Bengt Ulin

Boolesk algebra – lönsamt skolämne

I Nämnaren nr 3, 2000 presenterades projektiv geometri. Här följer en presentation av boolesk algebra med exempel på hur den stöder andra områden i undervisningen.

Varför "lönar det sig" att undervisa om boolesk algebra?

Uttrycket används ju dagligen på tal om företag och vinster, och för all del, visst kan boolesk algebra te sig lönsam ur denna aspekt med tanke på en framtida anställning inom IT-branschen, men jag tänker på något annat. Jag tänker på en studie- och arbetstid som engagerar och utvecklar gymnasieelever och som därför upplevs som meningsfull av dem. Det finns ett par matematikområden, som verkligen är lönsamma men som inte gynnats eller ens tagits upp i gymnasieskolans läroplaner. Många års erfarenheter i Kristofferskolan och i vuxenkurser har visat mig att projektiv geometri och boolesk algebra är fruktbara övningsfält som borde bli disponibla inom gymnasieskolans ram. Trots att dessa två områden har skilda karaktärer finns det flera faktorer, inte minst pedagogiska, som de har gemensamt.

Båda erbjuder

- intressanta historiska bakgrundsskeenden
- symmetri, baserad på en genomgående dual uppbyggnad
- bra tillfällen till studier av axiomatik
- stor spännvidd mellan det åskådliga och det abstrakta
- påtaglig praktisk användning
- problemlösning som utmanar både logik och kreativitet

Bengt Ulin är välkänd från biennnaler, artiklar och böcker. Han har varit lektor vid Lärarhögskolan i Stockholm och Kristofferskolan i Bromma

Det är denna mångsidighet som gör ämnena fruktbara för de allra flesta, för elever med skiftande förutsättningar. Redan det att innehållen byggs upp från gräsrotsnivå, således inte kräver en hel del förkunskaper som t ex funktionsläran, verkar engagerande.

En banbrytare

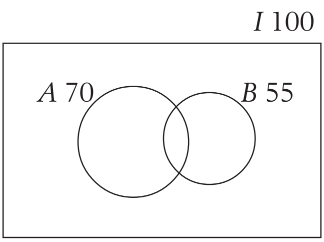
Attributet ”boolesk” härrör från den engelske matematikern George Boole (1815 – 1864), som från 1849 och fram till sin tidiga död var verksam som professor vid ett nyinrättat college i Cork på Irland. Han var mycket uppskattad som skicklig, pedagogisk föreläsare. Fru Mary Boole redigerade pedagogisk-psykologiska anteckningar, som Boole samlat utur sina erfarenheter som lärare, och lät postumt utge en skrift med titeln Boole´s Psychology.

George Boole var inte den ende som arbetade med symbolisk logik. Att man hedrat honom med beteckningen boolesk algebra beror främst på att han skrev ett standardverk, vars titel är *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, i kortversion *The Laws of Thought* (1854).

Boolesk algebra utvecklades ur ”symbolic logic”. I en bok år 1881 med just denna rubrik introducerade John Venn det diagram som uppkallats efter honom och som erbjuder eleverna en mycket åskådlig form av boolesk algebra, främst mängdalgebra.

Mängdoperationer

I figur 1 representerar cirklarna A och B två mängder av objekt, t ex personer. De utgör delmängder av en grundmängd I. Exempelvis kan denna omfatta 100 motionerande personer av vilka 70 tycker om att jogga (A) och 55 gillar cykelturer (B).



Figur 1

Ur dessa data kan man dra flera slutsatser, t ex att

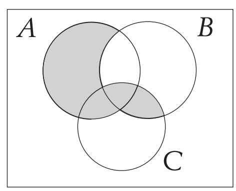
1. minst 25 och högst 55 personer gillar både att jogga och att cykla
2. minst 70 och högst alla gillar att jogga eller att cykla eller bådadera

Av dessa resultat sägs (1) ge antalet personer som tillhör

snittet till A och B: $A \cap B$
och (2) ge antalet personer i
unionen av A och B, $A \cup B$

Därmed har vi exemplifierat två operationer i en mängdalgebra, snitt och union. En tredje operation är komplementbildning: till varje delmängd M hör ett komplement M' omfattande de element i grundmängden som ej tillhör M.

