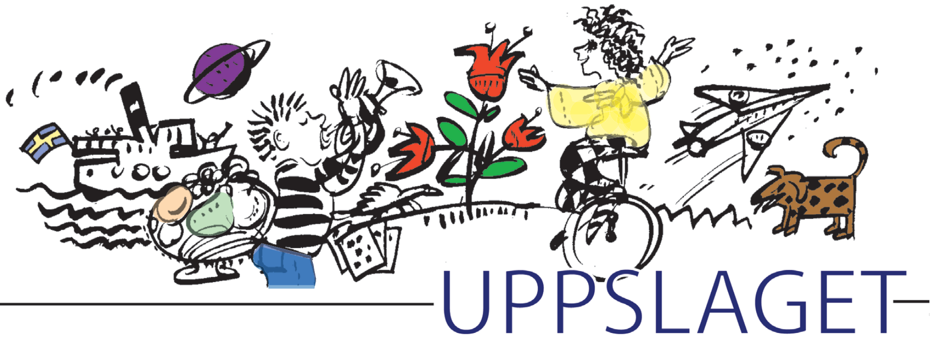


Uppgiftens potential – kombinatorik

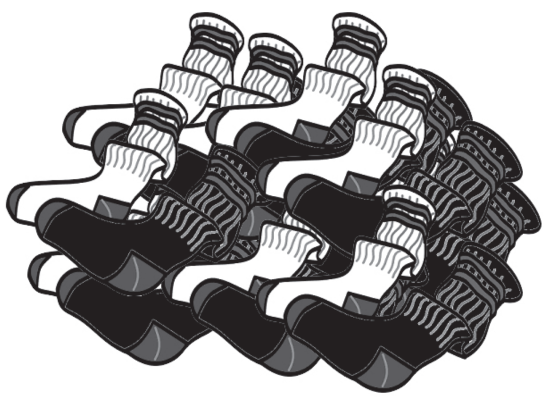
I *Alla dessa möjligheter – kombinatorik och resonemang*, Nämnaren 2013:2, diskuteras elevers tankegångar och resonemang vid arbete med olika kombinatorikövningar. Här följer författaren upp med idéer om hur en relativt enkel uppgift kan fördjupas och utvecklas så att elever med olika behov får utmaningar. Ordet kombinatorik finns inte med under centralt innehåll för årskurs 1–3 men även dessa unga elever kan få närma sig innehållet, vilket det ges exempel på i *Kombinatorik från början* på sidorna 35–37.

Uppgifter som hör till kombinatorik frågar ofta efter *Hur många …?* eller *På hur många olika sätt kan …?* eller som i nedanstående uppgift *Vilket är det minsta antal …?* Den här typen av uppgifter är ofta relativt triviala på en grundläggande nivå för att sedan ganska snabbt kräva generella lösningar ifall innehållet i uppgiften förändras. Genom att exempelvis byta ut till högre tal i samma uppgift kan man få en uppgift som inte låter sig lösas med bilder eller tabeller eftersom en sådan lösning skulle bli både omfattande och tidskrävande. Att på olika sätt rita upp eller tänka ut lösningar om vi hade haft hundratals strumpor av många olika färger kan bli för omfattande. I undervisningen är det därför viktigt att redan i de enklare uppgifterna träna eleverna i att föra resonemang om strukturer i olika lösningar då dessa strukturer kommer att vara nödvändiga för att lösa mer omfattande uppgifter.

I det här Uppslaget kommer olika lösningar till en vanlig typ av uppgift inom området kombinatorik att diskuteras. Uppgifterna är lämpliga både i årkurs 4–6 och 7–9 då de lätt kan anpassas till *enkel kombinatorik i konkreta situationer* (centralt innehåll årskurs 4–6) men även till *hur kombinatoriska principer kan användas i enkla vardagliga och matematiska problem* (centralt innehåll årskurs 7–9).

Strumpor

I en låda ligger det tio par strumpor. De sitter inte ihop parvis, utan alla strumpor ligger ”huller om buller”. Strumporna är svarta och vita. Vi tänker oss att lådan är i ett rum utan belysning, så du ser inget alls. Vilket är det minsta antalet strumpor du måste ta, för att säkert veta att du har minst två av samma färg?



