STEFAN LÖFWALL

Är du ute och cyklar? Bra i så fall!

I artikeln diskuteras undervisning av algebra i skolan med hjälp av den algebraiska cykeln. Med utgångspunkt i några elevaktiviteter belyser författaren hur man kan involvera alla delar av cykeln.

Algebra i skolan är ett område som upplevs mycket abstrakt och svårt att förstå. Hur man skriver om och förenklar uttryck dominerar i läroböckernas uppgifter – ändå har elever stora brister just i algebraiska förenklingar. Hur kan man arbeta annorlunda med algebran?

Viktiga steg

När man ska lära sig algebra är det några olika steg som måste länkas ihop för att det hela ska fungera bra. Ett av stegen handlar om att utföra algebraiska förenklingar. Men om det här steget blir för dominerande riskerar vi alltför liten förståelse för det som görs och en känsla av att det inte har någon konkret anknytning. Om ett algebraiskt uttryck, som sedan ska förenklas, är färdigserverat från början berövas man det viktiga steget att utifrån en situation – t ex ett upptäckt mönster – översätta situationen till ett algebraiskt uttryck. Vi ska se närmare på vad det handlar om via ett kanske välkänt exempel. Exemplet handlar om mönster i en almanacka (se uppgiften till höger).

Låt oss välja de fyra datumen uppe i högra hörnet.

5	6
12	13

Om vi adderar datumen diagonalt får vi $5 + 13 = 18$ och $6 + 12 = 18$. Diagonalsummorna blev lika! Är det en tillfällighet?

Almanackan

Januari 2008

må	ti	on	to	fr	lö	sö
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

- Välj ut fyra intilliggande datum i en kvadrat. Jämför summorna av datumen diagonalt.
- Välj ut fyra nya datum och jämför summorna på samma sätt.
- Ser du något samband mellan de två exemplen?
- Gäller sambandet överallt i januari 2008? Gäller det i andra månader? I april år 1163?
- Hur kan man veta det?

Om vi gör ett nytt försök i en annan kvadrat ger det också lika stora diagonalsummor.

9	10
16	17

Upptäckten gäller kanske generellt, oavsett var man väljer sin kvadrat i månadsbladet. Hur kan man ta reda på det? Jo, med algebra kan vi beskriva talen i en ruta vilken som helst!

Vi översätter situationen med hjälp av algebraiska symboler:

n	$n+1$
$n+7$	$n+8$

Den första diagonalsumman blir $n + (n+8)$ och den andra $(n+1) + (n+7)$.

Är det verkligen samma tal – de ser ju olika ut? Efter omskrivning syns det tydligare.

$n + (n+8) = 2n+8$

$(n+1)+(n+7) = 2n+8$

Ja, summorna blir lika! De blir faktiskt alltid lika eftersom n i båda fallen är datumet i det övre vänstra hörnet och det inte spelar någon roll vilket det är. Vi kan sluta oss till att sambandet måste gälla även för april år 1163. Det kan vi vara helt säkra på även om vi inte vet exakt hur det månadsbladet ser ut. (Är det det som kallas för algebrans kraft?)

Vi väljer en ny kvadrat, men nu har jag täckt över tre av de fyra rutorna.

17	

Beräkna nu summan av datumen i diagonalen från det övre högra hörnet till det nedre vänstra! Hur gjorde du? Några kanske säger att i nästa ruta till höger står 18 och under 17 står 17 + 7, det vill säga 24, och 18 + 24 blir 42. Andra har tolkat uttrycket för summan, $2n+8$, och inser att summan blir 2 gånger talet i första rutan plus 8 och får den till 42. Den förståelsen vill vi ha! Vi flyttar sedan övertäckningen till ett nytt ställe och bestämmer en ny diagonalsumma genom att använda den senare metoden en gång till.

Almanackan 2

Januari 2008

må	ti	on	to	fr	lö	sö
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

- Välj ut fyra intilliggande datum i en kvadrat. Jämför produkten av datumen diagonalt.
- Välj ut fyra nya datum och jämför produkterna på samma sätt.
- Ser du något samband mellan de två exemplen?
- Gäller sambandet överallt i januari 2008? Gäller det i andra månader? I april år 1163?
- Hur kan man veta det?