Utöver en rad aritmetiska problem, som kan ges beträffande två, tre eller fler mängder och som bl a kan avse minimi- eller maximiantal, erbjuder mängdalgebran olika typer av algebraiska problem.



Figur 2

Det kan vara att i ett Venn-diagram med tre överlappande mängder A, B och C markera en algebraiskt given mängd, t ex

$$(A \cap B') \cup (A' \cap C).$$

Omvänt kan uppgiften vara att ge en algebraisk tolkning av en grafiskt given mängd, som i figur 2. Här gäller det att dela det givna området i bitar som kan få överlappa varandra. Eftersom uppdelningen kan göras på olika sätt har det algebraiska svaret alternativa former. Till mängden i figur 2 är t ex följande svar ekvivalenta:

$$(A \cap B') \cup (B \cap C) \qquad (1)$$
$$(A \cap B') \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (2)$$
och
$$(A \cap B' \cap C') \cup (A \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \qquad (3)$$

Av dessa tre uppdelningar innehåller (1) och (3) ej-överlappande (disjunkta) mängder, till skillnad mot (2).

Resultatet visar att uttrycken (2) och (3) kan förenklas till uttrycket (1). Vi ska återkomma till detta något senare.

Axiomatik

Två mycket viktiga identiteter upptäcktes av A de Morgan och kallas efter honom de Morgans lagar. I mängdalgebrans språk lyder dessa:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (4)$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad (5)$$

Det är inte svårt att verifiera dessa identiteter grafiskt i Venn-diagram.

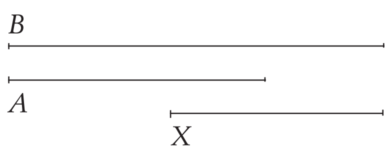
De är dualiteter till varandra: union och snitt är duala operationer.

Med ett dualt uppbyggt axiomsystem uppnår man att den booleska algebran blir alltigenom dual. Just tack vare de åskådliga Venn-diagrammen kan eleverna medverka till axiomsystemets utformning. Samtidigt med en repetition av den vanliga algebrans grunder får eleverna därvid en god inblick i vad axiomatik innebär. Bl a finner de att boolealgebran tack vare dualitet har två distributiva lagar, inte bara en som den vanliga algebran.

Den för dem välbekanta identiteten:
$a(b + c) = ab + ac$
har i boolealgebran ett dualt tvillingsyskon, nämligen $a + bc = (a + b)(a + c)$.

En annan påtaglig skillnad är att $ab = 0$ kan gälla utan att vare sig a eller b är 0. I mängdalgebran motsvaras 0 av ”den tomma mängden”, Ø.

Exempelvis är $A \cap B = Ø$ för alla par av disjunkta mängder A och B.



Figur 3. $A \cup X = B$

Som figur 3 med sina intervallmängder visar har en ekvation av typen $A \cup X = B$ i regel ej en entydig lösning. Det är inte svårt att inse att lösningsmängden X maximalt kan vara B, medan dess minimala omfattning är $A' \cap B$. Vi ser här f ö att snitt i kombination med komplement gör subtraktion överflödig som operation.

Algebraisk förenkling

Hur visar man algebraiskt att ett uttryck som $ab' + ac + bc$ kan förenklas till uttrycket $ab' + bc$? (Dvs hur bevisar man (2) = (1) i exemplet ovan?)

Det gör man med hjälp av axiom och satser ur boolealgebran. Låt oss här ta ett enklare exempel: kan uttrycket $a + a'b$ förenklas?

