till varje elevpar.

1. Varje elevpar ska singla en slant tio gånger och notera utfallen i tabellen.

	Antal med streck	Antal med siffror	Relativ frekvens
Krona			
Klave			
Summa			

2. Samla resultaten från hela klassen i följande tabell.

	Antal	Relativ frekvens
Krona		
Klave		
Summa		

3. Jämför den relativa frekvensen för krona mellan hela klassen och några elevpar.
4. Varje elevpar ska nu singla två mynt tio gånger och notera utfallen.

	Antal med streck	Antal	Relativ frekvens
Två kronor			
Två klavar			
En av varje			
Summa			

5. Beräkna den relativa frekvensen för de tre utfallen. Samla hela klassens resultat och jämför med resultatet från uppgift 1.

Kommentar till laborationen Singla slant

Avsikten med denna laboration är trefaldig. För det första avses att belysa hur två mycket lika försök kan leda till resultat med två utfall (krona och klave) som är lika sannolika och tre utfall som inte är lika sannolika (två kronor, två klavar och en av varje). För det andra kan man genom att lista alla utfall jämföra resultatet från simuleringen med en teoretisk sannolikhet. För det tredje ger sammanförandet av resultaten från alla elevparen en illustration av Stora talens lag: Ett enskilt elevpars resultat kan vara långt från den teoretiska sannolikheten, medan klassresultatet vanligen är mycket närmare den teoretiska sannolikheten.



Två straffkast i basketboll

Fritt efter Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L. & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Material: Gör ett lyckohjul med hjälp av en penna och ett gem på ett vanligt A4-papper. Rita en cirkel och dela den i fyra lika stora kvartar, där en av kvartarna representerar ett misslyckat kast.



Uppgift

Tiden är ute i den viktiga basketmatchen och ställningen är oavgjord. Alldeles innan domaren blåste av matchen begick ett av lagen en foul på en spelare som lyckas i 75 % av sina straffkast. Spelaren får två straffkast efter en kort timeout. Vad är sannolikheten att hon lyckas med åtminstone ett av sina straffkast och att hennes lag på så sätt vinner matchen?

Simulera situationen med två straffkast genom att sätta fart på gemet runt pennan, vars spets placerats i cirkelns medelpunkt, och notera i vilken kvarts-cirkel gemet stannar. Snurra sammanlagt tio gånger. Skriv ner resultatet i en tioraders tabell. L = lyckat kast, M = misslyckat.

Första kastet (L, M) Andra kastet (L, M) vinst eller oavgjort

⋮	⋮	⋮

Resultatet kan diskuteras med eller utan att klassens data sammanförs.

- ♦ I hur många av de tio simulerade fallen vann det lag som gjorde straffkasterna på slutet av matchen?
- ♦ Vad blev den simulerade sannolikheten för vinst?

Kommentar till laborationen Två straffkast i basketboll

Avsikten med laborationen är bl.a. att ge en geometrisk representation av sannolikhet, vilken kan underlätta förståelsen av sannolikhetsbegreppet, speciellt för elever med visuell lärandestil. En diskussion av begreppet *komplement till en händelse* kommer naturligt upp eftersom det är lättare att beräkna sannolikheten av att laget inte vinner matchen efter straffkasterna. Eleverna inser att sannolikheten att missa ett av straffkasterna är $1/4$ eller 25%. Sedan är steget inte långt till att se sannolikheten av att inte vinna är $1/4$ av $1/4$, alltså $1/16$ eller 6,25%. Det följer då att sannolikheten av vinst blir $100\% - 6,25\%$ eller 93,75%, d.v.s. en sannolikhet av 0,9375. Här används ordet händelse i betydelsen av dess formella

definition som en delmängd av *utfallsrummet*. Utfallsrummet, i sin tur, är mängden av alla möjliga utfall.

I samband med laborationen kan man ta upp begreppen *säkra händelser* med sannolikhet 1 och *omöjliga händelser* med sannolikhet 0. En diskussion där eleverna placerar in händelser på en tallinje mellan 0 och 1 brukar bli livlig. En naturlig fråga som brukar komma upp under simuleringen är: Om första straffkastet går in och det är klart att laget vinner, genomförs ändå det andra straffkastet? Svaret på den frågan är "Ja".