En möjlig utvidgning av aktiviteten kan vara att vi multiplicerar istället. I den första rutan (ovan) får vi $5 \cdot 13 = 65$ och $6 \cdot 12 = 72$ ... nja, inte så kul.

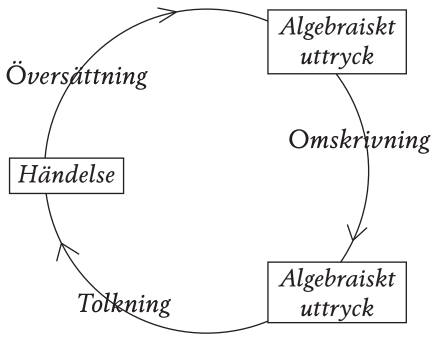
I den andra rutan får vi $9 \cdot 17 = 153$ och $10 \cdot 16 = 160$ ... jaha, kanske vi kan se något nu? Men vänta, är inte den andra produkten 7 större än den första i båda fallen? Jo, $72 - 65 = 160 - 153 = 7$

Generellt har vi en av produkterna som $n \cdot (n+8)$ och den andra som $(n+1) \cdot (n+7)$. Differensen är $(n+1) \cdot (n+7) - n \cdot (n+8) = (n^2+8n+7) - (n^2+8n) = 7$.

Den algebraiska cykeln

De här exemplen är bra, men mitt huvudsyfte är att använda dem som en illustration av de olika stegen, som beskrivs i den så kallade algebraiska cykeln (Bergsten m fl, 1997).

Vi startade med *händelsen* att vi upptäckte att diagonalsummorna var lika, *översatte* datumen till generella algebraiska symboler, fick två *algebraiska uttryck* för summorna, skrev om uttrycken så att vi fick nya algebraiska uttryck – som blev lika – och *tolkade* därefter det nya algebraiska uttrycket för diagonalsumman när tre av de fyra rutorna täckts över för att göra en beräkning i en ny händelse.



Figur 1. *Algebraiska cykeln*

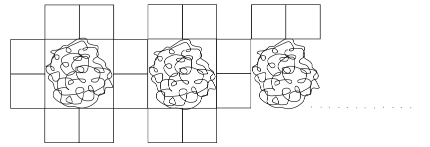
I läroböcker försummas ofta faserna *översättning* och *tolkning*. Symbolerna i sådana exempel har ingen mening och det framräknade uttrycket säger oss ingenting. ”Varför ska man använda bokstäver när det finns siffror?” är en talande kommentar från en del elever.

Under tidiga skolår talar man ofta om vikten av god taluppfattning eller god talkänsla, något som har stor betydelse för bland annat självförtroendet i matematik. Lite högre upp i åldrarna utvidgas detta till god algebrauppfattning eller god känsla för algebra, senare också god känsla för olika funktioner. För att få denna goda algebrauppfattning behöver den algebraiska cykelns alla delar finnas med.

Andra bra exempel som tränar cykelns olika delar kan vara olika typer av mönsteruppgifter, t ex följande uppgift som handlar om hur många plattor som går åt runt träden i en plantering.

Beroende på hur man tänker kan man få det allmänna sambandet antingen via en förenkling eller direkt. Dessa olika lösningar kan diskuteras. Man kan se att de olika faserna i den algebraiska cykeln finns med.

Plattläggningen



1 Hur många plattor behövs runt
 a) två träd b) tre träd c) 20 träd?
2 Skriv ett allmänt samband som visar hur man kan räkna ut hur många plattor som behövs om man har *n* st träd!
3 Hur många plattor behövs runt 100 träd?

Dra in eleverna!