Svaret är ja och förenklingen kan genomföras med hjälp av följande boole-axiom, där + och • är binära operationer svarande mot $\cup$ och $\cap$:

$a + a' = 1$
$a + bc = (a + b)(a + c)$
(punkten • utelämnas i regel)
$1 \bullet a = a$

Man får:

$$a + a'b = (a + a')(a + b) = 1 \bullet (a + b) = a + b$$

I förenklingsuppgifter ingår att eleverna motiverar varje förenklingssteg genom att referera till ett axiom eller en genomgången sats. På så vis övar de upp sin medvetenhet.

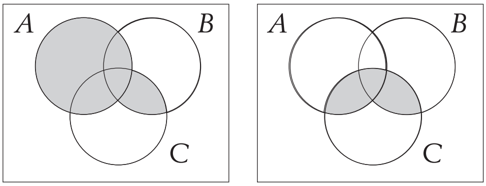
Kreativitet

Att genomföra sådana förenklingar på ett medvetet-stringent sätt kan kompletteras med övningar som appellerar direkt till elevernas kreativitet. Låt oss se på en sådan uppgift i form av ett mängdalgebraiskt problem (fig 4):

Som ett Venn-diagram visar är

$$X = A \cup (B \cap C) \text{ och } Y = (A \cup B) \cap C$$

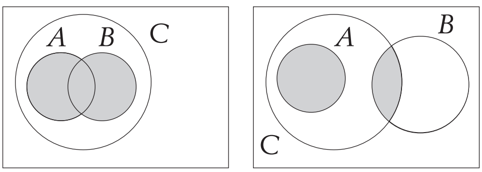
olika mängder i det normalfall då A, B och C är överlappande.



Figur 4. $A \cup (B \cap C)$ *och* $(A \cup B) \cap C$

Rita något eller några Venn-diagram med tre olika, icke-tomma mängder A, B och C där identiteten $X = Y$ gäller.

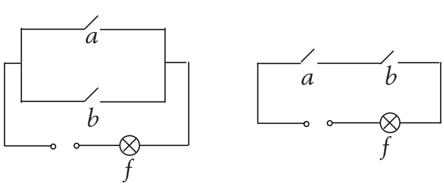
Här är fältet fritt för olika angreppssätt, alltifrån trial-and-error till en systematisk-logisk undersökning. De flesta elever börjar med en ansats i form av en försöksfigur och korrigerar denna successivt fram till en giltig figur. Ett par giltiga diagram visas i figur 5.



Figur 5

Kontaktalgebra (switching algebra)

Den praktiska nyttan av boolesk algebra var inte så stor fram till 1938, då Claude E Shannon vid Bell-laboratorierna i USA upptäckte att boolealgebrans axiomsystem utan vidare kan användas för förenkling av elektriska kretsar innehållande strömbrytare (kontakter, switchar). Mängdalgebran har en syster, en kontaktalgebra. Efter uppfinningen av transistorn (1948) kom reläer m fl rätt stora enheter i de forna "elektronhjärnorna" att ersättas med transistorkopplingar, vilket ledde till de nät av logiska grindar som utnyttjas i våra datorer. Tack vare Shannons upptäckt kunde tillverkningsprocedurerna förenklas avsevärt.

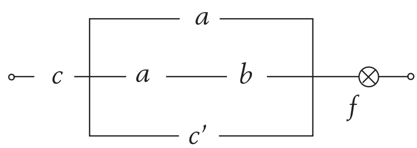


Figur 6 $f = a + b$ $f = ab$

Fig 6 illustrerar hur parallell- och seriekoppling (de två grundläggande kopplingarna) svarar mot bildning av union resp snitt, varvid $a = 1$ innebär "kontakt a är på" och $a = 0$ "kontakt a är från".

$f = 1$ innebär att kretsen är strömförande, $f = 0$ utvisar strömlös krets. Vidare gäller $1' = 0$ och $0' = 1$.

Analogin med mängdalgebran framträder även språkligt; t ex svarar vid seriekoppling "kretsen är strömförande om a och b är på" mot "elementet tillhör snittet till A och B, om det tillhör A och B".



