

Algebra för lågstadiet

I denna artikel beskriver en lärare hur hon arbetar med algebra redan i de tidiga skolåren. Det är ett arbete som hjälper elever att förstå likhetstecknets betydelse, att bygga och se mönster. Det handlar också om variabelbegreppet och att använda algebra i problemlösning.

Vad innebär det att undervisa i algebra i årskurs 1–3? Vart ska dessa kunskaper leda? Jag har själv mångårig erfarenhet av att undervisa i matematik på lågstadiet och möter i mitt arbete som matematikutvecklare lärare från alla stadier och får ta del av deras resonemang kring algebrans roll i skolan. Med detta som bakgrund vill jag lyfta fram ett antal frågeställningar: Vilken bild har vi lärare av algebra? Vilka förväntningar har vi kring våra elevers möjligheter att förstå och ta till sig algebra? Är algebra något abstrakt som inte är lämpligt för de yngre eleverna eller är det rent av en fördel att introducera detta tidigt?

Lämpligheten i att introducera algebra i tidiga skolår har diskuterats i olika sammanhang och i olika delar av världen. De som är skeptiska lyfter fram synpunkter som att aritmetik och algebra är två skilda områden och att algebra inte är för alla utan för dem som har fallenhet. De aritmetiska kunskaperna måste befästas först och algebra är för abstrakt för de yngre eleverna. Förespråkarna menar däremot att den tidiga aritmetiken inte är åtskild från algebran. Man visar bland annat på den viktiga roll som förståelsen av likhetstecknet har för det tidiga matematiska tänkandet och att algebra kan hjälpa unga elever att göra matematiska generaliseringar.

I vår nya läroplan finns algebra med som ett centralt innehåll redan i årskurs 1–3 vilket jag ser som ett tecken på att vi i Sverige har sällat oss till dem som i någon form förespråkar att föra in algebran tidigt. Men vilket innehåll är det då som eleverna ska möta och framför allt, vart ska dessa kunskaper leda? Om vi tittar på det centrala innehållet för algebra i årskurs 1–3, så består det av två punkter.

- ♦ Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse.
- ♦ Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.

Samtidigt som vi ska vara väl medvetna om vad det är som är det centrala innehållet i de första årskurserna, anser jag att det är mycket viktigt att vi lärare också är medvetna om vad det är dessa kunskaper ska leda fram till på högre stadier. En av de förmågor som matematikundervisningen ska utveckla hos våra elever på alla stadier är att "formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder" (Lgr 11, s 63). Är algebra ett sätt att utveckla elevernas problemlösningsförmåga så att de kan gå från mer konkreta, specifika lösningar till allt mer abstrakta och generella lösningsmodeller? Vi börjar med att titta på hur man kan arbeta med några av de grundläggande delarna av algebran.

Likhetstecknets betydelse

Att barnen får en korrekt uppfattning av likhetstecknets betydelse redan från början anser jag är av yttersta vikt. Därför är det viktigt att vi redan från början låter eleverna möta öppna utsagor och att vi ständigt betonar att likhetstecknet betyder att det ska vara *samma värde på båda sidor om likhetstecknet*. Det är också viktigt att variera uppgifterna så att summan, differensen, kvoten eller produkten ibland står till höger och ibland till vänster om likhetstecknet. Utmana elevernas uppfattning genom att blanda uppgifter av typen $7 - 4 = \square$ med $\square = 5 + 4$. Många elever upplever subtraktionen $\square - 3 = 5$ som betydligt svårare än $8 - \square = 5$. Därför kan det vara viktigt att resonera kring denna typ av uppgifter och vad de innebär. Uppgifter med två eller flera termer på båda sidor av likhetstecknet som $6 + 4 = 7 + \square$ eller $11 - \square = 5 + 3$ bör också introduceras tidigt i undervisningen.

Talkedjor

På min skola genomför vi just nu en Learning study kring likhetstecknets betydelse. Vi har bland annat arbetat med att placera flera uppgifter efter varandra i det som vi har valt att kalla för *talkedjor*.

