

Ett funktionsrum

Under Vetenskapsfestivalen i Göteborg 2001 bjöd matematiska institutionen på Chalmers och Göteborgs universitet på matematiska experiment för skolklasser. I en av aktiviteterna var det "funktionslådor" som eleverna fick undersöka. En elev spelar funktionens roll och de andra experimenterar med den och försöker lista ut vilken funktionen är. Målet är att eleverna på ett aktivt och lekfullt sätt ska få möta funktioner.

Med denna aktivitet försöker jag konkretisera ett abstrakt begrepp. En funktion kan definieras som *en otvetydig regel som till varje element i en mängd tillordnar högst ett element i en annan mängd*. Mycket av matematiken och speciellt beräkningar kan formuleras i termer av funktioner. Trots att definitionen i sig är ganska abstrakt, så kan eleverna leka med enkla funktioner och skaffa sig ett mycket konkret sätt att "se" dem. Det är viktigt att använda olika typer av funktioner, inte bara med tal. Detta för att skapa variation och för att visa att det viktiga inte är resultatet av en beräkning, utan transformationen som funktionen utför. Dessutom kan det vara roligare att också

leka med färg och språk än att bara räkna med tal.

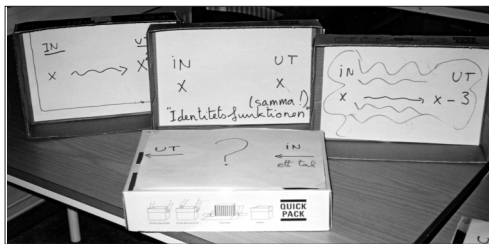
Inspiration från den nya matematiken

Jag har hämtat inspiration till denna aktivitet från mitt minne av "maskiner" som vi lekte med när jag gick i årskurs 2 och "den nya matematiken" var modern. Förutom att den ger en introduktion till funktioner, är det ett lekfullt sätt att låta barnen själva agera fysiskt som matematiska aktörer. På så sätt blir matematiken aktiv och levande och inte bara något som tar plats mellan papper och penna eller som man lyssnar på.

Laura Fainsilber är
forskarassistent i matematik
på Chalmers och
Göteborgs Universitet

Kartonger och matematik

Utrustningen består av ett antal kartonger där varje kartong representerar en funktion. Den största var i vårt fall en dator-kartong som målats svart, med undersidan helt öppen så att ett barn kan klättra in i den för att spela funktionens roll. På sidorna fanns två små öppningar, en för inmatning av "input" och en där funktionen ger ut resultatet. Mindre modeller kan göras av en A4-papperslåda eller av lock till en papperslåda och den elev som är funktionen ser insidan medan de andra som experimenterar bara ser utsidan. På insidan finns instruktioner om vilken operation som funktionen ska utföra. På utsidan står vilken typ av input som funktionen kan ta emot – *definitions-mängden* – såsom *tal, ord* eller *färg*.



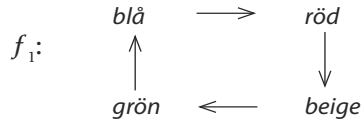
De elever som experimenterar med funktionen matar in passande "input". Det kan ske med färgade pappersremсор eller att de säger eller skriver ord eller tal på en lapp. Den som "är funktionen" följer instruktioner och ger tillbaka resultatet, som kan vara en annan färg, ett tal eller ett ord. Detta fortsätter tills eleverna har listat ut funktionen, vilken färgpermutation eller operation med tal eller ord som utfördes. De funktioner jag tog med i funktionsrummet finns på nästa sida.

Barnen och kartongerna

Vi fick besök av nästan 1000 elever från skolår 4 till 9. Speciellt de yngre kom mycket lätt in i aktiviteten. Det första de ville göra var att se vad som gömde sig i den stora funktionslådan. Sen var de beredda att leka. De tyckte att det var roligt både att sitta i lådan och att prova sig fram och lista ut vad som hände däri, speciellt med färgpermutationerna. En del prövade färger på måfå, andra utvecklade ett system och hittade sätt att anteckna resultatet. Många hade sedan tålmod att prova med andra funktioner och fundera på vad som skulle hända om man satte samman flera lådor och hur man kan komma på de "inversa" funktionerna, de omvända lådorna. Både att vara aktiv genom att vara funktion och att mata in värden och fundera ut funktionen var roligt, och eleverna räknade gärna när de hade en kamrat framför sig som ville ha svaret. Eftersom de hade olika roller, som funktion eller som experimenterator, och visste olika saker, så uppstod dialog och de kunde förklara för varandra vad de gjorde.

Många tittade fundersamt på instruktionerna för talfunktionerna första gången. Vi fick förklara att x representerar det som stoppats in och att det skall användas i beräkningen. Sedan hanterade de variabeln utan problem. På samma sätt lärde de sig snabbt att tolka en lapp med färger och pilar som transformation av färgerna. Både de som aldrig hade hört talas om funktioner och de som redan hade använt sig av begreppet tyckte om aktiviteten.

