Kerstin Larsson

# Multiplikationsundervisning

I artikeln diskuteras olika multiplikativa situationer och hur de kan användas för att representera räknelagarna. Författaren föreslår även en tänkt lärostig som kan underlätta generalisering av multiplikation till andra talmängder än de naturliga talen.

Denna text handlar huvudsakligen om multiplikation, men eftersom division är den inversa operationen till multiplikation har det mesta en motsvarighet för division. Eftersom dessa räknesätt är sammanflätade bör de behandlas tillsammans och elever bör få möjlighet att upptäcka samband och likheter mellan multiplikation och division, men även skillnader som att kommutativa lagen gäller för multiplikation men inte för division.

Multiplikation brukar vanligtvis introduceras som upprepad addition. Det är dock inte det enda sättet att uppfatta multiplikation. Gérard Vergnaud skriver att *Multiplicative structures rely partly on additive structures; but they also have their own intrinsic organization which is not reducible to additive aspects.* Ett exempel på hur multiplikation har en annan struktur än addition är att multiplikation hanterar flera olika storheter i samma händelse. Om vi köper 3 *äpplen* för 5 *kr/äpple*, får vi betala 15 *kr.* Vi multiplicerar 3 äpplen med 5 kr/äpple och får 15 kronor som resultat. Då vi beräknar area multiplicerar vi *längdenheter* och resultatet är *areaenheter.* I addition arbetar vi inom samma storhet, vi adderar ett antal äpplen med ett antal äpplen eller kronor med kronor. Ett annat sätt att beskriva hur multiplikation skiljer sig från addition är att varje äpple i exemplet ovan samtidigt representerar både *ett* äpple och *fem* kr. I fyra påsar med tolv bullar i varje, representerar varje påse både en påse och tolv bullar samtidigt. Att uppfatta denna dubbla innebörd simultant är enligt Leslie Steffe en kritisk aspekt för att erövra en djupare kunskap om multiplikation.

När multiplikation utvidgas till andra talområden är det nödvändigt att bilden av multiplikation som en upprepad addition inte är den enda. Att $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ är inte enkelt att förstå med hjälp av additivt resonemang. Hur tar man något en halv gång? Ännu svårare att tänka additivt blir det då talen är irrationella, så som $\pi \cdot \sqrt{2}$. Hur adderar man ”roten ur två” precis ”pi” gånger?

## Olika multiplikationssituationer

Det finns fyra multiplikativa situationer som sinsemellan är olika till sin natur:

- lika stora grupper, som fyra påsar med tolv bullar i varje
- rektangelformationer/areor, som rutorna i en chokladkaka
- multiplikativa jämförelser, som att fyra gånger så många som tre är tolv
- kartesisk produkt, som att tre halsdukar med fyra mössor kan kombineras på tolv olika sätt.

Uppgifter som handlar om lika grupper och area förekommer rikligt i läromedel för åk 4–6, medan multiplikativ jämförelse inte är lika vanligt förekommande. Multiplikation i samband med kartesisk produkt brukar vi i Sverige traditionellt se som kombinatorik och arbeta med i samband med sannolikhetslära och problemlösning.

Då vi arbetar med lika grupper har de båda faktorerna olika roller. Multiplikatorn talar om hur många grupper vi har och multiplikanden hur många föremål det är i varje grupp. Konkret ser det också annorlunda ut om vi har fyra påsar med tolv bullar jämfört med tolv påsar med fyra bullar i varje påse. När de båda faktorerna har olika roller ger det i sin tur upphov till två olika sorters division, *delningsdivision* och *innehållsdivision*.

I en rektangelformation, eller arean av en rektangel, har båda faktorerna samma roll. Det finns ingen begreppslig skillnad i vilket av talen 3 eller 5 som beskriver antalet rader i en äggkartong där det ligger 15 ägg. Om äggkartongen vrids 90° kommer det som nyss var rader att utgöra kolumner. Därmed blir det mindre intressant att tala om delnings- och innehållsdivision i sådana exempel.

Multiplikativ jämförelse ligger till grund för att förstå t ex bråk, procent, proportionalitet och skala. Traditionellt arbetar vi en hel del med dubbelt och hälften, men mindre med andra faktorer i vardagliga sammanhang. Då vi använder procent för att göra relationella jämförelser bygger vi på multiplikativ jämförelse. Att synliggöra multiplikativa jämförelser inom aritmetikundervisningen kan medföra en fördjupad förståelse för andra matematikområden.