Figur 7

Låt oss ta ett exempel på hur algebran kan tillämpas vid förenkling av ett givet kontaktnät, kretsen i figur 7.

Den funktion f vars värde är 1 när lampan lyser blir

$$f(a,b,c) = f = c(a + ab + c')$$

För att förenkla denna funktion så långt som möjligt ska vi se på ytterligare två axiom i boolealgebran, nämligen $aa' = 0$ och $a + 1 = 1$.

I kontaktalgebran innebär $aa' = 0$ att två kontakter i serie ger strömlös ledning om de har motsatta värden, 0 och 1.

$a + 1 = 1$ svarar mot att en kontakt a i parallellkoppling med en strömförande ledning ej kan spärra strömmen. I mängdalgebraisk tolkning säger de två axiomen att snittet $A \cap A'$ utgör tomma mängden och att $A \cup I$, dvs grundmängden I "utökad" med en mängd A, förblir grundmängden.

Vi erhåller nu:

$f = ca + cab + cc' = ca + cab + 0 = ca(1 + b)$ $= ca \bullet 1 = ac$, vilket visar att det givna nätet kan ersättas med enbart kontakterna a och c i serie, således en avsevärd förenkling.

Språket

Språket har en framträdande roll i boolesk algebra. Vi har exempelvis mängder för ”antingen A eller B”, ”varken A eller B”, ”åtminstone någon av A eller B” etc.

Som förut antytts utvecklades boolealgebran ur en algebraisering av logik.

Om a betecknar en utsaga, innebär $a = 1$ att a är en sann utsaga, medan $a = 0$ visar att utsagan a är falsk.

Om a är utsagan ”n är delbart med 3” (där n är ett heltal) och b är utsagan ”n är delbart med 5” kan vi bilda de sammansatta utsagorna

”n är delbart med 3 och n är delbart med 5”

respektive

”n är delbart med 3 eller n är delbart med 5 eller bådadera”,

eller kortare:

”n är delbart med 3 och 5”

respektive

”n är delbart med 3 eller 5 eller bådadera”

Dessa utsagor kallas för konjunktionen resp disjunktionen av a och b och skrivs med symboler $a \wedge b$ resp $a \vee b$.

De svarar mot snitt resp union i mängdalgebran och mot serie- respektive parallellkoppling i kontaktalgebran. Vidare svarar negationen a' (”n är ej delbart med 3”) mot komplement i mängdalgebran och motsatt kontaktläge i kontaktalgebran.

Nödvändigt och/eller tillräckligt villkor

I den problemtyp som illustrerades i fig 4 kan frågeställningen utvidgas till att eleven ska utröna vilken förutsättning som är nödvändig, tillräcklig eller såväl nödvändig som tillräcklig beträffande A, B och C för att en identitet som

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ska gälla.

En sådan frågeställning kan vara särskilt motiverad som tilläggsuppgift för mer försigkomna elever. (Däremot är det angeläget att alla elever får undersöka nödvändighet och tillräcklighet hos förutsättningar i enklare problem, t ex beträffande delbarhet hos naturliga tal. Ett mycket enkelt exempel: vad är nödvändigt och tillräckligt för att ett naturligt tal ska vara delbart med 5?)

Summering

Som artikeln torde visa är boolealgebran mångfasetterad och erbjuder problemlösning av såväl skiftande art som varierad svårighetsgrad. Den ger en fördjupad aspekt på algebra liksom projektiv geometri ger ett vidare perspektiv på geometri.

LITTERATUR

[1] J E Whitesitt, *Boolean Algebra and Its Applications*, Dover, N.Y., 1995

[2] M Gardner, *Logic Machines, Diagrams and Boolean Algebra*, Dover, N.Y., 1968

[1] innehåller bl a åtskilliga övningsuppgifter med svar till en del av dem;

[2] ger många intresseväckande historiska belysningar.

Utöver dessa finns en rad böcker om algebra, där boolesk algebra ingår. Se även *Vi har läst* på sidan 59.