En poäng är att också ta upp den algebraiska cykeln med eleverna! Naturligtvis är detta inte det första man gör när man kommer in på algebra. Men, den hjälper eleverna att lära sig mer om sitt eget lärande, de får ett bättre metaperspektiv: vad går algebran ut på, vilka olika delar måste jag kunna och hur hänger de olika delarna ihop, var har jag min styrka, vilken länk är min svaghet etc.

I flera år har man tryckt på att eleverna måste ta ett större eget ansvar för sitt lärande. Men, hur ska det gå till? Ett bra metaperspektiv är en förutsättning för att eleverna ska kunna göra detta (se Åkesson, 1997). Idag diskuterar man också självvärdering som en outnyttjad potential för lärande. Även självvärderingen är beroende av ett bra metaperspektiv!

Omvänd multiplikation

Talen 21 och 48 har en speciell egenskap. Produkten $21 \cdot 48$ ger samma resultat som den produkt vi får om vi kastar om ordningen på siffrorna i faktorerna, det vill säga

$$21 \cdot 48 = 12 \cdot 84$$

– Finns det fler talpar med den här egenskapen?
– Gäller den kanske för alla produkter eller måste de vara på ett särskilt sätt?

Ytterligare exempel

Vi märker rätt snabbt att den egenskap som gäller för produkten av 21 och 48 (se uppgift förra sidan) inte gäller för alla produkter. Vad krävs för att den ska gälla?

Händelsen att produkten av två tvåsiffriga tal, *'ab'* och *'cd'*, blir lika om man kastar om ordningen på siffrorna ska översättas till algebraiska symboler. De tvåsiffriga talen är $'ab' = 10a + b$ och $'cd' = 10c + d$. Om det sedan ska gälla att $'ab' \cdot 'cd' = 'ba' \cdot 'dc'$, vad krävs då av siffrorna? De två produkterna ger följande algebraiska uttryck i en ekvation:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$$

$$100ac + 10ad + 10bc + bd =$$

$$= 100bd + 10bc + 10ad + ac$$

$$99ac = 99bd$$

$$ac = bd$$

Hur ska vi tolka resultatet? Jo, produkten av tiotalssiffrorna ska vara lika med produkten av entalssiffrorna. Då fungerar det! Vi kontrollerar att det stämmer i vårt inledande exempel. Sedan vill vi använda vårt resultat i en ny situation: Visa fler exempel på produkter där principen stämmer!

Man kan bygga på uppgiften och fråga sig om något liknande gäller för addition av tvåsiffriga tal. Ja, i exemplet 27 + 61 = 72 + 16 kan vi kasta om ordningen på samma sätt. Här kan vi göra en motsvarande undersökning som för multiplikationsexemplet. Dessutom: summan blir 88 i vårt exempel. I 32 + 56 = 23 + 65 blir summan också 88! Är det en tillfällighet att summan blir 88?

Finns det liknande talpar även i subtraktion, alltså där $'ab' - 'cd' = 'ba' - 'dc'$?

Ett av mina absoluta favoritexempel i det här sammanhanget handlar om tändstickorna i en tändsticksask:

- Kasta ut några fulla askar i klassrummet.
- Be dem som fångar askarna att plocka ur ett valfritt antal tändstickor så att jag inte vet hur många som finns kvar efter det.
- Be dem därefter att räkna hur många tändstickor som är kvar i asken och beräkna siffersumman av detta antal.
- Be dem därefter att också ta bort det antal tändstickor som motsvaras av siffersumman och tänka efter hur många tändstickor som sedan är kvar i asken.

Om jag nu är vältränad kan jag gå omkring och skaka askarna, lyssna noggrant, och säga hur många tändstickor som finns i var och en! Spännande och roligt – och en fin illustration av den algebraiska cykeln!

Låt gärna eleverna fundera på hur jag kunde säga precis hur många tändstickor som fanns i askarna. Kan man använda algebra för att förstå hur det kan ha gått till?

LITTERATUR

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *NämnarenTEMA. Algebra för alla*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Åkesson, J. (1997): *ANSVAR – hur lär man sig det*? Kristianstad: Institutionen för beteendevetenskap, Högskolan i Kristianstad.