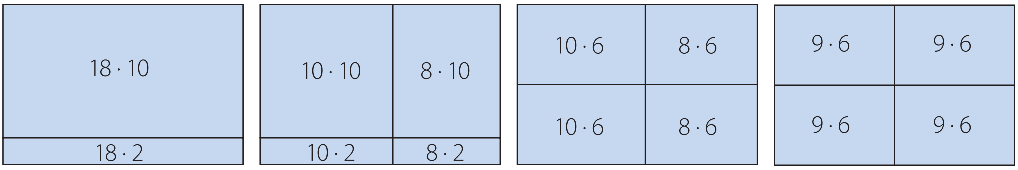
## Att förstå, synliggöra och använda räknelagar

Vi har tre viktiga räknelagar: den kommutativa, den associativa och den distributiva lagen. Den *kommutativa lagen* gäller för addition och multiplikation och medger att vi kan välja i vilken ordning vi adderar eller multiplicerar två tal, t ex $3+5=5+3$ och $3 \cdot 5=5 \cdot 3$. Den *associativa lagen* gäller även den för både addition och multiplikation och gör det möjligt att ändra ordningen för operationen då fler än två tal ska adderas eller multipliceras, t ex $(3+4)+5=3+(4+5)$ och $(3 \cdot 4) \cdot 5=3 \cdot (4 \cdot 5)$. Den *distributiva lagen* binder samman addition och multiplikation och gör det möjligt att beräkna t ex $3 \cdot (4+5)$ som $3 \cdot 4+3 \cdot 5$. Dessa räknelagar går att förstå med hjälp av olika representationer för multiplikation och är mycket användbara för att förenkla beräkningar.

Äggkartongen är en modell av multiplikation som rektangelformation som tydliggör kommutativa lagen. Det är samma antal ägg i kartongen även om vi vrider den 90°. Detta kan även yngre elever se och uppleva. Lika grupper som bullpåsarna ger däremot inte en lika tydlig bild av den kommutativa lagen. Man kan inte enkelt uppfatta att det är lika många bullar totalt i fyra påsar med tolv bullar som i tolv påsar med fyra bullar. Att inse att multiplikation är kommutativt *oavsett hur stora talen är* är inte svårt för elever när de accepterar rektangelformationer som multiplikation. Denna insikt bidrar dessutom till att det är lättare lära sig alla kombinationer i multiplikationstabellerna utantill, då antalet kombinationer närapå halveras.

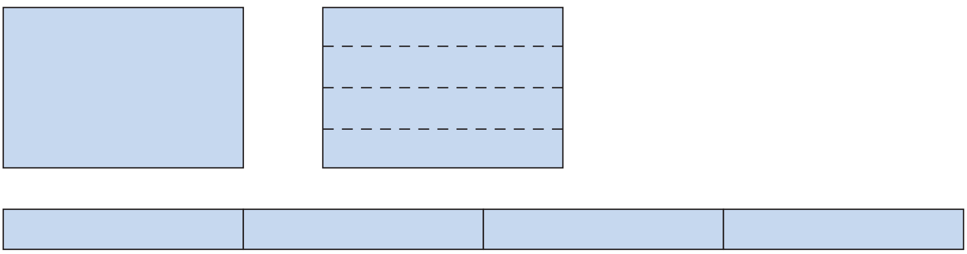
Distributiva lagen kan synliggöras med såväl lika grupper som rektangelformationer. Man kan dela upp de tolv bullpåsarna i två (eller flera) grupper och multiplicera dem var för sig, för att sedan addera produkterna, t ex $10 \cdot 4+2 \cdot 4$ eller $6 \cdot 4+6 \cdot 4$. I en rektangelformation kan man göra på motsvarande sätt. Vår äggkartong med $3 \cdot 5$ ägg kan delas upp i $3 \cdot 2+3 \cdot 3$ ägg. Insikten hur den distributiva lagen fungerar kan också underlätta inlärningen av multiplikationstabellerna. Eleverna kan utgå från de kombinationer som de kan och addera till större delar, t ex $7 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 20 + 15$.