Eleverna fick skriva en uppgift till svaret 12 på en färgad papperslapp och de valde själva vilket räknesätt och hur många termer (eller faktorer) talet skulle innehålla. När alla hade skrivit sina uppgifter kontrollerade vi att de stämde och satte upp dem på tavlan. Därefter placerades de efter varandra i en talkedja på följande sätt:

$$12 = 8 + 4 = 14 - 2 = 5 + 5 + 2 = 3 \cdot 4 = 12$$

Sedan använde vi de resterande elevuppgifterna och jag täckte över ett av talen med en lapp. Dessa sattes upp på tavlan och då kan det se ut så här:

$$12 = \square + 6 = 4 + 4 + \square = 13 - \square = 6 \cdot \square = 12$$

Eleverna fick parvis diskutera vad det skulle stå istället för lapparna. Dessa togs sedan bort och vi kontrollerade om elevernas antaganden stämde. En variation är att istället dölja vilket räknesätt det är.

$$12 = 6 \square 2 = 3 + 3 \square 6 = 14 \square 2 = 10 + 4 \square 2 = 12$$



Som en fortsättning på övningarna kan eleverna sedan skriva egna talkedjor.

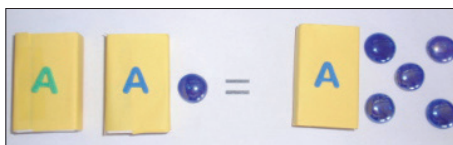
Variabelbegreppet

Redan på lågstadiet går det att ersätta det tomma strecket i en öppen utsaga med en bokstav. För eleverna är det inga problem att ersätta en tom ruta med x , a eller p . Eleverna förstår snabbt att bokstaven står för en okänd som de ska räkna ut. När man i de öppna

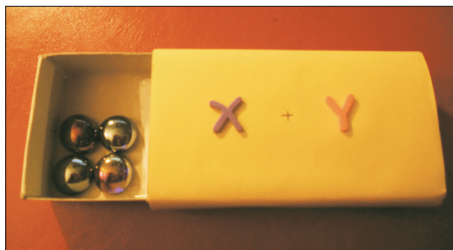
utsagorna använder bokstavsbeteckningar istället för tomma rutor kan man säga att det är en första träning i variabelbegreppet, dock handlar det då om en variabel som har ett bestämt värde.

Ytterligare ett sätt att träna likhetstecknets betydelse och användandet av bokstavssymboler är att spela ekvationsspelet, som bland annat finns på NCM:s webb. Eleverna övar sig i detta spel att med konkret material manipulera ekvationer. Erfarenheter visar att elever som närmar sig ekvationslösningar på detta sätt relativt snabbt är redo att lämna det konkreta materialet för att endast manipulera de matematiska uttrycken. Maria Dahlin och Eva-Lena Eriksson beskriver i Nämnaren nr 4, 2008, hur de introducerat ekvationslösning på detta sätt i årskurs 2 och årskurs 6 och de konstaterar att eleverna i båda årskurserna efter en tids övning klarar av att lösa ekvationer genom att skriva, det vill säga de är inte beroende av det konkreta materialet.

I de exempel jag gett ovan tränas eleverna i att finna ett bestämt värde på variabeln. Hur kan vi då tidigt låta eleverna möta variabelbegreppet i ett sammanhang där värdena varierar? I alla lågstadielklassrum tränar man talkamrater på olika sätt. Vi har utnyttjat detta till att träna variabelbegreppet. Tag en stor tändsticksask (dessa har en liten "vägg" i mitten). Klä gärna in asken och skriv $x + y$ på ovalsidan. Vi säger att vi exempelvis arbetar med talet tolv: Lägg i tolv pärlor och skaka lätt på asken. Öppna ena halvan och visa eleverna innehållet. Fråga dem "om x är 4, hur mycket är då y ?" Skriv gärna en tabell på tavlan. Upprepa tills ni har funnit alla tänkbara kombinationer. Låt sedan asken finnas tillgänglig så att de själva kan öva med den. Samma övning kan givetvis göras med andra talkamrater för att arbeta med uppdelning av tal.



Ekvationsspelet



Variabelasken

Mönster

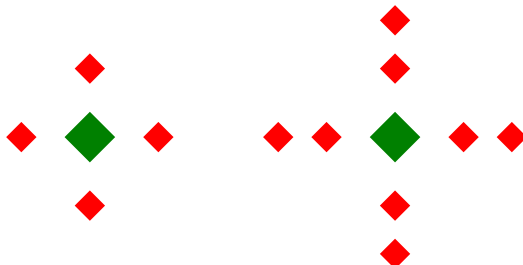
I det centrala innehållet för årskurs 1–3 betonas också arbetet med mönster. Eleverna bör bli uppmärksammade på två olika typer av mönster, *upprepande* och *växande* samt att det finns både talmönster och geometriska mönster.