Färgpermutationer



$$f_2: \text{blå} \longleftrightarrow \text{grön} \quad \text{röd} \longleftrightarrow \text{beige}$$

och identitetsfunktionen:

$$f_0: \text{röd} \longrightarrow \text{röd}, \text{blå} \longrightarrow \text{blå}, \text{beige} \longrightarrow \text{beige}, \text{grön} \longrightarrow \text{grön}$$

Funktioner med ord

$$f_a: \text{ett ord} \longrightarrow \text{antalet bokstäver i ordet}$$

$$f_k: \text{ett ord} \longrightarrow \text{första bokstavens ordning i alfabetet}$$

$$\text{tex: arbete} \longrightarrow 1, \text{bil} \longrightarrow 2, \text{övning} \longrightarrow 29$$

Något svårare, men roligt, är det att arbeta med koder och chiffer.

Caesars chiffer

$$\text{ett ord} \longrightarrow \text{varje bokstavs efterföljare i alfabetet}$$

$$\text{tex: bil} \longrightarrow \text{cjm}, \text{funktion} \longrightarrow \text{gvolujpo}$$

Beroende på gruppens språkkunskap kan man arbeta med översättningar:

$$\text{ett ord på svenska} \longrightarrow \text{översättning till finska/arabiska/engelska... och omvänt:}$$

$$\text{ett ord på finska/arabiska/engelska...} \longrightarrow \text{översättning till svenska}$$

Funktioner med tal

$$x \longrightarrow x + 3$$

$$x \longrightarrow x - 3$$

$$x \longrightarrow x + 5$$

$$x \longrightarrow x \cdot 2$$

$$x \longrightarrow x \cdot 4$$

$$x \longrightarrow x \quad (\text{identitetsfunktionen})$$

$$x \longrightarrow 25 \quad (\text{konstantfunktion})$$

$$x \longrightarrow 7 \quad (\text{också en konstantfunktion})$$

$$x \longrightarrow x^2$$

I klassrummet

Principen är enkel och utrustningen kan lätt ordnas i ett klassrum. På vetenskapsfestivalen stannar eleverna bara några minuter vid varje station. I klassrummet kan man utveckla aktiviteten och undersöka mycket mer. När eleverna har förstått hur en funktion fungerar kan man börja sätta samman flera funktioner i rad. Det som kommer ut från den första blir automatiskt "input" i nästa funktion.

- Vad händer om man sätter samman färgpermutationen f_2 med sig själv? (Man får identitetsfunktionen.)
- Hur många identiska permutationer som f_1 måste man sätta samman för att få identiteten?
- Vad händer om man sätter samman flera $x \longrightarrow x + 3$ -lådor? Får man identitet så småningom?
- Kan man hitta en annan funktion, "den inversa funktionen", som vänder om $x \longrightarrow x + 3$ så att sammansättningen är identiteten?
- Har ordfunktionen f_a , antal bokstäver, en invers funktion?
- Hur är det med Caesars chiffer?

En bra kod bör kunna avkodas, dvs läsas!

Man kan också se att sammansättning av funktioner inte *kommuterar*, dvs att man ibland får olika resultat i en sammansättning av två funktioner om man tar den ena först och sedan den andra, än om man tar den andra först och sedan den ena. Prova med färgpermutationer, eller med

$$x \longrightarrow (x + 3) \cdot 2$$

som inte är detsamma som

$$x \longrightarrow (x \cdot 2) + 3$$

$x = 4$ ger i första fallet 14, och i andra fallet 11

eller med

$$x \longrightarrow x^2 + 3$$

som inte är detsamma som

$$x \longrightarrow (x + 3)^2$$

Använd olika typer av beräkningar som passar för klassen. Komplicerade funktioner kan brytas ner till en rad mera elementära lådor. Eleverna kan komma på andra transformationer och bygga sina egna funktionslådor. I så fall bör de tala om vad det är man får stoppa in i funktionen, definitionsmängden, och kontrollera att samma "input" ger samma resultat.

Kan en klocka eller en slumpfelsgenerator uppfattas som en funktion?

Uppföljning

Det skulle vara intressant att observera och intervjua en grupp elever några månader efter en sådan aktivitet och se om de kommer ihåg den, vad de har för bild av en funktion, om de använder sig av funktioner för att förklara transformationer eller beräkningar, och om de kan se matematik som något aktivt och roligt.

LITTERATUR

- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren* TEMA. NCM, Göteborgs universitet.
- Curcio, F. & Schwartz, S. (1998). Förskolans algebraiska tänkande. *Nämnaren* 25(1), 15-20.
- Willoughby, S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics* 3 (6), 314-318.