Än större nytta av den distributiva lagen har man då talen är större, exempelvis kan $18 \cdot 12$ representeras av en rektangel med basen 18 cm och höjden 12 cm på centimeterrutat papper. Den innehåller då $18 \cdot 12$ $cm^2$-rutor, som kan delas upp på flera olika sätt.




*Fyra olika sätt att dela upp 18 · 12 med stöd av distributiva lagen.*

Den associativa lagen för multiplikation är, liksom den distributiva, användbar vid multiplikation av större tal, t ex $16 \cdot 25$. En viktig skillnad jämfört med den distributiva är att man faktoriserar en eller båda faktorerna för att få enklare beräkningar. I exemplet ovan, då distributivitet utnyttjades, delades en eller båda faktorerna upp additivt. För att förenkla $16 \cdot 25$ kan 16 skrivas som $4 \cdot 4$, $16 \cdot 25 = 4 \cdot 4 \cdot 25$. Då kan associativa lagen utnyttjas och $4 \cdot 25$ beräknas först, $(4 \cdot 4) \cdot 25 = 4 \cdot (4 \cdot 25) = 4 \cdot 100$. Detta kan illustreras med arean av en rektangel. Storleken på rektangeln, som motsvarar produkten, ändras inte även om vi gör ena sidan en fjärdedel så stor om vi samtidigt gör den andra sidan fyra gånger större.



*Höjden i den nedre rektangeln är en fjärdedel av den övre och längden är fyra gånger så lång.*

Det är alltså associativa lagen som ligger bakom den beräkningsmetod som populärt brukar kallas dubbelt-hälften. Om man dubblerar den ena sidan i en rektangel samtidigt som man halverar den andra förändras inte arean, dvs produkten är densamma.

Man kan även använda sig av lika grupper och ta de tolv bullpåsarna med fyra bullar i varje och fördubbla antalet bullar i varje påse samtidigt som antalet påsar blir hälften så många. Eller göra dubbelt så många påsar med hälften så många bullar i varje.

## Learning trajectories – lärostigar

I engelskspråklig litteratur skriver man om learning trajectories, då man beskriver vägar genom matematiken som många elever visar sig följa då de utvecklar sitt kunnande. Man använder även uttrycket för att beskriva en tänkt inlärningsgång av ett område. Ett exempel på en lärostig för multiplikation är att börja med vardagliga föremål, exempelvis spelkulor eller leksaksbilar, som placeras i lika stora grupper, t ex i påsar eller lådor. Senare övergår man till laborativa material, exempelvis multilinkklossar, som får representera de vardagliga föremålen. Multilinkklossar kan sättas samman i ”torn”, vilket gör det möjligt att uppmärksamma att ett torn samtidigt symboliserar *ett* torn och *flera* klossar. Vardagliga föremål och laborativa material kan placeras i rektangelformationer. Då föremålen placeras så är de fortfarande synliga och det går att räkna dem. Rektangelformationer med konkreta föremål är en viktig länk för att utvidga multiplikation från att tidigare endast ha handlat om lika grupper till att närma sig multiplikation som rektangulär area. I rektangelformationen finns de lika grupperna kvar om vi väljer att se på föremålen radvis. I en äggkartong med 15 ägg är det 3 rader med 5 ägg i varje rad, elever kan se de lika grupperna om 5 ägg. Finessen med att lägga dessa ägg, andra vardagliga föremål eller laborativt material som en rektangelformation är att det också är möjligt att se lika grupper i kolumnerna. Då syns det tydligt att vilken som helst av faktorerna kan vara multiplikator, att kommutativa lagen gäller. Successivt kan dessa rektangelformationer övergå i rutnät likt rutorna i en chokladkaka eller kakelplattorna på en badrumsvägg. Rutorna kan man så småningom ta bort och övergå till att enbart mäta kanterna på den rektangel som man har format av sina tänkta rutor.

