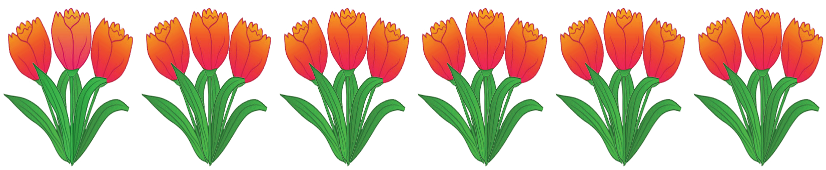
Natalia Karlsson & Wiggo Kilborn

Att konkretisera och förstå multiplikationstabellen

Vari ligger skillnaden i att kunna använda sig av multiplikationstabellen och att förstå multiplikation? Behöver det ena utesluta det andra? Vilka möjligheter och hinder finns med de konkretiserande bilder som används i undervisningen? Detta är några av de frågor om mönster och multiplikation som diskuteras.

Nej, mina elever behöver inte lära sig multiplikationstabellen. Däremot är det viktigt att de förstår den. Så låter det ofta när vi intervjuar lärare. Men vad innebär det att förstå multiplikationstabellen? När vi studerar lektioner som handlar om multiplikation finner vi att de flesta av dem bygger på multiplikation som upprepad addition. Om man har 6 buketter med 3 tulpaner i varje kan detta skrivas antingen som 3 tulpaner + 3 tulpaner + 3 tulpaner + 3 tulpaner + 3 tulpaner + 3 tulpaner eller som multiplikationen 6·3 tulpaner. För att konkretisera detta använder lärarna bilder av följande slag:



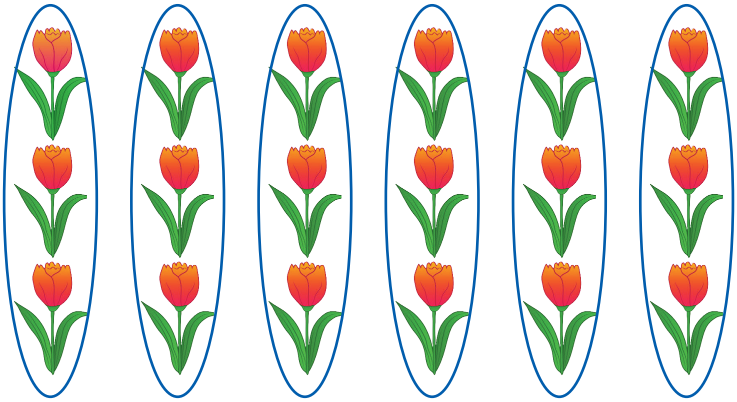
Ett skäl till att använda storheter (3 tulpaner) och inte bara mätetal (3) är att man vid multiplikationen vill skilja mellan det som tidigare kallades multiplikanden (3) och multiplikatorn (6), alltså skilja mellan 6·3 tulpaner och 3·6 tulpaner. En hel del lärare och läromedel låtsas inte om skillnaden mellan att arbeta med storheter (3 tulpaner) och mätetal (3) utan tolkar bilden direkt som den abstrakta operationen 6·3.

Efter att ha övat detta på ett antal uppgifter, brukar lärarna övergå till uppgifter som

Skriv 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 som en multiplikation: ____ · ____ = ____ .

När eleverna arbetar med de här uppgifterna, finner vi att de flesta av dem antingen räknar i 3-steg, alltså utför en upprepad addition eller, om det finns en figur som den ovan, räknar tulpanerna en och en. Ofta följs detta upp med arbete med ”3-tabellen”, alltså med talraden 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. Men detta är inte heller en multiplikation utan fortfarande en upprepad addition.

Det här belyser ett dilemma vid konkretisering, nämligen frågan om vad man faktiskt konkretiserar. I det här fallet har man inte konkretiserat multiplikation utan enbart addition. En väsentlig skillnad mellan addition och multiplikation är att addition till sin struktur är linjär medan en multiplikation är rektangulär. Med hjälp av tulpanerna går det att åskådliggöra multiplikationens struktur (ett multiplikativt mönster) genom att gruppera om tulpanerna på följande sätt.



Då tulpanerna har placerats i 6 kolumner, med 3 tulpaner i varje, har multiplikationen fått en egen struktur, samma struktur som multiplikationstabellen bygger på. Detta blir ännu tydligare om vi placerar det här mönstret med tulpaner i multiplikationstabellen.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

I detta mönster ser vi inte bara den upprepade additionen, alltså att 2 buketter ger 6 blommor, 3 buketter ger 9 blommor osv. Vi ser också multiplikationstabellens struktur och hur den visar produkten $6 \cdot 3 = 18$. På så sätt kan eleverna få en uppfattning om hur multiplikationstabellen är uppbyggd och hur de ska avläsa den. Men multiplikation är så mycket mera. När undervisningen har kommit så här långt kan nästa steg vara att gå vidare och studera tabellen lite närmare. Eleverna kan då finna en rad mönster som tillsammans karaktäriserar vad som menas med att förstå multiplikation och multiplikationstabellen.