Exempel på ett upprepande mönster:

$\Delta \Delta O \Psi \Delta \Delta O \Psi \Delta \Delta O \Psi$

Exempel på växande mönster:

1 2 4 7 11



Låt eleverna undersöka olika mönster och själva formulera regler för hur mönstret upprepas eller växer. Detta kan vara en ingång till att formulera mer generella lösningar. Genom att låta eleverna bygga eller rita ett påbörjat mönster samt att sätta ord på hur det utvecklas ökar deras förståelse för mönstrets uppbyggnad. Eleverna får stegvis öva på att formulera sig allt mer generellt och muntliga förklaringar kan efter hand ersättas med skriftliga.

Algebra som problemlösningsmetod

Jag hade under våren 2011 möjlighet att vara med i en forskningscirkel vid Göteborgs universitet och valde då att titta närmare på algebra i grundskolan genom att intervjua matematiklärare i årkurserna 4–9 om elevernas algebrakunskaper. Många elever ser algebra och problemlösning som två helt olika områden och de använder inte algebra som ett hjälpmedel vid problemlösning vilket lärarna önskade att de skulle göra. Detta var en tanke som jag tog med mig tillbaka till mitt arbete i klassrummet och funderade på hur jag tidigt kunde få eleverna att se algebra som en problemlösningsmetod. Jag lät eleverna undersöka olika mönster och formulera regler kring dessa. De fick arbeta i par med att undersöka hur många lodräta streck det behövdes för att dela en rektangel i fem delar. Detta var de instruktioner som eleverna i årskurs 3 fick:

Rita en rektangel.

Använd lodräta streck för att dela rektangeln i fem delar. Hur många streck behöver du använda?

Skriv in resultatet i en tabell.

Rita fler rektanglar och dela in i: 7, 11, 3, 8, 4, 9 delar. Skriv in resultatet i tabellen.

Hittar du något mönster?

Skriv en regel för hur många streck som behövs för att dela in rektangeln.

Hur många streck behövs för att dela in rektangeln i 40 delar? 100 delar? 2007 delar?



Eleverna tog sig an uppgiften med stor entusiasm. Snart gjorde många av dem en första upptäckt: om man delar en rektangel med fem streck får man inte fem delar utan sex. De korrigerade sin uppdelning och förde in resultatet i tabellen. I slutet av lektionen samlades vi för att ta del av varandras erfarenheter och för att dela med oss av de regler som formulerats. Så här löd några av elevernas regler:

Man får inte ta 5 streck om det är 5 delar. Det är fyra.

Om man ska dela upp det i 98 delar så måste man dra 97 streck.

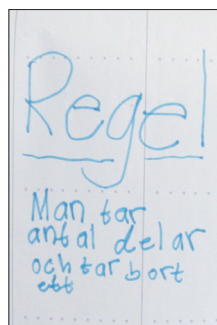
Streck är alltid en mindre än delar.

Man tar antal delar och tar bort ett.

Tillsammans diskuterade vi sedan om man skulle kunna använda ett mer matematiskt språk och kom då fram till följande regel:

$$\text{Antal streck} = \text{delarna} - 1$$

Detta är ett sätt att introducera algebra som problemlösningsmetod. I våra läroböcker finns många uppgifter där vi kan uppmuntra eleverna till att skapa mer generella lösningar. Låt dem arbeta med uppgifterna och formulera regler för hur uppgifterna kan lösas.



Lotta är 15 år. Hon är fyra år äldre än Elin. Hur gammal är Elin när Lotta är 18 år? 25 år? 40 år? 84 år?

Varje vecka får Nina 25 kr i veckopeng. Hur mycket har hon fått efter två veckor? Sex veckor? Tjugo veckor?

Karl och Irma gör tillsammans nio mål. Hur många mål kan de ha gjort var?
Hur många olika svar finns det?

Detta var några exempel på hur vi kan arbeta med algebra i de tidiga årskurserna för att låta eleverna förstå likhetstecknets betydelse, mönster och variabelbegreppet men också för att lägga grunden till att använda algebra som problemlösningsmetod. Jag ser fram emot att fortsätta utforska algebrans spännande värld tillsammans med mina elever.

LITTERATUR

- Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson L. & Ryding, R. (2011). *Matematik – ett grundämne*. NCM, Göteborgs universitet.
- Brorsson, Å. (2011). *Prima utmaningar 1, Prima matematik 3A och 3B*. Malmö: Gleerups.
- Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. K. Lester Jr (red), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s 669–705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dahlin, M. & Eriksson, E. (2008). Kan 8 – 12-åringar lösa ekvationer? *Nämnamnaren* 2008:4, s 7–10.
- Stephens, M. (2006) Generalisering av numeriska utsagor. I J. Boesen m fl (red), *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. NCM, Göteborgs universitet.