Uppgiftens formulering

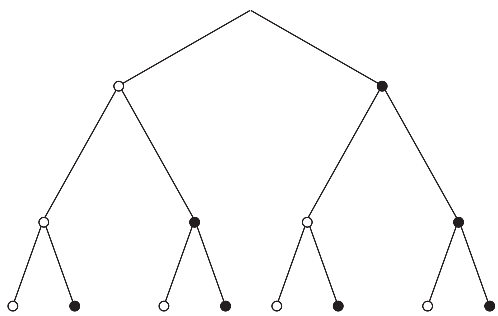
Underförstått är det jämna par av de två olika färgerna, men det finns inget i texten som antyder inbördes relation. En del elever uppfattar att det är lika många av varje färg utan att reflektera medan andra elever väljer att anta att det är fem par av varje färg. Formuleringen medför att uppgiften lätt kan formuleras om till en uppgift av mer undersökande karaktär genom frågan: *Beror antalet strumpor du måste ta för att få minst två av samma färg på hur många strumpor det är av varje färg i lådan?* Beroende på hur du som lärare planerar undervisningen kan genomförandet generera olika lärande. Ett sätt är att som nedan beskrivs låta eleverna arbeta med konkret material vilket kan leda till en diskussion med utgångspunkt från elevernas resultat. Om eleverna däremot inte genomför en undersökning kommer deras lösningar att bygga på andra faktorer beroende på om de känner igen uppgiftstypen och kanske redan har en metod eller så kanske uppgiftstypen är helt ny för eleven vilket i sin tur innebär att det kommer att handla om problemlösning och att de därmed själva måste komma fram till en lösning.

Konkretisera

För årskurs 4–6 kan strumpuppgiften konkretiseras på många olika sätt. Det är lämpligt att ordna en låda eller påse med ett innehåll som motsvarar uppgiftens innehåll. Det viktiga är att föremålen av de två färgerna placeras i en ogenomskinlig behållare av något slag. Undervisningens upplägg kan varieras. Eleverna kan enskilt eller i mindre grupper, innan de genomför uppgiften, formulera en hypotes för vilket resultat de tror att de kommer att få. Sedan är det lämpligt att låta eleverna i helklass, grupp eller enskilt dra föremål tills de får ett par av en färg. Detta bör utföras flera gånger för att få data till en slutlig diskussion av resultaten i relation till elevernas hypoteser. Det är också viktigt att introducera lämplig metod för hur resultaten kan bokföras så att eleverna själva inför andra uppgifter av liknande karaktär skaffar sig den typen av erfarenhet. Man kan i en sådan här övning anta att eleverna i sina hypoteser kommer att föreslå olika antal dragningar, kanske såväl 2, 3, 4, 5 som 6 dragningar. Det viktiga är att få eleverna att motivera vilket antal dragningar som svarar på frågan. Till exempel kan man komma fram till att det inte kan vara 6 dragningar som är det minsta antalet eftersom de laborativt har fått par av strumpor med samma färg med färre dragningar. Dilemmat kommer till slut att vara att reda ut vilket av svaren 2 eller 3 som är rätt.

Träddiagram

Ett sätt att lösa den här typen av uppgift är att använda sig av ett träddiagram. Har man lärt sig principen för det så är det en metod som är lämplig om antalet variabler inte är för stort eftersom träddiagrammet då snabbt växer och blir svårt att hantera.

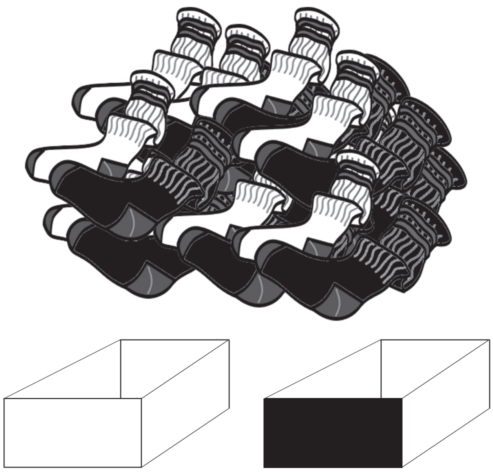


Ritar vi ett träddiagram enligt bilden så kommer eleverna med stöd av detta kunna föra resonemang av typen: *I diagrammet ser jag att den första strumpan kan vara svart eller vit. Om jag sedan drar en strumpa till så kommer ju den också att bli svart eller vit. Detta innebär att jag efter två dragningar kommer att ha antingen ett par av samma färg eller en av varje färg. Om jag sen drar en strumpa till så kommer jag garanterat ha ett par av samma färg eftersom om jag hade en av varje efter två dragningar så kommer den tredje antingen vara svart eller vit. Jag måste alltså dra minst tre strumpor för att säkert få ett par av samma färg.*