Aspekter av konkretisering

Innan vi går vidare vill vi lyfta fram några viktiga aspekter av konkretisering. Den vanligaste metoden att konkretisera för yngre elever är att använda sig av åskådning. Det är då viktigt att det material eller den bild som används verkligen lyfter fram de aspekter som man avser att konkretisera. I det exempel vi ger i inledningen har man t ex inte konkretiserat multiplikation utan upprepad addition. En annan intressant aspekt är bildens funktion vid konkretisering. Det här handlar om perception. Frågan är vilken förmåga elever har att tolka en statisk bild samtidigt som läraren beskriver en dynamisk process. Under de lektioner vi har observerat använde sig lärarna av en interaktiv skrivtavla, men utnyttjande inte möjligheterna att med dess hjälp animera konkretiseringen och därmed ge åskådligt stöd åt sina förklaringar.

Senare, när elever har abstraherat, dvs förstått det man avsåg att konkretisera, är det viktigt att de lämnar materialet eller bilderna och använder den matematiska modell de just har lärt sig. Detta är i sin tur en förutsättning för att utveckla de förmågor, såsom att analysera, resonera och beräkna, som nämns i kursplanens syfte. Men så är det sällan. De "konkretiserande" bilderna fortsätter i böckerna, sida upp och sida ner, vilket faktiskt hindrar eleverna från att tillämpa vad som har konkretiserats.

En annan form av konkretisering är den deduktiva metoden, alltså att man gör sig bekant med ett fenomen, en struktur eller en metod genom att reflektera och analysera. Detta är enligt vår uppfattning den bästa metoden när det gäller att utveckla de förmågor som nämns i kursplanens syfte. Vi ska nu koppla den deduktiva metoden till vad vi menar med att förstå multiplikation och multiplikationstabellen.

Att studera multiplikationstabellen

Att förstå multiplikationstabellen innebär att inse hur den är uppbyggd och vilka mönster som döljer sig i tabellen. Detta utgör samtidigt en inkörsport till algebran eftersom eleverna på det sättet kan upptäcka värdet av räknelagarna och möta grundläggande algebraiska strukturer, pre-algebra.

En första analys visar att multiplikationstabellen är symmetriskt uppbyggd och att kvadrattalen bildar en symmetrilinje. Viks tabellen över symmetrilinjen så kommer $4 \cdot 3 = 12$ att hamna ovanpå $3 \cdot 4 = 12$ och $6 \cdot 8 = 48$ att hamna ovanpå $8 \cdot 6 = 48$. Eleverna kan på det sättet upptäcka den kommutativa lagen, vilket i sin tur innebär att de bara behöver lära sig 60 kombinationer. Kommutativiteten ger de andra 40 kombinationerna.

På motsvarande sätt kan eleverna, genom att studera tabellen, upptäcka andra väsentliga egenskaper hos multiplikation som att

- 1 är ett neutralt element, vilket innebär att $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 3 = 3$, ...
- om de multiplicerar två udda tal så är produkten ett udda tal eftersom alla övriga produkter är jämna tal och detta eliminerar onödiga ±1-fel
- en stor del av kombinationerna i tabellen är "dubblor" såsom (2), 4, 8, 16 och (3), 6, 12, 24
- när de vet att $4 \cdot 6 = 24$ vet de också att $5 \cdot 6 = 24 + 6$
- en multiplikation med 5 ger en produkt som slutar på 0 eller 5

- multiplikation med 10 gör ental till tiotal
- om ett tal multipliceras med 3 så är produktens siffersumma delbar med 3 och om ett tal multipliceras med 9 så är produktens siffersumma 9
- och så vidare.

Genom att på det här sättet uppfatta strukturer i multiplikationstabellen blir det betydligt enklare för en elev att lära sig tabellen utantill.

Nödvändiga utantillkunskaper

Nästa intressanta fråga är om det är nödvändigt att alla elever lär sig multiplikationstabellen utantill? Så länge huvudräkning och skriftlig räkning är centrala innehåll i kursplanen bör det vara rimligt. Både när det gäller huvudräkning och skriftlig räkning utgör kombinationer från multiplikationstabellen nödvändiga deloperationer med vars hjälp man resonerar sig fram till en lösning. Samtidigt måste man i båda fallen hålla reda på var man är i resonemanget eller algoritmen. Detta ställer stora krav på arbetsminnet, speciellt om man mitt i resonemanget måste ta reda på hur mycket $6 \cdot 8$ eller $7 \cdot 9$ är.

Att behärska den här typen av grundläggande räkneoperationer anser vi är av stor vikt för elevernas fortsatta matematiklärande. Eleverna behöver flyt när de opererar med naturliga tal och detta flyt förutsätter automatiserad addition och multiplikation av heltal i talområdet 0–10, det vi kallar tabellerna.

LITTERATUR

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Konkretisering av undervisningen i matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Kilborn, W. (1973). Matematik. I H. Danielsson (red). *Lära ut – lära in*. Göteborg: Gummeson läromedel.

Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter* (Fou-rapport 37). Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Loewenberg Ball, D., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J., Molgram, J,. Schmid,W. & Schaar, R. (2005). *Reaching for common ground in K–12 mathematics education*. Mathematical Association of America.