David Taub

Lärare kan lära från elevers misstag

Eleverna gjorde ett misstag som deras lärare inte kunde släppa tanken på. Detta ledde till nya matematiska insikter. Exemplet visar betydelsen av att betrakta misstag som något vi kan lära oss av, både elever och lärare. Det visar också att även bakom ett till synes korrekt svar kan det finnas missuppfattningar.

Jag undervisar åk 6–9 i matematik och vill dela med mig av en intressant erfarenhet. Som de flesta matematiklärare vet är bråk svårt för många elever. Särskilt svårt är det att få eleverna att inse att ett bråk också är ett tal. Jag har använt en rad olika metoder för att hjälpa elever att förstå detta begrepp, bl a har jag arbetat med en typ av uppgift som jag har lånat från en taluppfattningsdiagnos:

Ange ett bråk mellan $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$.

De flesta elever tycker att uppgiften är väldigt svår första gången de träffar på den och ett vanligt svar är:

Det finns inget bråk mellan de två, $\frac{2}{3}$ kommer ju direkt efter $\frac{1}{3}$.

Det brukar inte vara så svårt att få eleverna att inse att en tredjedel är mindre än en halv och två tredjedelar är större än en halv och att $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Bråk som ligger på vardera sidan av en halv blir snabbt enkla att bedöma. När eleverna sen har lärt sig att förkorta och förlänga brukar jag ändra uppgiften till:

Ange ett bråk mellan $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$.

Tyvärr får jag ofta svaret ”en halv” och då visar det sig att många elever ändå inte riktigt förstod de tidigare exemplen. Då visar jag dem detta sätt att resonera: Vi kan förlänga båda bråken med samma tal, t ex 2, utan att talen förändras:

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$ och $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10}$. Nu ser vi att $\frac{7}{10}$ ligger mellan $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$.

Naturligtvis förstår några elever att $\frac{3}{5} = 0{,}6$ och att $\frac{4}{5} = 0{,}8$ och då kan de lösa uppgiften med hjälp av decimaltal. Det är bra eftersom många elever har svårt att förstå relationen mellan bråk och tal i decimalform. De övar inte på att förlänga bråk, men de övar andra viktiga förmågor. Ett större problem är de elever som missförstår min instruktion helt och hållet. Av någon anledning finns det många elever som struntar i förklaringar och bara tittar på slutresultatet. De ser att $\frac{7}{10}$ är mellan $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$ och de antar att jag har gjort så här:

Ange ett bråk mellan $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{5}$: $\frac{3+4}{5+5} = \frac{7}{10}$.

Detta missförstånd har visat sig vara svårt att komma till rätta med. Jag insåg snabbt att ”felmetoden” verkade fungera på alla mina exempel och att den skulle fungera då det är samma nämnare och då täljarna ligger ”intill” varandra. Jag försökte därför ändra problemet en gång till så att det skulle tvinga eleverna att tänka efter och också ge dem anledning att förlänga ett bråk:

Ange ett bråk mellan $\frac{3}{7}$ och $\frac{2}{5}$.

Jag hade tänkt att eleverna först skulle förlänga bråken för att få en gemensam nämnare: till exempel $\frac{15}{35}$ och $\frac{14}{35}$. Då skulle de antingen kunna förlänga en gång till eller använda sin ”genväg” och få fram $\frac{29}{70}$ som ett exempel. Ni kan föreställa er hur jag kände mig när många elever svarade så här: $\frac{3+2}{7+5} = \frac{5}{12}$.

Uppgiften var med på ett prov, och $\frac{5}{12}$ ligger verkligen mellan $\frac{2}{5}$ och $\frac{3}{7}$. Detta var ett svårt läge – eleverna hade använt en, enligt mig, felaktig metod för att få fram ett korrekt svar. Svaret var rätt men ändå fel. Det blev nu ännu svårare för mig att förklara att deras metod inte var bra.

Algebra hjälper mig att förstå

Men historien slutar inte där. Oavsett hur jag vände och vred på problemet verkade elevernas konstiga metod alltid ge rätt svar! Det var dags för algebra. Döm om min förvåning när jag efter en stunds räknande kunde bevisa att metoden alltid fungerar oavsett vilka två bråk man väljer.

Beviset

Jag tror att beviset skulle vara intressant också för elever med bra förståelse för bråk och algebra

Låt $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ där *a, b, c* och *d* är positiva heltal.

(1) $ad < bc$ (följer från antagandet)

(2) $ab + ad < ab + bc$

(3) $a(b + d) < b(a + c)$

(4) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

(5) $ad < bc$ (följer från antagandet)

(6) $ad + cd < bc + cd$

(7) $d(a + c) < c(b + d)$

(8) $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Och från (4) och (8) får man: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Jag kände mig verkligen dum – jag kunde inte förstå hur det kunde vara sant. Det verkade helt orimligt.

Jag tror att jag hade blivit "låst" i ett visst sätt att betrakta problemet – jag såg bråk bara som tal och tänkte inte på att se på hur bråk används. Till slut fick jag hjälp av min vän Niclas Bernhoff, som är universitetslektor i matematik vid Karlstads universitet, att hitta ett bra sätt att förstå metoden. Idén kommer ironiskt nog från en annan vanligt typ av misstag som eleverna gör, när de adderar bråk:

> Kalle spelar innebandy på måndag och tisdag. På måndagen lyckas han få in 2 av 5 skott på mål och på tisdagen lyckas han med 3 av 7.
> Det sammantagna resultatet $\frac{2+3}{5+7} = \frac{5}{12}$ måste vara bättre än det sämsta $\frac{2}{5}$ och sämre än det bästa $\frac{3}{7}$.

Jag vet inte riktigt vad jag ska säga till eleverna nu. De förstår fortfarande inte och de kan inte hantera bråk korrekt, men de har inte riktigt fel heller. Men jag har definitivt lärt mig något nytt och intressant om bråk från mina elevers misstag, och det måste kunna gynna mina framtida elever på något sätt.

Några störande likheter

Apropå misstag som eleverna gör, som ändå är rätt på något sätt, lämnar jag er med de här störande likheterna. Jag har sett en av dem tidigare, men har själv hittat de andra:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{24}$ $\quad$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$ $\quad$ $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{63}$ $\quad$ $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{4} = \frac{16}{64}$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{19}{95}$ $\quad$ $\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{26}{65}$ $\quad$ $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{49}{98}$

LITTERATUR

Hardy, G. H. & Wright, E.M. (2008). *An introduction to the theory of numbers.* Bearbetning av den ursprungliga texten som kom 1936, av D. R. Heath-Brown och J.H. Silverman. Oxford University press.

Engström, A. (2000). Det ser rätt ut men är ändå fel. I *Nämnaren* nr 4, s 21–24.