Det är viktigt att hjälpa eleverna att uttrycka tydligt hur svaret kan motiveras. Har man som lärare analyserat uppgiftens potential i förväg är man förberedd på vad man söker i elevernas resonemang, och kan därmed hjälpa eleverna framåt i sina resonemang genom att ställa frågor som: *Hur vet du det? Räcker det inte att dra två strumpor för att kunna svara på frågan? Hur kan jag vara absolut säker på att det räcker med tre dragningar?*

Lådprincipen

En annan metod som man kan introducera är lådprincipen (Dirchlets lådprincip) som också går under namnet Postfacksprincipen eller Duvslagsprincipen.



Denna princip går ut på att vi tänker oss att vi har två lådor att lägga våra strumpor i, svarta respektive vita. Antalet strumpor är dessutom fler än antalet lådor. Då kommer en låda att innehålla minst två strumpor efter att vi placerat tre av strumporna. Om antalet lådor betecknas med n, så uppnår vi det vi söker vid $n+1$, det vill säga i det här fallet $2+1=3$.

Variation av uppgiften

Uppgiften kan varieras på olika sätt. Om en elev upplever att svårigheten är att det handlar om tio par strumpor kan den göras mer lättillgänglig genom att välja färre strumpor.

Vill vi istället göra uppgiften lite svårare kan vi utöka antalet färger på strumporna. Hur många strumpor måste vi dra då? Med lådprincipen kan eleverna motivera att så länge *antalet strumpor > antalet lådor* så kommer lösningen hela tiden vara $n+1$ där n är antalet lådor. Utökar vi till tre färger är således $n=3$, och vi behöver då dra $3+1=4$ strumpor för att säkert få minst två av samma färg.

En annan variation är att formulera om frågeställningen: *Hur många strumpor måste jag dra för att säkert få ett par svarta strumpor?* Helt plötsligt blir svaret beroende av antalet strumpor i varje färg och uppgiften kan leda till en omfattande undersökning av olika möjligheter beroende på detta. Vad händer om det är ett par svarta och nio par vita strumpor, två par svarta och åtta par vita, tre par svarta och sju par vita, och så vidare. Uppgiften är naturligtvis också en bra utgångspunkt för att diskutera sannolikheten för olika utfall i en situation med dragning utan återläggning.

Uppgiftens potential

Att vara införstådd med en uppgifts potential kan ligga till grund för hur vi lägger upp vår undervisning. Som beskrivs ger vi eleverna utrymme att träna olika förmågor beroende på våra val. Om vi låter eleverna använda konkret material och genomföra uppgiften laborativt ges utrymme för att ställa hypoteser och sedan utifrån resonemang komma fram till ett svar utifrån de resultat de har fått.

Om vi låter eleverna använda redan kända metoder är det metodförmågan som tränas. Man kan som lärare ha för avsikt att eleverna ska träna på träddiagram eller på lådprincipen och eleverna ges ett antal uppgifter lämpade att lösa med vald metod. Även detta kan kombineras med resonemang om hur metoden fungerar och varför metoden ger oss ett svar.

Eller så är det problemlösningsförmågan som är av intresse. Vad är då ett problem? I kommentarmaterialet till Lgr 11 står det på följande sätt: *Matematiska problem är, till skillnad från rena rutinuppgifter, situationer eller uppgifter där eleverna inte direkt känner till hur problemet ska lösas. I arbetet med matematiska problem måste eleverna i stället undersöka och pröva sig fram för att finna en lösning.* Arbetar vi med problemlösning är det inte att reproducera metoder som är i centrum utan att träna eleven i att förstå problemet. Problemlösning kan gärna föregås av en gemensam diskussion där man går igenom vad som är väsentligt i uppgiften. *Vad får vi veta i uppgiften? Vad är det vi ska räkna ut? Finns det något i uppgiften vi kan bortse ifrån?* Elever har ofta bråttom när de löser problem och tror att de snabbt ska komma på ett sätt att göra en beräkning. Därför är det ett viktigt inslag att diskutera problemformuleringar så att eleverna lär sig att tänka efter. När eleverna sen löst problemet, enskilt eller tillsammans, kommer ett annat viktigt inslag, nämligen att diskutera de olika lösningar som har kommit fram. Det är i denna situation, när alla har arbetat med samma problem, som en sådan diskussion verkligen kan ge varje elev möjlighet till att utveckla sitt kunnande.

Karin Landtblom