Minibussen

Fritt efter Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L. & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Material: En slumpantalstabell 0–9.

Uppgift

Karin har en minibuss som hon kör från stadens torg till en närliggande flygplats varje vardagsmorgon. Bussen har nio passagerarplatser. Folk köper biljetter i förväg, men i genomsnitt kommer inte 10 % av de som köpt biljetter. Därför säljer Karin tio biljetter för varje dags resa. Vissa dagar kommer tio personer. Uppskatta sannolikheten för det på en given dag.

Simulering

1. Använd en tabell med slumpmässigt ordnade tal i simuleringen. En sådan tabell har lika många nollor, ettor, tvåor, treor, fyror, femmor, sexor, sjuor, åttor och nior. Siffrorna är inte ordnade i något speciellt mönster.
2. Blunda och peka med en penna någonstans i tabellen. Märk sedan tio siffror i rad med början på den siffra som du pekade på när du blundade. Notera i tabellen nedan hur många av dina tio siffror som *inte* var nollor.

Dag	Antal personer	För många? (ja/nej)
⋮	⋮	⋮

3. Eftersom 10 % av de som köpt biljetter inte kommer låter vi siffran 0 beteckna en person som köpt biljett men inte kommer, medan siffrorna 1–9 betecknar de personer som kommer. Därför betecknar antalet siffror du noterade i förra steget hur många personer som kommer.
4. Fortsätt och läs av grupper med tio siffror och notera hur många personer som kommer dag 2, dag 3 etc.

5. Efter att alla deltagare fyllt i sina tabeller ska resultaten redovisas i helklass. Uppskatta sannolikheten att det kommer fler än nio personer genom att använda följande kvot:

$$\frac{\text{antal dagar med för många personer}}{\text{antal dagar}}$$

Kommentar till laborationen Minibussen

Den teoretiska sannolikheten för minibussuppgiften kan beräknas genom att föra följande resonemang: Den som köpte biljett först kommer med en sannolikhet av 0,9. Nästa biljettköpare kommer med en sannolikhet av 0,9. Alltså är sannolikheten att de två första biljettköparna kommer $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$. Fullföljer vi detta resonemang för alla tio biljettköparna får vi sannolikheten $(0,9)^{10} \approx 0,35$ att alla kommer.

En diskussion av slumpmässighetens betydelse i statistksammanhang kan tas upp i samband med minibussuppgiften. Eleverna får veta att väl utförd statistik fordrar att urvalet av personer sker efter samma princip som urvalet av siffror i tabeller av slumpmässiga tal. Minibussuppgiften kan även leda till en mer generell diskussion av modellering – att en modell är just en modell och därför aldrig kan innehålla all den information som den modellerade situationen innehåller. I minibussuppgiften är det exempelvis frestande att tänka på varje siffra, tex 2, som en representant för en specifik person som köpt biljett. En sådan identifikation leder dock till problem i de fall en serie innehåller samma siffra mer än en gång. Allt den här simuleringen modellerar är en situation i vilken man tio gånger väljer ett objekt av tio möjliga och där varje val har sannolikheten 0,9 att bli lyckat.

Nyfödda och deras mödrar

Fritt efter Rossman, A. J., Chance, B. L. & von Oehsen, J. B. (2002). Workshop statistics. Discovery with data and the graphing calculator. Emeryville, CA: Key College Publishing Press.

Material: Sax och två kraftiga A4-papper till varje elevpar. Det är viktigt att det inte går att se genom pappret.

Uppgift

Antag att en natt på ett sjukhus föder fyra mödrar (Alm, Björk, Carlsson och Dahl) var sin pojke. Varje mor ger sitt barn ett förnamn som börjar på samma bokstav som hennes efternamn: Adam Alm, Bertil Björk, Christian Carlsson och David Dahl.

Använd dina kunskaper om sannolikhet för att beskriva vad som skulle hända om sjukhuspersonalen helt slumpmässigt skulle placera de nyfödda hos mödrarna.