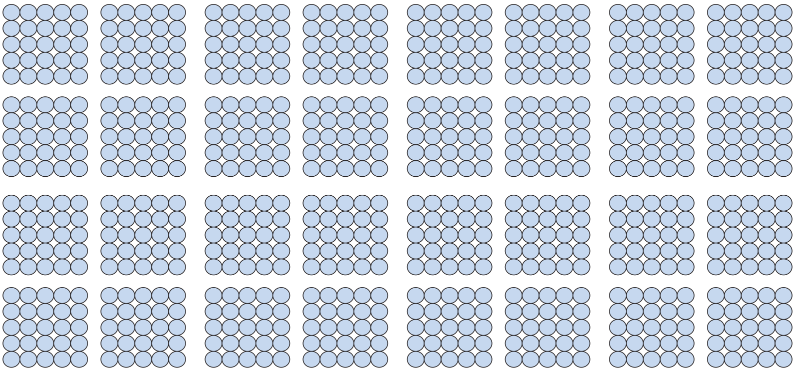
Parallellt med denna lärostig från lika grupper av konkreta objekt (såväl vardagliga föremål som laborativa material) via rektangelformation av konkreta objekt, över ett rutnät, till area av en rektangel, får eleverna beskriva multiplikation i olika uttrycksformer, t ex med ord och siffersymboler, samt givetvis arbeta med problemlösning av multiplikativ karaktär där både multiplikation och division används för att lösa uppgifterna.

## Ett undervisningsexempel från åk 5

Jag fick möjlighet att diskutera multiplikation med två klasser i åk 5. Vi tittade på bilder som jag tagit i mataffären och på torget. Bilderna visade olika varor som var ordnade i rektangelformationer, huller om buller samt i mönster som liknade rektangelformationer. Med utgångspunkt i bilderna diskuterade vi hur man kunde räkna t ex alla läskedrycksflaskor på en stor pall och eleverna kom snart fram till att det gick att förenkla beräkningar genom att multiplicera då föremålen var ordnade i rader och kolumner. Om det saknades några enstaka var det bara att subtrahera de ”tomma platserna”.

Bilden på apelsinerna visade sig vara mycket bra som ett exempel där det inte går lika enkelt. Apelsinerna ligger prydligt ordnade i ett mönster, men det är inte lika många i varje rad och det var många elever som inte uppmärksammade detta först. Denna bild kom att utgöra ett bra motexempel på vad som *inte* är en rektangelformation.

Eleverna fick sedan en rektangelformation av prickar och vi diskuterade hur den var uppbyggd och hur den skulle kunna användas som en hjälp att tänka när man multiplicerar större tal. Eleverna testade att beräkna ett tiotal uppgifter med prickpappren som tankestöd.



Rektangelformationen finns att hämta på ncm.gu.se/matematikpapper

*Rektangelformationer ordnade i grupper av 5 · 5 och 4 · 25.*

Några elever diskuterade kommutativa lagen (nej, de visste inte namnet på den) och menade att med prickpappret kunde de bevisa att den alltid gäller i multiplikation: *Det är ju bara att vrida på pappret!* Andra tyckte att det blev tydligt hur multiplikation går till och att den förtydligade ”uppställningen” som de brukar använda. Ytterligare andra tyckte inte alls om pappret och ville hellre räkna med siffror i uppställning som vanligt. Några elever, som tyckte att multiplikation är svårt och ännu inte hade lärt sig tabellerna utantill, ”såg” tabellerna i en hundraruta och bad att få tejpa fast den på bänken.

Idén att utgå från rektangelformationer som är ordnade i grupper är hämtad från artikeln *Fostering multiplicative thinking using array-based materials* av Jennifer Young-Loveridge.

## Sammanfattning

För att bygga vidare på elevers kunskaper behöver vi starta med multiplikation som upprepad addition, men vi kan inte nöja oss med enbart denna situation. Även rektangelformationer och multiplikativa jämförelser behöver belysas med exempel och uppgifter, liksom såväl delnings- som innehållsdivision. I annat fall begränsar vi elevernas möjligheter att förstå multiplikation i olika situationer och att kunna generalisera sin kunskap om multiplikation och division med naturliga tal till tal i andra talmängder, t ex tal i bråkform. En god förståelse för multiplikation och division lägger grunden för många andra områden i matematik som exempelvis bråk, procent, proportionella samband, skala och funktioner. Beräkningar kan bli begripliga och utgöra en kreativ verksamhet då eleverna arbetar med flexibla beräkningsstrategier med utgångspunkt i räknelagarna.

### LITTERATUR


Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309–330.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4(3), 259–309.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. I R. Lesh & M. Landau (red) *Aquisition of mathematics concepts and processes*, 127–174. Orlando, Fla: Academic Press.

Young-Loveridge, J. (2005). Fostering multiplicative thinking using array-based materials. *Australian Mathematics Teacher*, 61(3), 34–40.