- Hur ofta skulle åtminstone en mor få rätt barn?
- Hur ofta skulle varje mor få rätt barn?
- Vilket är det troligaste utfallet?



Simulering

1. Arbeta i par. Klipp itu ett A4-papper i fyra delar och skriv ett barns namn på varje. Vik ett A4-papper i fyra lika stora fält och skriv en mors namn i varje. Blanda de fyra korten väl, med namnsidan ner, och placera dem slumpmässigt på varje del av A4-papperet. Vänd till sist på korten för att se vilken mor som fick vilket barn. Notera hur många mödrar som fick rätt barn. Pricka av resultatet med snedstreck i nedanstående tabell. Gör om försöket tio gånger.

	0	1	2	3	4	Summa
Antal mödrar med rätt barn						

2. Sammanställ gruppernas resultat på tavlan i följande helklastabell:

	0	1	2	3	4	Summa
Antal mödrar med rätt barn						
Relativ frekvens						1,00

3. Besvara frågorna a–c ovan med hjälp av helklastabellen.

Kommentar till laborationen Nyfödda och deras mödrar

De teoretiska sannolikheterna beräknas genom att lista alla de 24 permutationerna av A, B, C och D. Låt första positionen i permutationen representera mamma Alm, andra positionen mamma Björk, tredje positionen mamma Carlsson och fjärde positionen mamma Dahl. Bokstäverna A, B, C, och D motsvarar barnen Adam, Bertil, Christian och David. Då motsvarar ABCD att alla mammor fick rätt barn, BACD att bara mamma Carlsson och mamma Dahl fick rätt barn, etc. De teoretiska sannolikheterna blir då

	0	1	2	3	4	Summa
Antal (permutationer av 24)	9	8	6	0	1	24
Teoretisk sannolikhet	0,375	~0,33	0,25	0	~0,04	~1,00

När jag genomför den här simuleringen är det roligt att höra hur det ena elevparet efter det andra upptäcker att de aldrig får "tre rätt" och hur paret sedan logiskt resonerar sig fram till att det är en omöjlig händelse. Övningen kan användas till att introducera *betingad sannolikhet* utan att nödvändigtvis termen används. På så sätt skiljer sig denna laboration från de tre tidigare laborationerna. Antagandet i de tre föregående laborationerna var att de steg som händelserna bestod av var oberoende av varandra. Sedan kan man ju diskutera hur realistiskt ett sådant antagande är.

Slutkommentar

Min erfarenhet är att om undervisningen om sannolikhet tar sin utgångspunkt i laborationer, engageras elever i den slags matematiska diskussioner som vi matematiklärare gärna strävar efter. Problemlösningsförmågan, resonemangsförmågan och kommunikationsförmågan aktiveras. Förutom samtal om kunskapsstoff specifikt relaterat till sannolikhet, får jag under mina lektioner bland annat höra elevers omvandlingar fram och tillbaka mellan bråk och procent, diskussioner om relativa storleken mellan bråk samt andra viktiga taluppfattningsfrågor.

LITTERATUR

Britton, T. & Garmo, H. (2002). *Sannolikhetslära och statistik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.

Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L. & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Landwehr, J. M., Swift, J. & Watkins, A. (1987). *Exploring surveys and information from samples*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Newman, C. M., Obremski, T. E. & Scheaffer, R. L. (1987). *Exploring probability*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Rossman, A. J., Chance, B. & L. von Oehsen, J. B. (2002). *Workshop statistics. Discovery with data and the graphing calculator*. Emeryville, CA: Key College Publishing Press.

Stora talens lag (u.å.). Tillgänglig I21102 på www.ne.se/lang/stora-talens-lag



På Nämaren på nätet finner du elevblad för de laborationer som beskrivs här samt en slumpalstabell 0–9.

Venn-diagram

Venn-diagram har fått sitt namn efter den brittiske logikern John Venn (1834–1923).

De kan bland annat användas för att illustrera utfallsrum inom sannolikheter.

Läs mer på exempelvis

sv.wikipedia.org/wiki/Venndiagram

En aktivitet finns i Strävorna, se 1DF5DF Venn-diagram.

